

## Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

• Polya, G.: Induction and analogy in mathematics. Vol. I of mathematics and plausible reasoning. Princeton: Princeton University Press 1954. XVI, 280 p. \$ 5,50.

• Polya, G.: Patterns of plausible inference. Vol. II of mathematics and plausible reasoning. Princeton: Princeton University Press 1954. X, 190 p., \$ 4,50.

Band I: Die Mathematik der Vollendung könnte prinzipiell mit der Fertigkeit des Deduzierens auskommen, Mathematik im Werden aber braucht die Kunst des Suchens und Vermutens. Die Unterweisung in dieser Kunst wird nur spärlich gepflegt, wohl deshalb, weil man vielfach der Meinung ist, daß sich der mathematische Spürsinn von selbst entwickelt, sofern man nur sich im strengen Beweisen gründlich genug übt. Diesem „Laissez faire“ tritt nun der Verf. in seinen Büchern entgegen; er will uns das Raten lehren, freilich nicht im Sinne einer ausgemachten Technik, aber an Hand einer wunderschönen Sammlung von mathematischen Beispielen, welche die verschiedenen Möglichkeiten der induktiven und auf Analogien beruhenden Denkweisen veranschaulichen. Verf. versteht es meisterhaft, jene köstliche Besinnlichkeit der klassischen Frühzeit, wie sie uns besonders in den Werken von Euler entgegentritt, zur Wirkung zu bringen. Die Darstellung der Beispiele zeigt, wie der Mathematiker seine Bücher schreiben und seine Vorlesungen halten müßte, um das Studium eines mathematischen Satzes zu einem erregenden Entdeckungsabenteuer zu machen. Kapitelüberschriften: 1. Induktion; 2. Verallgemeinerung, Spezialisierung, Analogie; 3. Induktion in der räumlichen Geometrie; 4. Induktion in der Zahlentheorie; 5. Verschiedenartige Beispiele zur Induktion; 6. Ein allgemeineres Beispiel (Euler); 7. Die vollständige mathematische Induktion; 8. Maxima und Minima; 9. Mathematik in der Physik; 10. Das isoperimetrische Problem; 11. Weitere Plausibilitätsbetrachtungen. Die Beispiele sind alle so gewählt, daß sie auch ein Leser ohne Spezialkenntnisse verstehen kann. Jedem Kapitel sind ein Kommentar und zahlreiche Übungsaufgaben beigelegt (mit Hinweisen zur Lösung). Eine Fülle von Anregungen. — Band II: Hier bezeichnet Verf. selbst seine Darlegungen noch als einen Versuch, wenn er daran geht, das heuristische Denken in Schemata einzufangen, welche den Syllogismen der strengen Logik analog sind. Die bei der Aufstellung dieser plausiblen Denkformen verwendeten Beispiele werden unabhängig von Bd. I dargestellt, so daß Band II ohne Kenntnis von I lesbar ist. Z. B. wird

dem strengen Schluß  $((B \rightarrow A) \& B) \rightarrow A$  gegenüber gestellt

das heuristische Schema  $((A \rightarrow B) \& B) \rightarrow A$  in einem höheren Maße glaubwürdig),

ferner dem Schluß  $((A \rightarrow B) \& (B \text{ falsch})) \rightarrow (A \text{ falsch})$

das Schema  $((B \rightarrow A) \& (B \text{ falsch})) \rightarrow (A \text{ in einem geringeren Maße glaubwürdig})$

Andere „heuristische Syllogismen“ ergeben sich, wenn in den Prämissen selbst Aussagen stehen, die mit einem gewissen Maß von Glaubwürdigkeit behaftet sind, oder wenn dort an Stelle einer Implikation eine Analogie zweier Aussagen tritt. Den qualitativen Aussagen des plausiblen Schließens lassen sich die quantitativen Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegenüberstellen. Die dabei auftretende ausgeprägte Verwandtschaft wird aber nur als eine Bekräftigung der Richtigkeit der heuristischen Schemata gewertet, keineswegs aber als Anreiz, in die Heuristik selbst eine quantitative Glaubwürdigkeit einzuführen. Eine weitere Bestätigung der Zweckmäßigkeit dieser Schemata sieht Verf. in der Tatsache, daß die heuristischen Syllogismen mit jenen der Logik die Merkmale der Unpersönlichkeit („von jeder Person anwendbar“), der Allgemeinheit („auf beliebige Aussagen anwendbar“) und der Selbstgenügsamkeit („die Prämissen reichen allein für die Behauptung aus“) gemeinsam haben. Dagegen haften den Behauptungen der Heuristik eine Unbestimmtheit an, indem nur über Ab- oder Zunahme der Glaubwürdigkeit, nicht aber Genaueres über ihre Stärke ausgesagt wird. Inhalt: Kapitel 12. Einige auffallende Schemata (z. B. Bestätigung einer Folgerung, einer unwahrscheinlichen Folgerung, Schluß auf Grund einer Analogie); 13. Weitere Schemata und Verbindungen von solchen (u. a. Erprobung einer Folgerung, eines möglichen Grundes, zweier unverträglicher Vermutungen, Einfluß rivalisierender Vermutungen); 14. Zufall, die stets anwesende rivalisierende Vermutung (ein Exposé über Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen und Rechnung); 15. Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Logik des plausiblen Schließens (Analogien zwischen beiden); 16. Plausibles Schließen beim Entdecken und Lehren (u. a. Heuristische Motivierungen, ein Wort an die Lehrer). Wieder ist die lebendige Darstellung durch weitere oft überraschende Beispiele kommentiert. Dem Versprechen treu, keine Theorie zu postulieren, läßt es Verf. nicht an Übungsbeispielen (mit Lösungs-



andeutungen) fehlen. — Die Mathematiker, die lehrenden wie die lernenden, müssen das Erscheinen dieser Bücher mit Dankbarkeit begrüßen; die ersten erfahren, wie man der Mathematik ihre Sprödigkeit nimmt, die zweiten werden Mut schöpfen, weil bei aller Unfehlbarkeit sich auch die Mathematik als eine menschliche Wissenschaft erweist. *G. Aumann.*

● **Green, S. L.: Advanced level pure mathematics. II: Pure geometry and trigonometry.** 2nd ed. III: Algebra and analysis. London: University Tutorial Press. 1954. IV, 129—284 u. IV., IV, 285—624. 6 s; 12 s.

**Kuratowski, Kazimierz: Der Stand und die Aufgaben der Organisation des Mathematischen Lebens in Volkspolen.** Hauptreferate 8. Polnisch. Math.-kongr., 6.—12. Sep. 1953 Warschau, 1—9 (1954).

## Geschichte.

● **Waerden, B. L. v. d.: Science awakening. Translated from the Dutch text by Arnold Dresden with additions of the author.** Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1954. 360 p. \$ 5,—.

In der vorliegenden englischen Übersetzung der Mathematikgeschichte van der Waerdens (vgl. dies. Zbl. 35, 145), in der die Entwicklung der Mathematik in vorgriechischer und griechischer Zeit dargestellt ist, wird das treffliche Werk nun auch einem weiteren Kreis nutzbar sein. Am Text hat Verf. eine Reihe von Ergänzungen vorgenommen. Neu sind die Abschnitte über das Astrolab und die stereographische Projektion (S. 182f.), über das 7-Eck bei Archimedes (S. 227), über Anthiphon (S. 130) sowie über eine allgemeine babylonische Formel (S. 74), die wichtig ist, weil sonst in der Antike — wegen der fehlenden Symbolik — die Formel immer durch das Zahlenbeispiel ersetzt wurde. Erweitert wurden die Abschnitte über die Perspektive, über den Anaphorikos des Hypsikles (S. 270), über die Lehre von Grad-Ungrad (S. 109) sowie über die geometrische Algebra (S. 125: Warum führten die Griechen sie ein?). Ganz besonders ist die Beigabe neuer Figuren und prächtiger Kunsttafeln hervorzuheben; auch solcher, die nur indirekt mit dem Stoff in Verbindung stehen, die aber die Beziehung zur Gesamtkultur, vor allem zur gleichzeitigen Kunst herstellen. Der Groninger Archäologe H. G. Beyen hat sie mit ausgedacht und im einzelnen beschriftet. Schlechtere Bilder oder auch überflüssige (wie der ägyptische Mondgott oder das Spartanische „meisje“) wurden jetzt weggelassen oder durch bessere ersetzt, so daß die Lektüre auch nach der ästhetischen Seite zu einem wahren Genuß wird. — Im einzelnen seien noch folgende Bemerkungen gestattet: S. 61: Das Rechenbuch von Wagner erschien 1482 in Bamberg; älter ist ein Blockbuch der Staatsbibliothek Bamberg von ca. 1475. — S. 75: Ein wichtiger babylonischer geometrischer Text wurde 1945 bei Bagdad gefunden [s. Z. Assyriol., n. F. 16, 151 (1953)]. — S. 90: Philipp von Medma (nicht Mende). — S. 119: Der Nachweis, daß  $x^3 = a^2 b$  aus  $a:x = x:y = y:b$  folgt, wird, wenn man algebraische Transformationen ganz vermeiden will, besser mit der „Zusammensetzung der Verhältnisse“ in folgender Weise geführt: Aus  $a:x = x:y = y:b$  folgt  $a^2:x^2 = (x:y) \cdot (y:b) = x:b$  und  $a^3:x^3 = (x:b) \cdot (a:x) = a:b$ . — S. 147: Thymaridas ist wohl später anzusetzen; s. hierzu H. Diels, Vorsokratiker, 6. Aufl., Berlin 1951, S. 447 (hier muß es in der Formel  $n - 2$  heißen).

*K. Vogel.*

**Heller, Siegfried: Ein Fehler in einer Archimedes-Ausgabe, seine Entstehung und seine Folgen.** Abh. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., n. F., Heft 63, 38 S. (1954).

Im Satz 21 der Abhandlung *περὶ κωνοειδῶν καὶ σφαίροειδῶν* (Inhalt des abgeschnittenen Rotationsparaboloids ist das Anderthalbfache eines Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe) steht eine fehlerhafte Schlußfolgerung, die Heath 1897 in seiner Archimedesausgabe stillschweigend beseitigt und auf die Dijksterhuis erstmalig aufmerksam gemacht hat. Verf. untersucht daraufhin die älteren Handschriften, die Editio princeps und die späteren Ausgaben und kommt zu dem Ergebnis, daß aus zwei Schreibversehen — sie stehen schon im ältesten Valla-Codex — allmählich eine fehlerhafte Beweisführung sich entwickelt hat. Vgl. hierzu auch den Aufsatz von Hermelink (dies. Zbl. 52, 1), der gleichzeitig auf den Fehler gestoßen ist.

*K. Vogel.*

● **Wolfer, Ernst Paul: Eratosthenes von Kyrene als Mathematiker und Philosoph.** Groningen: P. Noordhoff N. V. 1954. 65 S. \$ 1.—.

Verf. würdigt (Kap. 1—3) die bisher wenig untersuchte mathematische Leistung des vielseitigen Alexandriners. Sie besteht neben dem Primzahlensieb einmal in



Beiträgen zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung sowie zu dessen Geschichte, wobei wahrscheinlich gemacht wird, daß er in seinem „Platonikos“ davon gehandelt hat. Weiterhin führt Verf. aus Pappos, Theon und Proklos den Nachweis, daß die erweiterte Mittellehre Eratosthenes zum Urheber hat. Dieser muß sich damit im Platonikos sowie in der ebenfalls nicht erhaltenen Schrift „*περὶ μέσων/των*“ eingehend beschäftigt haben. Die Kapitel 4—6 behandeln die Überlieferung, Eratostheneszitate und Spuren bei späteren Autoren. Das 7. Kap. schildert Eratosthenes als Philosophen, der platonische und stoische Züge in sich vereinigt.

K. Vogel.

Guzzo, Augusto: „Posizione“ e deduzione in Euclide. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 13, 1—17 (1954).

Während z. B. Spinoza den Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, als eine ewige Wahrheit ansah, hat die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien den Wahrheitsgehalt dieses Satzes — und damit den Wahrheitsgehalt der Mathematik überhaupt — problematisch gemacht. Verf. fragt nun, ob Euklid in seinen Elementen die einzige und totale Wahrheit darstellen wollte oder ob er bewußt nur einen bestimmten Gegenstand für seine Studien ausgewählt und andere bei Seite gelassen hat. Er kommt zu dem Schluß: Euklid beschränkt sich bewußt auf Geraden und Ebenen (auch der Kreis wird mittels Geraden definiert). Im Gegensatz dazu denkt Archimedes von vornherein an gekrümmte Linien und Flächen, und Menelaos hat eine Dreiecksgeometrie auf der Kugel entwickelt, welche der euklidischen weitgehend entspricht, jedoch die Grenzen der Entsprechung (Winkelsumme) richtig erkannt hat. Es handelt sich also bei den verschiedenen Geometrien um verschiedene Gegenstände. Die Gegenstände gibt man sich willkürlich vor, dann aber ist es Aufgabe der menschlichen Vernunft „di stabilire la determinata verità su l'oggetto determinato proposto al proprio studio“. Ref. vermag den Auffassungen des Verf. nicht überall zuzustimmen.

H. Gericke.

Boyer, Carl B.: *Analytic geometry in the Alexandrian age. I. II.* Scripta math. 20, 30—36, 143—154 (1954).

Überblick über Inhalt und Form der griechischen „Analytischen Geometrie“, der vor allem die algebraische Formulierung und der Koordinatenrahmen fehlt, in den die graphischen Darstellungen eingezeichnet werden können. Die griechischen Koordinaten sind mit der Kurve verbundene Strecken. Dabei ist die Kurve das Primäre; für sie lassen sich die Symptomata („Gleichungen“) aufstellen, während bei moderner Betrachtung sich aus der Gleichung die Kurve mit ihren Eigenschaften bestimmen läßt. Verf. geht auf alle — auch die verloren gegangenen — Schriften zwischen Euklid und Pappos ein, an dessen Problem der „3 und 4 Linien“ Descartes bewußt anknüpft. Übrigens spielt dieses Problem auch in der „Isagoge“ von Fermat eine Rolle.

K. Vogel.

Bernhart, Arthur: *Curves of pursuit.* Scripta math. 20, 125—141 (1954).

Verf. verweist zunächst auf Zenons Paradoxon (Achill und die Schildkröte als Annäherung auf gerader Bahn, einschließlich der relativistischen Behandlungsweise) und berichtet dann über ältere und neuere Ansätze zur Behandlung der Verfolgungskurve eines Punktes, der sich gleichförmig auf gerader Bahn bewegt, wenn der Verfolger mit größerer Geschwindigkeit nacheilt. Die Literaturhinweise sind sorgfältig zusammengestellt und ergänzen die Angaben in G. Loria, Spezielle . . . ebene Kurven II, 2. Auflage, Leipzig 1911, S. 241/47 auch hinsichtlich der älteren Literatur.

J. E. Hofmann.

Neugebauer, O.: On the „Hippopede“ of Eudoxus. Scripta math. 19, 225—229 (1954).

Nach Eudoxus würde sich die scheinbare Bewegung der Planeten am Fixsternhimmel, insbesondere ihre zeitweilige Rückläufigkeit, durch Zusammensetzung von gleichförmigen Bewegungen auf Hauptkreisen der Himmelskugel erklären,



die miteinander einen Winkel bilden. Man kommt auf diese Weise zur Durchschnittskurve einer Kugel mit einem sie berührenden Drehzylinder, die dann noch während der Durchlaufung längs der Ekliptik verlagert werden muß, um die beobachtete Bahn wiederzugeben. Die diesbezüglichen klassischen Betrachtungen von Schiapparelli (1874) erscheinen nun dem Verf. viel zu kompliziert, als daß man sie dem Eudoxus zutrauen könnte, der noch keine Trigonometrie zur Verfügung hatte. Er gibt stattdessen eine elementare Herleitung mittels Projektion der zweiten Kreisbahnebene auf die erste, die sehr wohl im Bereich des damals Möglichen liegt und mit größter Wahrscheinlichkeit den von Eudoxus selbst durchgeführten Überlegungen entspricht.

*Hermann Schmidt.*

**Benjamin jr., Francis S.: John of Gmunden and Campanus of Novara.** Osiris 11, 221—246 (1954).

Textausgabe einer Vorlesung, die Johann von Gmunden (gest. 1442) im Jahre 1429 in Wien gehalten hat. Der Traktat behandelt in engstem Anschluß an Campanus von Novara (um 1265) ein Gerät zur Darstellung der wahren Planetenbewegungen nach Ptolemaios mit genauen Herstellungs- und Gebrauchsanweisungen.

*H. I. Hermelink.*

● **Przykowski, Tadeusz: Geschichte des Kopernikusschen Gedankens.** Warszawa: Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej 1954. 114 S. [Polnisch].

**Greene, John C.: Some aspects of American astronomy 1750—1815.** Isis 45, 339—358 (1954).

Verf. berichtet vor allem über die Tätigkeit von J. Winthrop (1714/79) und seine Schule in Harvard (verficht Newtons Anschauungen, Merkur-Vorübergang 1753, Venus-Vorübergang 1761, 1769, Kometen von 1759 und 1769), ferner auf das Wirken von D. Rittenhouse (1732/96) und N. Bowditch (1773/1838). Auch auf die Diskussionen um W. Herschels Vorstellungen vom Bau des Weltalls (seit 1781) wird eingegangen. Begrüßenswert sind die zahlreichen Hinweise auf die (für uns größtenteils unzugängliche) US-Literatur der Kriegs- und ersten Nachkriegsjahre.

*J. E. Hofmann.*

**Segre, Beniamino: Commemorazione del Socio Guido Fubini.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 17, 276—294 (1954).

Mit Schriftenverzeichnis.

**Terracini, Alessandro: Gino Loria. 1862—1954.** Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 88, 387—392 (1954).

## Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Reichenbach, Hans: Nomological statements and admissible operations.** (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1954. 140 p. f 13,50.

Die Diskrepanzen zwischen dem durch die zweiwertige Matrix bestimmten „Wenn ..., so ...“ der mathematischen Logik und dem „Wenn ..., so ...“ der Umgangssprache sind wohl bekannt und viel diskutiert worden. Für ihre Bewertung wird man zu unterscheiden haben zwischen Mathematik und Physik. Der Aufbau der Mathematik wird durch das „Wenn ..., so ...“ der zweiwertigen Matrix so wesentlich vereinfacht wie der Aufbau der projektiven Geometrie durch die Einführung der unendlich fernen Elemente. So erklärt es sich, daß man für diesen Fall sich an die Diskrepanzen gewöhnt hat. Anders in der Physik. Hier wird man mit dem Verf. (der zur Einbürgerung des kritischen „Wenn ..., so ...“ in der Mathematik nicht explizit Stellung nimmt) wünschen dürfen, daß die sinnvollen Implikationen (Verf.: „reasonable implications“) im wesentlichen beschränkt werden auf die Formulierungen von Naturgesetzen („nomological statements“). Beispiel: „Wenn ein metallischer Körper erwärmt wird, so dehnt er sich aus.“

Um eine möglichst exakte Erfassung der nomologischen Implikationen hat der Verf. sich schon einmal bemüht, in seinem Buch, dies. Zbl. 34, 3, ch. VIII. Seine Vorschläge haben eine lebhafte Diskussion ausgelöst. Es hat sich gezeigt, daß das erstrebte Ziel in diesem ersten Anlauf nicht so erreicht worden ist, wie es hatte erreicht werden sollen. Daher der hier vorliegende zweite Versuch.



Eine grundlegende Einsicht verbindet die beiden Bemühungen miteinander. Es ist ein wesentlicher Unterschied, ob die zweiwertige Matrix wie in der mathematischen Logik gleichberechtigt von rechts nach links und von links nach rechts gelesen wird oder nur von rechts nach links. Im ersten Fall spricht der Verf. von einer adjunktiven, im zweiten von einer konnektiven Interpretation der Matrix. Die adjunktive Interpretation ist unter Kontrolle zu halten; denn sie ist wesentlich verantwortlich für die sinnlosen Implikationen. Aufgabe: die konnektiven Implikationen als eine Teilklasse der adjunktiven zu definieren, so daß die Anforderungen der adjunktiven Interpretation nur eine notwendige, aber nicht eine hinreichende Bedingung darstellen für die Verifizierung der entsprechenden konnektiven Interpretation („Wenn  $p$ , so  $q$ “ liefert eine sinnvolle Implikation nur dann, aber nicht stets dann, wenn  $p$  falsch oder  $q$  wahr ist).

Dieses Programm ist aus dem ersten Versuch unverändert übernommen. Das wesentlich Neue liegt in der Durchführung. Aber unter dem Druck der Tatsachen sind so viele Fallunterscheidungen erforderlich geworden und erst recht so viele Definitionen (48 im ganzen; dazu in einem Anhang noch zusätzlich sechs weitere), daß es nicht möglich ist, auf das Detail hier einzugehen. Dies kann nur durch ein entsprechendes Studium erreicht werden. Die angeforderte Mühe ist in jedem Fall von der Größenordnung, daß gefragt werden darf, ob der Gewinn noch in einem angemessenen Verhältnis zu diesem Aufgebot steht.

H. Scholz.

**Skolem, Th.: Ergebnisse der Grundlagenforschung.** 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 273—289 (1954) [Norwegisch].

Diese „kurze Übersicht über die moderne Grundlagenforschung“ berichtet u. a. von den Ansätzen zur Vermeidung der Antinomien der Mengenlehre, von den verschiedenen erkenntnistheoretischen Auffassungen des Platonismus und Intuitionismus sowie dem Formalismus Hilberts und ihrem Verhältnis zueinander im Rahmen einer Formalisierung, schließlich und besonders von der Theorie der rekursiven Funktionen und ihrer Anwendung auf Entscheidungsprobleme.

H. Gericke.

**Köthe, Gottfried: Über die Widerspruchsfreiheit der Mathematik.** Gaz. Mat., Lisboa 15, Nr. 58, 1—5 (1954) [Portugiesisch].

Verf. gibt einen Bericht über die Entwicklung des Problems der Widerspruchsfreiheit. Es werden zunächst die um 1900 aufgetretenen Widersprüche und die Lösungen von Poincaré und Russell dargestellt. Anschließend wird über Brouwer und Hilbert berichtet. Der Bericht schließt mit einer Skizzierung der Ergebnisse von Gödel, Gentzen und Lorenzen.

P. Lorenzen.

**Wang, Hao: The formalization of mathematics.** J. symbolic Logic 19, 241—266 (1954).

Verf. entwickelt in klarer Weise die bekannte Problematik der Analysis, die auf dem Mengenbegriff, dem Überabzählbaren und dem Imprädikativen beruht. Zur Überwindung der aufgezeigten Problematik wird eine konstruktive Theorie angegeben, die nach Art der verzweigten Typenlogik gebildet ist und eine verzweigte Analysis liefert. Der hier vorgeschlagene Aufbau der Mathematik knüpft vor allem an Russell und Weyl an und deckt sich im wesentlichen mit dem konstruktiven Aufbau von P. Lorenzen (dies. Zbl. 42, 10), insbesondere in der Beschränkung der reellen Zahlen auf endliche Schichten. Die Bedeutung der konstruktiven Theorie in Beziehung zu den grundlegenden mathematischen Konzeptionen wird ausführlich diskutiert.

Kurt Schütte.

**Tamari, Dov: Some mutual applications of logic and mathematics.** Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 89—90 (1954).

● **Ackermann, W.: Solvable cases of the decision problem.** (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1954. VIII, 114 p. \$ 3,25.

Das Buch bringt alle bisher vorliegenden wichtigen Lösungen von Spezialfällen des Entscheidungsproblems der Prädikatenlogik 1. und 2. Stufe. Verf. formuliert das Problem auf semantischer Grundlage als Frage nach der Allgemeingültigkeit einer Formel und behandelt auch die schärfere Frage nach den Kardinalzahlen der Bereiche, in denen eine Formel gültig ist. Die Beweise werden systematisch geführt, und zwar möglichst unter Zurückführung auf Gleichheitsformeln oder auf Formeln mit nur einstelligen Prädikaten. Mit dieser einheitlichen Ausrichtung wurden vom Verf. vielfach neue Wege zur Gewinnung der einzelnen Ergebnisse beschritten. Reduktionen des Entscheidungsproblems sind nur so weit durchgeführt, wie sie zu



den dargebotenen Lösungen benötigt werden. In einem allgemeinen Satz, der auf J. Herbrand zurückgeht, bringt Verf. die Gültigkeit einer Formel in Zusammenhang mit einfachen formalen Prozessen, die an der Formel durchzuführen sind. Für diesen Satz gibt Verf. einen einfachen Beweis mit Hilfe eines vom Ref. entwickelten deduktiven Systems unter Benutzung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes. Das letzte Kapitel bringt eine neue Wendung des Entscheidungsproblems, indem Funktionsvariablen statt Prädikatenvariablen verwendet werden. Verf. löst das Entscheidungsproblem des Funktionenkalküls 1. Stufe für die Fälle, in denen die pränexen Normalform entweder nur Allzeichen enthält oder nur Existenzzeichen, wobei im 2. Falle nur einstellige Funktionszeichen zugelassen sind, oder nur ein Existenzzeichen. Das Entscheidungsproblem des Funktionenkalküls kann auf rein existentielle pränexen Normalformen zurückgeführt werden. Der Funktionenkalkül enthält zwar nur Formeln, die den prädikatenlogischen Formeln äquivalent sind, ermöglicht aber eine andere Auswahl lösbarer Spezialfälle, so daß hiermit eine Bereicherung der Ergebnisse erzielt wird.

Kurt Schütte.

**Schütte, Kurt:** Ein widerspruchloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage. Math. Z. **61**, 160—179 (1954).

Verf. gibt einen Aufbau der Analysis in einem typenfreien, aussagenlogisch eingeschränkten System der Logik, wie es von W. Ackermann (dies. Zbl. **50**, 245) und in ähnlicher Weise wie hier von dem Verf. (dies. Zbl. **50**, 244) entwickelt und als konsistent nachgewiesen wurde. Hier erweitert der Verf. ein solches System — es heiße  $\Sigma_0$  — durch Hinzunahme eines fiktiven Beweisbarkeitsbegriffes  $B(\mathfrak{A})$  für Formeln  $\mathfrak{A}$  und einer zugehörigen induktiven Regel derart, daß eine Folge von Systemen  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  entsteht. Die Regel besagt, daß, wenn aus Annahmeformeln  $\mathfrak{A}$  und  $(x) \mathfrak{B}(x)$  in  $\Sigma_{n-1}$  auf eine Formel  $\mathfrak{C}$  geschlossen werden kann, die Formel  $B(\mathfrak{A}) \vee (x) B(\mathfrak{B}(x)) \vee B(\mathfrak{C})$  als Grundformel (= formales Axiom) in  $\Sigma_n$  gilt. [Die Formeln  $\mathfrak{A}$  bzw.  $(x) \mathfrak{B}(x)$  oder beide können auch fehlen; das Fehlen von  $\mathfrak{C}$  würde die Inkonsistenz von  $\Sigma_n$  nach sich ziehen.] Aus so gewonnenen Grundformeln können durch Vertauschungen und Zusammenziehungen von Disjunktionsgliedern, Abschwächungen und unendliche Induktionen weitere Formeln (die  $B$  enthalten) als Sätze in  $\Sigma_n$  abgeleitet werden. Durch eine einfache Überlegung wird die Konsistenz von  $\Sigma_n$  auf die (i. c. von Ackermann und Schütte bewiesene) Konsistenz von  $\Sigma_0$  zurückgeführt. Auch das System  $\Sigma$ , das durch Vereinigung der Systeme  $\Sigma_i$  entsteht, ist konsistent. (Für die unendliche Induktion ergibt sich in  $\Sigma$  eine gewisse Beschränkung.) — Für den Beweisbarkeitsbegriff  $B$  gilt speziell das tertium non datur (t. n. d.):  $B(\mathfrak{A}) \vee \overline{B(\mathfrak{A})}$  und die Deduktionsgleichheit von  $B(\mathfrak{A})$  mit  $\mathfrak{A}$ , aber nicht  $B(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}$ . Eine Formel  $\mathfrak{A}$  heißt ausgezeichnet ( $A(\mathfrak{A})$ ), wenn die Äquivalenzen  $\mathfrak{A} \leftrightarrow B(\mathfrak{A})$  und  $\mathfrak{A} \leftrightarrow A(\mathfrak{A})$  herleitbar sind; Zusammenhänge zwischen diesem Formelprädikat und den logischen Partikeln  $\neg, \vee, \wedge, (x)$ , sowie dem Formelprädikat  $B$  werden hergeleitet. Eine Eigenschaft eines Prädikats heißt logisch progressiv (log. prog.), wenn sie bei Anwendung der logischen Operationen  $\neg, \vee, \wedge, (x)$  erhalten bleibt und sich von  $\mathfrak{P}(t, a)$  auf  $(x) (\mathfrak{P}(x, a))$  überträgt, falls sie zu jedem Term  $t$  in  $\Sigma_n$  für  $\mathfrak{P}(t, a)$  nachweisbar ist. — Für alles Weitere wesentlich ist dann die Einführung von Mengentermen;  $m$  ist ein Mengenterm ( $M(m)$ ) dann und nur dann, wenn  $(x) (A(x \in m))$ . Dadurch wird in Form einer Herleitbarkeitsbedingung erreicht, daß für  $a \in m$  das t. n. d. gilt und die Unterscheidung zwischen  $a \in m$  und  $B(a \in m)$  im Sinne der für das Formelprädikat  $A$  charakteristischen Äquivalenzen entbehrlich wird. Eine Gleichheit für Mengenterme ( $\hat{s} =_{\mu} t$ ) wird durch Rückführung auf die Inklusionsbeziehung, die in üblicher Weise erklärt ist, eingeführt. Für beide genannten Beziehungen gilt das t. n. d.  $\mathfrak{P}(a)$  heißt ein Mengenprädikat, wenn  $M(t) \rightarrow A(\mathfrak{P}(t))$  und  $M(\hat{s}) \wedge M(t) \rightarrow B(\hat{s} =_{\mu} t \rightarrow (\mathfrak{P}(\hat{s}) \leftrightarrow \mathfrak{P}(t)))$  für alle Terme  $\hat{s}$  und  $t$  herleitbar sind. Die Eigenschaft, Mengenprädikat zu sein, ist log. prog. Mit Hilfe des Abstraktionsoperators lassen sich in bekannter Weise Terme für die üblichen Mengenoperationen bilden. Auch die Eigenschaften von Termen, Paarmengen und Mengen von Mengen darzustellen, lassen sich in naheliegender Weise (immer unter Verwendung des Formelprädikats  $B$ ) definieren. Hinsichtlich der Nichtabzählbarkeit der Mengenterme wird folgendes stärkere Resultat bewiesen: Es gibt keinen Funktionsterm  $f(a)$ , der jedem Mengenterm  $t$  einen Mengenterm  $f(t)$  aus  $\Sigma_n$  zuordnet und die Bedingung erfüllt, daß es zu jedem Term  $m$  aus  $\Sigma_n$  einen Term  $\hat{s}$  mit  $m =_{\mu} f(\hat{s})$  gibt. — In § 3 wird in eleganter Weise gezeigt, daß das System  $\Sigma$  jedenfalls die verzweigte Typenlogik — über irgendwelchen gegebenen entscheidbaren Grundprädikaten — enthält. Nach Einführung geeigneter Terme als Ziffern  $0, 0', 0'', \dots$  und Erklärung des Begriffes „berechenbarer Funktionsterm“ werden in einfacher Weise allen Termen Ziffernwerte zugeordnet und danach vermöge dieser Ziffernwerte eine arithmetische Gleichheit ( $\hat{s} =_v t$ ) und Kleinerbeziehung, für die das t. n. d. gilt, eingeführt.

Für die berechenbaren Funktionsterme, die Addition und Multiplikation darstellen, lassen sich die üblichen Gesetze herleiten. Durch eine geeignete Interpretation der Ziffern gelangt man dann auch zu den rationalen Zahlen und mit geeigneten Funktionstermen auch zur Addition und Multiplikation der rationalen Zahlen. In allen diesen Fällen wird eine Sortenbeschränkung vermieden durch die obige Wertzuordnung für alle Terme und Unterscheidung der Funktionsterme etc. (soweit nötig) in den verschiedenen Bereichen. Ein Prädikat  $\mathfrak{P}(a)$  heißt arithmetisch, wenn



für alle Terme  $\bar{s}, t$  die Formel  $\bar{s} = t \rightarrow (\mathfrak{P}(\bar{s}) \leftrightarrow \mathfrak{P}(t))$  herleitbar ist. Die Eigenschaft arithmetisch ist log. prog. und überträgt sich außerdem von  $\mathfrak{P}(a)$  auf  $B(\mathfrak{P}(a))$ . Für arithmetische Prädikate läßt sich in geeigneter Weise die vollständige Induktion formulieren und beweisen. — Die reellen Zahlen werden durch eine Klasseneinteilung der Mengenterme — diese aufgefaßt (gemäß obiger Wertezuordnung und Interpretation der Ziffern) als Mengen von rationalen Zahlen — gewonnen, wobei sich die diese Einteilung bewirkende Äquivalenzrelation  $\bar{s} = t$  als Gleich-

heit zwischen reellen Zahlen (mit t. n. d.) auffassen läßt, und außerdem in einfacher Weise auch Anlaß zu der Definition der Kleinerbeziehung für reelle Zahlen gibt. Vermöge der Erklärungen für die Mengenoperationen, insbesondere Vereinigung und Durchschnitt von Mengen von Mengen, läßt sich hier der Satz von der unteren bzw. oberen Grenze für Terme, die Mengen von reellen Zahlen darstellen, leicht formulieren und beweisen.  $\mathfrak{P}(a)$  heißt ein reelles Prädikat, wenn die Formeln  $M(t) \rightarrow A(\mathfrak{P}(t))$  und  $M(\bar{s}) \wedge M(t) \rightarrow B(\bar{s} = t \rightarrow (\mathfrak{P}(\bar{s}) \leftrightarrow \mathfrak{P}(t)))$  für alle Terme  $\bar{s}$  und  $t$  herleitbar sind. Auch die Eigenschaft, reelles Prädikat zu sein, ist log. prog. Reelle Funktionen werden vermöge Dedekindscher Schnitte mit Hilfe reeller Prädikate in bekannter Weise eingeführt. Abschließend wird am Beweis des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes gezeigt, in welcher Weise durch die Herleitbarkeitsforderungen, die in den Begriff Mengenterm eingehen, das Operieren gegenüber der klassischen Mathematik beschränkt ist. G. H. Müller.

**Cuesta, N.: Deduktive Strukturen.** Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 14, 104—117 (1954) [Spanisch].

Eine topologische Theorie der Deduktion auf Grund der Bemerkung, daß die Bildung der Menge  $X\varphi$  aller aus der Aussagenmenge  $X$  ableitbaren Aussagen eine Art Hüllenoperation ist.

Genauer: Ist  $P$  eine Menge von Aussagen,  $X$  eine Untermenge,  $X\varphi$  die Menge aller aus  $X$  ableitbaren Aussagen, so genügt die Operation  $\varphi$  den Axiomen: (I)  $X \subseteq X\varphi$ , (II) Aus  $X \subseteq Y$  folgt  $X\varphi \subseteq Y\varphi$ . (III)  $0\varphi = 0$  ( $0$ : die leere Menge). Umgekehrt heißt eine topologische Struktur  $(P, \varphi)$ , welche I—III erfüllt, eine deduktive Struktur. Iteration von  $\varphi$  wird mit  $X\varphi_2$  usw. bezeichnet. Es wird angenommen, daß es eine Ordinalzahl  $\alpha$  mit  $X\varphi_{\alpha+1} \equiv X\varphi_\alpha$  gibt.  $\varphi_\alpha = \bar{\varphi}$  definiert eine neue Operation mit I—III und (IV)  $(X\bar{\varphi})\bar{\varphi} = X\bar{\varphi}$ .  $C \equiv X\bar{\varphi}$  heißt eine mathematische Disziplin (ciencia matemática),  $X$  eine Basis von  $C$ .  $X$  ist durch  $C$  nicht eindeutig bestimmt. Eine Aussage  $q$  heißt Postulat, wenn  $q \in X$ ,  $q \notin (X - q)\bar{\varphi}$ . Als Beispiel Satz 4: Ist  $B$  eine irreduzible Basis von  $C$ , so ist jede Aussage von  $B$  ein Postulat. — Spezielle deduktive Strukturen: (§ 2) Ded. Str. mit Verboten. Ein System  $\varrho$  von Untermengen  $R$  von  $P$  wird als „verboten“ bezeichnet (in der Anwendung z. B. solche Mengen  $R$ , welche eine Aussage und ihre Negation enthalten). Eine Untermenge  $A \subseteq P$  heißt absurd, wenn es ein  $R \subseteq \varrho$  gibt mit  $R \subseteq A\bar{\varphi}$ . — (§ 3) Ded. Str. mit Bewertung: Eine Untermenge  $W$  von  $P$  mit der Eigenschaft  $W\bar{\varphi} \equiv W$  wird als die Menge der „wahren Aussagen“ ausgezeichnet. — (§ 4): Bewertete ded. Str. mit Negation: Die Aussagen werden zu Paaren „entgegengesetzter“ zusammengefaßt. Nun lassen sich der Satz vom Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten formulieren und einige Aussagen darüber herleiten. H. Gericke.

**Machara, Shōji: Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der klassischen.** Nagoya math. J. 7, 45—64 (1954).

Sei BLK die folgende Erweiterung des Gentzenschen Kalküls LK (Gentzen, dies. Zbl. 10, 145, 146): (1) Mit  $\mathfrak{A}$  sei auch Bew  $\mathfrak{A}$  eine Formel. (2) Zu den Schemata von Gentzen l. c. treten hinzu die Schemata

$$\text{I} \quad \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \text{Bew } \mathfrak{A}} \quad \text{II} \quad \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\text{Bew } \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta},$$

wobei in I  $\Gamma$  leer sein kann oder eine Reihe von Formeln mit Bew als äußerstem Zeichen darstellt. Wenn  $\mathfrak{A}$  eine Formel des Prädikatenkalküls ist, dann soll  $\mathfrak{A}^b$  die Formel bezeichnen, die aus  $\mathfrak{A}$  dadurch hervorgeht, daß jede Teilformel  $\mathfrak{Z}$  von  $\mathfrak{A}$  durch  $\text{Bew } \mathfrak{Z}$  ersetzt wird. (Für eine Primformel  $\mathfrak{P}$  setze man  $\mathfrak{P}^b = \text{Bew } \mathfrak{P}$ , ferner  $(\neg \mathfrak{Z})^b = \text{Bew } (\neg \mathfrak{Z}^b)$  usw.) Verf. beweist als Hauptergebnis seiner Arbeit: (S) Eine Formel  $\mathfrak{A}$  ist dann und nur dann in dem intuitionistischen Kalkül LJ von Gentzen (l. c.) herleitbar, wenn  $\mathfrak{A}^b$  in BLK herleitbar ist. — Abgesehen von einer Arbeit von S. Kuroda, die im Folgenden nicht gebraucht wird, zitiert der Verf. nur Gentzen's oben genannte Arbeit und führt seinen Beweis im Gentzenschen System. [Gentzen's „Hauptsatz“ wird auch bei Hinzutreten der Schemata (2) als gültig erwiesen und für den Beweis von (S) benützt.] Der Beweis würde sich bei Verwendung der Schlußweisenkalküle von K. Schütte (dies. Zbl. 36, 148) sicher bedeutend vereinfachen



und durchsichtiger gestalten lassen. Ferner muß auf K. Gödel, dies. Zbl. 7, 193, 2. Arbeit, hingewiesen werden, in der für den Aussagenkalkül ein ähnliches Ergebnis (ohne Beweis) angegeben wurde. Schließlich sind in den letzten 20 Jahren mannigfache Betrachtungen über die Zusammenhänge zwischen klassischer und intuitionistischer Logik erschienen, so daß ein Hinweis auf die darin enthaltenen verwandten Ergebnisse nicht unangebracht gewesen wäre.

G. H. Müller.

Martin, Norman M.: Note on the completeness of decision element sets. J. comput. Systems 1, 220 (1954).

Vaught, Robert L.: Application of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 467—472 (1954).

Gödel's completeness theorem and the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem on the existence of models of any infinite power are applied to deduce for consistent theories with standard formalization, having only infinite models determined (up to isomorphism) by their cardinal, that they are complete, and if axiomatizable also decidable. For the definition of terms etc. one is referred to A. Tarski, A. Mostowski and R. M. Robinson, Undecidable theories, Amsterdam 1953, sections I.2 and I.3 As examples of application the wellknown completeness and decidability of the elementary theories of 1. densely ordered sets, 2. atomless Boolean algebras, 3. infinite Abelian groups with all elements  $\neq 0$  of a given prime order, 4. infinitely divisible torsion-free Abelian groups, and 5. algebraically closed fields of given characteristic, are established by this uniform method.

D. Tamari.

Collins, George E.: Distributivity and an axiom of choice. J. symbolic Logic 19, 275—277 (1954).

Mit „ $Q$ “ für „W. V. Quine, dies. Zbl. 44, 247“ und „ $\cap$ “ und „ $\cup$ “ für „Durchschnitt“ und „Vereinigung“ wird gezeigt, daß das stratifizierte Auswahlaxiom

$$(1) \quad \forall w (\bigwedge \phi \in w \rightarrow \exists \Phi \forall x (x \in w \rightarrow \Phi(x) \subseteq x \wedge \overline{\Phi(x)} = 1))$$

[d. h. die übliche Auswahlfunktion  $\varphi$  mit  $\varphi(x) \in x$  ist durch  $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$  ersetzt] äquivalent ist in  $Q$  mit dem allgemeinsten distributiven Gesetz für Mengen [folglich in üblicher mengentheoretischer Symbolisierung mit

$$(2) \quad \forall w \left( \bigcap_{x \in w} \bigcup_{z \in x} z = \bigcup_{\Phi} \bigcap_{x \in w} \Phi(x) \right),$$

wo bei  $\bigcup_{\Phi}$  über alle  $\Phi$  mit der Bedingung für  $\Phi$  in (1) zu summieren ist].

H. Scholz.

Anderson, Alan Ross: On alternative formulations of a modal system of Feys-von Wright. J. comput. Systems 1, 211—212 (1954).

The author gives a system  $R$  which is equivalent to von Wright's system  $M$  (which Sobociński has shown to be equivalent to Feys' system  $t$ ) and uses only modus ponens and substitution as rules of inference.  $R$  contains infinitely many axioms and the author conjectures that it is not possible to find an equivalent system with the same rules of inference and only a finite number of axioms.

J. C. Shepherdson.

Fraïssé, Roland: Sur les rapports entre la théorie des relations et la sémantique au sens de A. Tarski. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 85 (1954).

Skolem, Th.: Some considerations concerning recursive arithmetic. Bull. Soc. math. Belgique 6, 35—46 (1954).

The author first gives a fairly simple example of a recursively enumerable but non-recursive class. He then gives a simplification in Kalmar's definition of the class  $E$  of elementary functions, viz. that the starting functions  $|x - y|$  and  $[x/y]$  can be replaced by  $x \dot{-} y$  and that the product operation is superfluous if  $x^y$  is



added as a starting function. [This has also been proved by Grzegoreczyk, *Rozprawy mat.* 4, 46 p. (1953) p. 19.] He goes on to consider the still simpler class  $H$  consisting of all functions that can be generated from the basic functions  $1$ ,  $x + y$ ,  $xy$ ,  $x \div y$  by the use of substitution and summation alone. ( $H$  is contained in, and possibly equal to, Grzegoreczyk's class  $\mathcal{L}^2$  consisting of all functions generated from  $x + 1$ ,  $x$ ,  $y$  [as functions of  $(x, y)$ ],  $(x + 1) \cdot (y + 1)$  by the operations of substitution and limited recursion — see op. cit. pp. 29 et seq.). He proves that if  $f(x, y, z \dots) \in H$  then there exists a polynomial  $P(t)$  such that  $f(x, y, z) < P(\max(x, y, \dots))$ . Hence  $x^y \in H$ . However  $z = x^y$ , and many other equations between functions belonging to  $E$  but not to  $H$ , can be expressed in the form  $\varphi(x, y, z) = 0$  where  $\varphi \in H$ .  
J. C. Shepherdson.

**Markov, A. A.:** Über die Stetigkeit konstruktiver Funktionen. *Uspechi mat. Nauk* 9, Nr. 3 (61), 226—230 (1954) [Russisch].

A computable real number is defined as the limit of a (general) recursive sequence  $\{\varphi(n)\}$  of rationals satisfying the condition  $(m)(n)(m \geq n \supset |\varphi(m) - \varphi(n)| \leq 2^{-m})$ . A computable function  $F$  of real numbers is a function for which there exists a recursive function  $f$  such that if  $e$  is a Gödel number of a sequence for  $X$  then  $f(e)$  is a Gödel number of a sequence for  $F(X)$ . A computable sequence of real numbers  $\{X_i\}$  is given by a sequence of sequences  $\{\varphi_i(n)\}$  of rationals for which there is a recursive function  $g$  such that  $g(i)$  is a Gödel number of  $\varphi_i$ . Such a sequence is said to have  $X$  as a constructive point of accumulation if there exists a recursive function  $\xi$  such that  $(n)(|X_{\xi(n)} - X| \leq 2^{-n})$ . The main result is that every computable function  $F$  has a weak sort of continuity, viz. that if  $\{X_i\}$  is a sequence which has  $X$  as a constructive point of accumulation and if  $F(X)$ ,  $F(X_i)$  are all defined then  $\{F(X_i)\}$  has  $F(X)$  as a constructive point of accumulation. From this follows a result stated earlier by Livenson, viz. that a computable function cannot take just two values on a closed interval. This leads to the result that a computable function takes all (computable) values between any two of its values.

J. C. Shepherdson.

**Dekker, J. C. E.:** A theorem on hypersimple sets. *Proc. Amer. math. Soc.* 5, 791—796 (1954).

In his discussion of the problem of whether there exist two recursively enumerable sets whose decision problems are not reducible to each other, Post [*Bull. Amer. math. Soc.* 50, 284—316 (1944)] defined a class of sets which he called hypersimple sets and proved that no creative set is reducible to a hypersimple set by truth tables. He left open the question of whether a creative set could be Turing reducible to a hypersimple set. Dekker settles this question affirmatively; by an elegant construction he proves the stronger result that if  $\alpha$  is any recursively enumerable but not recursive set then a hypersimple set  $\beta$  can effectively be found such that  $\alpha$  and  $\beta$  are Turing reducible to each other.

J. C. Shepherdson.

**Discussion générale. I. Discussion sur divers thèmes.** Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 157—158 (1954).

**Discussion générale. II. La logique et les mathématiques.** Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 159—162 (1954).

**Discussion générale. III. La logique et la physique.** Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 163—172 (1954).

**Freire, Luiz:** Des rapports entre le langage et les mathématiques. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 153—154 (1954).

**Vuysje, D.:** L'importance du point de départ psycho-linguistique aux sciences non mathématiques. Collection de Logique mathématique, Sér. A V.: Appl. sci. Logique math. 1952, 155—156 (1954).



Pezzo, Gaetano del: Il tempo nella scienza e nella filosofia. Giorn. Mat. Battaglini, 82 (V. Ser. 2), 405—412 (1954).

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

• Černikov, S. N.: Positive und negative Lösungen von Systemen linearer Ungleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 913—916 (1954) [Russisch].

Eine Lösung  $x^0$  des Systems  $(*) \sum_{v=1}^n a_{jv} x_v - a_j \leq 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) heißt nicht-negativ, positiv, stark positiv bezüglich der Teilmenge der Unbekannten  $x_{k_1}, \dots, x_{k_l}$ , wenn für  $i = 1, \dots, l$  gilt  $x_{k_i}^0 \geq 0$ ,  $x_{k_i}^0 > 0$  und  $\sum_{i=1}^l x_{k_i}^0 > 0$ ,  $x_{k_i}^0 > 0$  beziehungsweise. Entsprechend wird nicht-positiv, negativ, stark negativ definiert. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für alle diese Fälle aufgestellt und Anweisungen zur Herstellung solcher Lösungen hergeleitet. — Zusammen mit einem Minor  $\Delta$  der Matrix  $A = (a_{jk})$  des Systems  $(*)$  betrachtet man die „begleitenden Minoren“  $\Delta'$ , deren Matrizen aus der Matrix von  $\Delta$  hervorgehen, indem man sie auf irgendeine Weise mit Elementen aus Zeilen und Spalten von  $A$  oder mit entsprechenden Elementen der Spalte der freien Glieder  $a_j$  rändert. Der Minor  $\Delta$  heißt ein Knotenminor, wenn alle Verhältnisse  $\Delta'/\Delta \geq 0$  ausfallen (cf. Černikov, dies. Zbl. 50, 12). Der Knotenminor  $\Delta$  heißt nicht-negativ orientiert bezüglich  $x_k$ , wenn entweder keiner der Koeffizienten von  $x_k$  in  $(*)$  unter den Elementen der Matrix von  $\Delta$  vorkommt oder das Verhältnis  $\Delta_k/\Delta \geq 0$  ist, wobei  $\Delta_k$  aus  $\Delta$  hervorgeht, indem man in  $\Delta$  die Elemente der  $k$ -ten Spalte (von  $A$ ) durch die entsprechenden  $a_j$  ersetzt. Typisch ist der folgende Satz: Eine Lösung von  $(*)$  ist nicht-positiv bezüglich der Unbekannten  $x_{k_1}, \dots, x_{k_l}$  ( $0 \leq l \leq n$ ) und nicht-negativ bez.  $x_{p_1}, \dots, x_{p_t}$  dann und nur dann, wenn (1) alle freien Glieder  $a_j \geq 0$  sind und (2) wenigstens einer der Minoren von  $A$  ein Knotenminor ist, nicht-positiv orientiert bez. der  $x_{k_i}$ , nicht negativ orientiert bez. der  $x_{p_j}$ . Beweise werden nicht mitgeteilt.

H. Schwerdtfeger.

Dias Agudo, Fernando Roldão: Über die charakteristische Gleichung einer Matrix. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 87—132 und engl. Zusammenfassg. 133—136 (1954) [Portugiesisch].

L'A. semplifica e completa un metodo dato da Fettiis per il calcolo del polinomio caratteristico di una matrice, e dà varie applicazioni del metodo così completato. Mostra anzitutto (su un esempio nel quale la matrice è simmetrica, e quindi le radici caratteristiche sono reali) come si ottenga un notevole vantaggio per il calcolo di un limite superiore dei moduli delle radici caratteristiche, e per la valutazione approssimata della radice di massimo modulo. Determina alcune condizioni perchè due matrici abbiano la stessa equazione caratteristica. Studia il modo di calcolare la matrice diagonalizzatrice. Applica poi il metodo esposto al calcolo del determinante  $|Q_0 \lambda^m - Q_1 \lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m Q_m|$  ( $Q_i$  matrici quadrate), il quale, se è  $|Q_0| \neq 0$ , è eguale, come è noto, a  $|Q_0| |\lambda I - A|$ , essendo  $I$  la matrice unità e  $A$  una opportuna matrice formata con le  $Q_i$ ; e dà alcune indicazioni anche per il caso  $|Q_0| = 0$ . Caratterizza infine, mediante proprietà della equazione caratteristica, le matrici Hermitiane e semi-Hermitiane.

F. Cecioni.

Mitchell, B. E.: Unitary multiples of a matrix. Amer. math. Monthly 61, 610—613 (1954).

Verf. stellt kurze Beweise für die Existenz und Einzigkeit der Normalformen zusammen, auf welche man eine komplexe  $n \times n$ -Matrix durch Linksmultiplikation mit einer unitären oder einer nichtsingulären Matrix bringen kann, sowie für die



simultane Transformierbarkeit paarweise vertauschbarer Matrizen auf die Dreiecksform. *H. Wielandt.*

Murnaghan, Francis D.: On the unitary invariants of a square matrix. *Anais Acad. Brasil. Ci.* **26**, 1—7 (1954).

Consideration is given to the problem of unitary equivalence of matrices in which the characteristic roots are all distinct. If the dimension is 2, invariants of  $A$  are obtained by transforming  $A$  to triangular form  $\begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ . A complete set of invariants is  $a_1, a_2, a_{12} a_{12}^*$ . Actually the complications of the problem only begin to arise for matrices of much higher dimension. Instructive examples are given, and the problem of finding a complete set of rational invariants is raised. For one discussion of this general problem, see J. L. Brenner, this Zbl. **45**, 297, where an even more general problem is also solved. *J. L. Brenner.*

Hall, Marshall and H. J. Ryser: Normal completions of incidence matrices. *Amer. J. Math.* **76**, 581—589 (1954).

Werden  $v$  verschiedene Elemente auf  $r$  Mengen ( $0 \leq \lambda \leq k \leq v$ ) verteilt, so daß jede Menge  $k$  verschiedene Elemente und je 2 Mengen  $\lambda = k(k-1):(v-1)$  gemeinsame Elemente haben („symmetrical balanced incomplete blockdesign“) und im Falle  $\lambda = 1$  „endliche ebene projektive Geometrie“) und ist  $A$  die Incidenzmatrix dieses Systems, so gilt:  $AA^T = A^T A = B = (k-\lambda)I + \lambda S$ , wobei  $S$  die nur aus Einsen bestehende Matrix ist. Es handelt sich darum,  $A$  für gegebenes  $B$  zu bestimmen. Unter der weiteren Voraussetzung, daß  $B$  über dem rationalen Zahlkörper  $R$  zu  $I$  kongruent ist, wird bewiesen: 1. Es gibt  $C$  über  $R$  mit  $CC^T = C^T C = B$ . 2. Ist  $A_1$  eine nur aus Ziffern 0 und 1 zusammengesetzte  $r \times v$ -Matrix mit  $A_1 A_1^T = B_1$  (Ausschnitt der  $r$  ersten Zeilen und Spalten von  $B$ ), so kann man  $A_1$  zu einer Matrix  $A$  ergänzen, so daß  $AA^T = A^T A = B$  wird. Es wird dann die Möglichkeit von Lösungen  $A$  diskutiert, bei denen  $A$  ganzzahlig, insbesondere eine Incidenzmatrix ist. *F. W. Levi.*

Egerváry, E.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. *Acta Sci. math.* **15**, 211—222 (1954).

Es werden zwei Sätze über sog. Hypermatrizen  $(A_{ij})$  bewiesen, deren Blockmatrizen  $A_{ij}$  paarweise kommutabel sind, nämlich über Determinanten und Adjungierte sowie über die Spektralzerlegung solcher Matrizen. Die Sätze lauten:

$$\Delta(\det(A_{ij})) = \det(\text{Det}(A_{ij})), \quad \text{adj}(A_{ij}) = \text{Adj}(A_{ij}) \cdot \text{adj}[\text{Det}(A_{ij})] \times E_n,$$

wo  $\text{Det}(A_{ij}) = \sum A_{11} A_{22} \dots A_{nn}$  und wo  $\text{Adj}(A_{ij})$  eine Hypermatrix bezeichnet, deren Blocks in der gleichen Weise von den Blocks  $A_{ij}$  abhängen, wie die Elemente einer gewöhnlichen Adjungierten von den Matrixelementen. Es bezeichnet ferner  $A \cdot B = (A_{ij} b_{ij})$  mit  $B = (b_{ij})$  das sog. direkte Produkt; also  $A \cdot E_n$  mit der  $n$ -reihigen Einheitsmatrix  $E_n$  die Hyperdiagonalmatrix mit den  $n$  Diagonallblocks  $A_{ii} = B_{ii}$  ist  $A$   $m$ -reihig hermitisch mit den charakteristischen Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  und sind  $f_{ij}(x)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) beliebige Polynome mit  $f_{ij}(x) = f_{ji}(x)$ , so ist die spektrale Zerlegung der Hypermatrix  $(A_{ij})$  mit den Blocks  $A_{ij} = f_{ij}(A)$  gegeben durch

$$(A_{ij}) = T^* \langle \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}, \dots, \lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn} \rangle T, \quad T^* T = E_n,$$

wo die charakteristischen Zahlen  $\lambda_{ij}$  und die Faktoren der Transformationsmatrix

$$T = \langle U, U, \dots, U \rangle P \langle V_1 V_2, \dots, V_n \rangle$$

durch die Spektralzerlegungen gefunden werden:

$$A = U \langle a_1, \dots, a_m \rangle U^*, \quad (f_{ij}(a_k)) = V_k \langle \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kn} \rangle V_k^*$$

und wo die Permutationsmatrix  $P$  die Folge  $(11) (12) \dots (1m) (21) \dots (2m) \dots (n1) \dots (nm)$  transformiert in der Folge  $(11) (21) \dots (n1) (12) \dots (n2) \dots (1m) \dots (nm)$ .  $T^*$  ist die konjugiert Transponierte von  $T$ . Die Eigenvektoren von  $(A_{ij})$  sind dann die Spalten von  $T$ . Der Satz B hat als Corollar: Die charakteristischen Zahlen von  $A \cdot B$  sind die Produkte  $a_i b_j$ , der charakteristischen Zahlen von  $A$  und  $B$ , und die Eigenvektoren  $A \cdot B$  sind die direkten Produkte  $u_i \cdot v_j$  der Eigenvektoren von  $A$  und  $B$ . *R. Zurmühl.*

Koschmieder, Lothar: Sui determinanti ortosimmetrici di funzioni trigonometriche e iperboliche. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. **9**, 266—270 (1954).

L'A. prova che per  $m \geq 3$  sia il determinante

$$\det \|c_{ij}\|, \quad (c_{ij} = \sin[\alpha + (i+j-2)\beta]x; \quad i, j = 1, \dots, m),$$



che l'altro ottenuto da questo cambiando sen in cos sono nulli ed hanno caratteristica due. *G. Sansone.*

**Orsinger, Heinz:** Resultantensysteme und algebraische Relationen. Math. Nachr. **12**, 209—248 (1954).

Die erste Hälfte der Arbeit gibt im wesentlichen eine Zusammenstellung und modifizierte Beweise bekannter Sätze in bezug auf die Mertenssche Resultante. Verf. geht dabei von der Resultantendefinition des Ref. aus und zeigt dann in der zweiten Hälfte der Arbeit, wie man von da aus das Problem von  $r$  Formen  $y_\varrho$  in  $n$  Variablen  $x_i$  auch für  $r > n$  behandeln kann. Im Fall  $r = n + 1$  seien  $y_\varrho = y_\varrho(x_1, \dots, x_n)$  für  $\varrho = 1, 2, \dots, n + 1$  die  $n + 1$  Formen mit Unbestimmten  $a$  über einem Grundkörper  $k$  als Koeffizienten, und sei  $g_\varrho$  der Grad von  $y_\varrho$ . Ergänzt man  $y_\varrho$  unter Hinzunahme einer neuen Variablen  $x_{n+1}$  und neuer Unbestimmten  $a_{\varrho, n+1}$  zu  $\bar{y}_\varrho$

$y_\varrho + a_{\varrho, n+1} x_{n+1}^{g_\varrho}$ , so ist die Resultante  $R(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n+1}) = R(x_1, \dots, x_{n+1})$  ein Polynom der

$a_{\varrho, n+1}$ :  $R = R(a_{1, n+1}, \dots, a_{n+1, n+1})$ , dessen Koeffizienten Polynome der alten Unbestimmten  $a$  sind. Es wird gezeigt, daß das Verschwinden all dieser Koeffizienten bei einer Spezialisierung  $a \rightarrow a^*$  notwendig und hinreichend dafür ist, daß das spezialisierte Gleichungssystem  $y_\varrho = 0$  eine nicht triviale Lösung hat. Die Koeffizienten von  $R(a_{1, n+1}, \dots, a_{n+1, n+1})$  bilden also ein Resultantensystem im Sinn von van der Waerden. Verf. nennt deshalb  $R$  die Resultante der  $n + 1$  Formen  $y_\varrho$  und zeigt dann, daß  $R$  die  $d$ -te Potenz eines irreduzibeln Polynoms  $R_1 = R_1(a_{1, n+1}, \dots, a_{n+1, n+1})$  ist, wobei  $d$  den g. g. Teiler der  $n + 1$  Gradzahlen  $g_\varrho$  bedeutet. Aus  $R_1$  läßt sich dann in einfacher Weise die irreduzible Gleichung für  $x_i$  als Funktion der  $\bar{y}_\varrho$  gewinnen; sie ist z. B. für  $x_{n+1}$  einfach diese:

$$R_1(a_{1, n+1} - \bar{y}_1/x_{n+1}^{g_1}, \dots, a_{n+1, n+1} - \bar{y}_{n+1}/x_{n+1}^{g_{n+1}}) = 0.$$

Von da aus gelangt Verf. auch zu der zwischen den Formen  $y_\varrho$  bestehenden Abhängigkeit von Minimalgewicht in bezug auf die  $x_\nu$ ; sie lautet einfach so:  $R_1(-y_1, \dots, -y_{n+1}) = 0$ . Aus dieser Erkenntnis heraus wird sodann die gelegentlich vom Ref. geäußerte Vermutung bestätigt, daß die Koeffizienten dieser Abhängigkeit ein Resultantensystem bilden. Ähnlich wird auch der Fall  $r > n + 1$  behandelt, indem jetzt  $\bar{y}_\varrho = y_\varrho + a_{\varrho, n+1} x_{n+1}^{g_\varrho} + \dots + a_{\varrho, r} x_r^{g_\varrho}$  für  $\varrho = 1, \dots, r$  gesetzt und dann die Resultante

$$R(y_1, \dots, y_r) = R(x_1, \dots, x_r) = R(a_{1, n+1}, \dots, a_{1, r}, \dots, a_{r, n+1}, \dots, a_{r, r})$$

gebildet wird, die diesmal die  $d$ -te Potenz eines Polynoms  $R_1$  wird, aus dem wieder die Gleichung für  $x_i$  als Funktion der  $\bar{y}_\varrho$  entsprechend wie vorher gewonnen wird. Doch braucht diese im Gegensatz zum Fall  $r = n + 1$  nicht mehr irreduzibel zu sein, sondern kann eine höhere Potenz sein; das hängt vom Grundkörper  $k$  ab. Auch bestimmte Abhängigkeiten zwischen den Formen  $y_\varrho$  werden auf diese Weise erhalten. Ferner ergibt sich dabei der Satz, daß der Grad des Oberkörpers  $k(a, x_1, \dots, x_n)$  über  $k(a, y_1, \dots, y_r)$  für  $r > n$  gleich dem g. g. Teiler von  $g_1, \dots, g_r$  ist (während er für  $r = n$  bekanntlich gleich dem Produkt  $g_1 \cdots g_n$  ist), und zwar ganz allgemein ohne die bei einem früheren Beweis des Verf. (dies. Zbl. **42**, 252) nötigen Einschränkungen in bezug auf die Charakteristik des Körpers  $k$ . *O. Perron.*

**Witt, Ernst:** Über eine Invariante quadratischer Formen mod 2. J. reine angew. Math. **193**, 119—120 (1954).

Die von C. Arf (dies. Zbl. **25**, 14) angegebene Invariante einer quadratischen Form  $f = \sum_i a_i x_i^2 + \sum_{i < k} a_{ik} x_i x_k$  mit  $\det [a_{ik}] \neq 0$ ,  $a_{ik} = a_{ki}$  in einem Körper  $K$  der Charakteristik 2 ist eine Restklasse 1 mod dem durch alle  $x^2 = x$  mit  $x \in K$  erzeugten Modul  $\mathfrak{p}$ . Verf. gibt eine neue Definition von 1 als Polynom in den  $a_i, a_{ik}$  mit vereinfachtem Invarianzbeweis. *M. Eichler.*



Klingenberg, Wilhelm und Ernst Witt: Über die Arfsche Invariante quadratischer Formen mod 2. J. reine angew. Math. 193, 121—122 (1954).

Vgl. das vorhergehende Referat. Verf. schreiben die quadratische Form in der Gestalt  $f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$  ohne die Bedingung  $a_{ik} = a_{ki}$ . Die Matrix  $A = (a_{ik})$  ist dann durch die Form nicht eindeutig gegeben, jedoch ist stets die Normalform  $A = \begin{pmatrix} p & e \\ 0 & q \end{pmatrix}$  möglich, wo  $e$  die Einheitsmatrix und  $p$  und  $q$  symmetrische Matrizen bedeuten. Die Arfsche Invariante ist jetzt die Spur  $\text{Sp}(pq) \bmod p$ .

M. Eichler.

Kueser, Martin: Bestimmung des Zentrums der Cliffordschen Algebren einer quadratischen Form über einem Körper der Charakteristik 2. J. reine angew. Math. 193, 123—125 (1954).

Eine dritte Deutung der Arfschen Invariante: s. die beiden vorhergehenden Referate. Die (erste) Cliffordsche Algebra des der quadratischen Form zugeordneten metrischen Raumes wird erzeugt durch die formal erklärten Produkte von Vektoren: die Produkte von geraden Anzahlen von Vektoren bilden eine Teilalgebra, welche Ref. als zweite Cliffordsche Algebra bezeichnet hat (M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin 1952, S. 22). Verf. zeigt: das Zentrum der zweiten Cliffordschen Algebra ist der Restklassenring  $k[x]/(x^2 - x - 1)$ , wo  $A$  die Arfsche Invariante ist. Das Zentrum der ersten Cliffordschen Algebra ist der Grundkörper.

M. Eichler.

Sokolov, N. P.: Über die Invarianten der ternären kubischen Formen über dem Körper der reellen Zahlen. Ukrain. mat. Žurn. 6, 282—294 (1954) [Russisch].

Let  $f = \sum A_{ijk} x_i x_j x_k$  be a cubic ternary form with  $36 F = 36 \sum A_{ijk}^* x_i x_j x_k$  as its Hessian. By means of cubic determinants the author obtains expressions

$$C_{jk}^{(\mu\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} (A_{j\mu_1\nu_1} A_{k\mu_2\nu_2} + A_{j\mu_2\nu_2} A_{k\mu_1\nu_1} - A_{j\mu_1\nu_2} A_{k\mu_2\nu_1} - A_{j\mu_2\nu_1} A_{k\mu_1\nu_2})$$

where  $\mu, \mu_1 < \mu_2$  and also  $\nu, \nu_1 < \nu_2$  are permutations of 1, 2, 3. If the second  $A_{pqr}$  in each product of the above expression is replaced by  $A_{pqr}^*$  we have  $K_{jk}^{(\mu\nu)}$ . The author forms the matrices  $C_k = (C_{jk}^{(\mu\nu)})$ ,  $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ ;  $C^{(\mu\nu)} = [C_k^{(\mu\nu)}]$ ,  $(j, k = 1, 2, 3)$ ;  $C' = C^{(12)}$ ,  $C'' = C^{(21)}$ ,  $K$  and  $K'$  are similarly obtained. All the components of  $K$  are given in the final section. If  $\sigma_{jk} = \text{trace}(C'_{jk} C^{(\mu\nu)})$  and  $\tau_{jk} = \text{trace}(K'_{jk} C^{(\mu\nu)})$  then  $S = \sigma_{jj} = 2\sigma_{jk}$  ( $j = k$ ) and  $T = \frac{1}{2}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$  are the relative invariants, of weights 4 and 6 respectively, obtained by Aronhold [J. reine angew. Math. 55, 97—191 (1858)]. The author defines  $\omega(T) = 1, -1, 0$  as  $T > 0$ ,  $T = 0$ ,  $T < 0$  and also defines  $L = T C' - S K$ . He shows that  $\omega(T)$  and the rank and signature of  $C$ ,  $K$  and  $L$  are invariant for all real non-singular transformations of  $f$ .

F. W. Ponting.

Sokolov, N. P.: Projektive Klassifikation der ternären kubischen Formen im Reellen. Ukrain. mat. Žurn. 6, 405—417 (1954) [Russisch].

The author obtains the canonical forms of ternary cubic forms for real non-singular linear transformations. He gives the matrices  $C$ ,  $K$  and  $L$  and evaluates  $S$ ,  $T$  and  $\omega(T)$  for these forms, see the preceding abstract of the author's earlier paper. Let  $I = (S^3 - T^2)/T^2$ . Then ternary cubics may be classified as follows. Either (a)  $I = +\infty$  or  $I = -\infty$ , (b)  $I$  has a finite value, (c)  $I$  is of the form  $0/0$ . If (b) holds then the value of  $\omega(T)$  is needed and, if  $I = 0$ , the rank of  $L$ ; if this rank is 2 then the signature of  $L$  is also required. If (c) holds then the rank of the form is needed and, if this is greater than unity, the rank of  $C$ ; if the rank of  $C$  is 2 then the signature of  $C$  is also required. Two forms are equivalent if, and only if, their corresponding invariants (as required above) are equal.

F. W. Ponting.

Iseki, Kanesiroo: On the fundamental theorem of algebra. J. math. Soc. Japan 6, 129—130 (1954).



L'A. déduit du théorème de Gelfand-Mazur le fait que le corps des nombres complexes est algébriquement clos. *J. Dixmier.*

● Šafarevič, I. R.: Über die Lösung der Gleichungen höheren Grades. (Die Sturmsche Methode.) (Populäre Vorlesungen über Mathematik. Heft 15.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 24 S. R. 0,40 [Russisch].

Für Leser mit geringen Vorkenntnissen verständliche Herleitung von Schranken für den absoluten Betrag der Wurzeln eines Polynoms und Beweis des Sturmschen Satzes über die Anzahl der reellen Wurzeln innerhalb eines gegebenen Intervalls.

*R. Kochendörffer.*

Cowling, V. F. and W. J. Thron: Zero-free regions of polynomials. Amer. math. Monthly **61**, 682—687 (1954).

Let  $P(z) = a_0 + a_1 z^{\lambda_1} + \dots + a_n z^{\lambda_n}$ , where  $a_i \neq 0$ , the  $\lambda_i$  are positive integers such that  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , and the integers  $r_i$  are such that  $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ . Then  $P(z)$  assumes all its zeros for  $|z| \leq \max\{[(1+r_{i-1})r_{i-1}a_{i-1}a_i]^{1/\alpha_i}\}$ , where  $r_0 = 0$ ,  $r_n = 1$ , and the remaining  $r_i$  are arbitrary positive numbers.

*E. Frank.*

Ballieu, Robert: Factorisation des polynomes cyclotomiques modulo un nombre premier. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **68**, 140—144 (1954).

The well-known theorem is proved: The cyclotomic polynomial of  $x^m - 1$  consists mod  $p$  ( $p \nmid m$ ) of irreducible factors, all of degree  $r$ , where  $p$  belongs to the exponent  $r \bmod m$ . — The proof starts with the definition and makes use of familiar algebraic arguments. The case  $p|m$  is also considered.

*W. Verdenius.*

## Gruppentheorie:

Ljapin, E. S.: Halbgruppen, in deren sämtlichen Darstellungen die Operatoren Fixpunkte haben. I. II. Mat. Sbornik, n. Ser. **34** (76), 289—306 (1954), **36** (78), 111—124 (1955) [Russisch].

L'A. entend par demi-groupe un ensemble muni d'une loi partout définie associative. Il désigne par  $P$  la classe des demi-groupes  $\mathfrak{A}$  tels que dans toute représentation propre  $\mathfrak{A}$ , tout opérateur possède un point fixe et montre que  $P$  coïncide avec la classe des demi-groupes dont tout élément admet un zéro à droite. Si  $\Omega$  est un espace métrique complet et  $\mathfrak{A}$  le demi-groupe des opérateurs  $A$  de  $\Omega$  tels que, quels que soient  $\alpha, \beta \in \Omega$ ,  $\varrho$  désignant la métrique, il existe  $0 \leq \theta_A \leq 1$  tel que  $\varrho(A\alpha, A\beta) \leq \theta_A \varrho(\alpha, \beta)$ ,  $\mathfrak{A}$  appartient à la classe  $P$  d'après le principe de Banach. Si  $\Omega$  est un simplexe à  $n$  dimensions et  $\mathfrak{A}$  le demi-groupe de tous les opérateurs continus de  $\Omega$ ,  $\mathfrak{A}$  appartient à la classe  $P$  d'après le théorème de Brouwer. Si  $\Omega$  est un ensemble compact d'un espace vectoriel localement convexe et  $\mathfrak{A}$  le demi-groupe des tous les opérateurs continus de  $\Omega$ ,  $\mathfrak{A}$  appartient à la classe  $P$  d'après le théorème de Tychonoff. L'A. signale brièvement que l'on peut suivre le chemin inverse et démontrer les théorèmes de Banach, Brouwer et Tychonoff uniquement par une étude algébrique des trois demi-groupes d'opérateurs particuliers et donner ainsi une explication purement algébrique des théorèmes de points fixes. Mais ce n'est pas là l'objet de ce travail qui est consacré à l'étude des bases de  $P$  dans le sens suivant (§ 3): Une sous-classe d'une classe  $Q$  de demi-groupes sera dite base de  $Q$  lorsqu'elle est minimale parmi les sous-classes  $Q_0$  de  $Q$  ayant les propriétés suivantes: tout demi-groupe union de demi-groupes appartenant à  $Q_0$  appartient à  $Q$  et tout demi-groupe de  $Q$  est union de demi-groupes appartenant à  $Q_0$ . Au § 4 on démontre que  $P_0$  est une base de  $P$ .  $P_0$  est définie comme étant la classe constituée par les demi-groupes cycliques holoïdes et par les demi-groupes  $\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$  où  $\mathfrak{M}$  parcourt la classe des demi-groupes holoïdes, où  $\mathfrak{B}$  est le demi-groupe réduit à un élément ou égal à  $\mathfrak{T}_1$  ou  $\mathfrak{T}_2$  (deux demi-groupes spéciaux définis au § 1) et où  $\times$  est un produit particulier

défini au § 1 et généralisant une construction due à Kaufmann [Pädagog. Inst. A. J. Herzen **86**, 145—165 (1949)]. Dans la partie II, l'introduction au § 5 de la notion de conjugaison permet de donner un procédé de construction systématique de toutes les bases de  $P$ , le théorème essentiel étant le suivant: Pour qu'une classe de demi-groupes constitue une base de  $P$ , il faut et il suffit qu'elle soit conjuguée de  $P_0$ .

*J. Riguet.*

Croisot, Robert: Demi-groupes simples inversifs à gauche. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 845—847 (1954).



Les classes suivantes de demi-groupes ont été considérées par différents auteurs:

- 1 Demi-groupes simples qui sont réunion de sous-demi-groupes simples à gauche,
  - 2 Demi-groupes simples ayant au moins un idéal à gauche minimal,
  - 3 Demi-groupes simples qui sont réunion de leurs idéaux à gauche minimaux (ou demi-groupes simples inversifs à gauche).
- L'identité entre les classes 2 et 3 a été établie par S. Schwarz (ce Zbl. 45, 156, th. 2). L'A. établit ici l'identité entre les classes 1 et 3. Il caractérise en outre ceux de ces demi-groupes qui n'ont pas d'élément idempotent au moyen de certains demi-groupes d'applications d'un ensemble dans lui-même.

L. Lesieur.

Popova, Helen: Logarithmetics of finite quasigroups. I. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 9, 74—81 (1954).

Von der Logarithmetik (s. hierzu Etherington, dies. Zbl. 42, 34) einer endlichen Quasigruppe wird gezeigt, daß sie Quasigruppe, und zwar subdirekte Vereinigung der Logarithmetiken aller von den einzelnen Elementen der Quasigruppe erzeugten Quasigruppen ist.

G. Pickert.

Lombardo-Radicci, Lucio: I piani di rifrazione. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 130—139 (1954).

Konstruktion einer Klasse geordneter Cartesischer Gruppen, deren Additionsgruppe mit der Additionsgruppe der reellen Zahlen identisch ist: vgl. auch H. Naumann, dies. Zbl. 56, 385.

R. Baer.

Clifford, A. H.: Note on Hahn's theorem on ordered Abelian groups. Proc. Amer. math. Soc. 5, 860—863 (1954).

Es wird gezeigt, wie ein Beweisverfahren von Hausner-Wendel (dies. Zbl. 48, 87) modifiziert werden kann, um einen einfachen Beweis des Hahnschen Satzes zu erhalten, daß jede (vollständig) geordnete abelsche Gruppe sich in eine lexikographisch geordnete Gruppe reeller Funktionen einbetten läßt. Vgl. auch P. F. Conrad, dies. Zbl. 50, 23.

R. Baer.

Goheen, H. E.: On a theorem of Zassenhaus. Proc. Amer. math. Soc. 5, 799—800 (1954).

In the proof of his theorem (this Zbl. 49, 160) that if, in a finite group  $G$ , the normaliser of every Abelian subgroup is also its centraliser then  $G$  is Abelian, H. J. Zassenhaus has considered separately the possibilities that the centre of  $G$  is, or is not, the identity subgroup of  $G$ . In this paper the author gives an alternative proof for the first of these possibilities.

M. C. R. Butler.

Petresco, Julian: Sur les commutateurs. Math. Z. 61, 348—356 (1954).

This is a clear and useful account of commutator operations in groups, aiming not so much at new results — although generalizations of known relations are obtained — but rather at a unified treatment of existing material. We indicate briefly the contents: Relations between the members of the derived (lower central) series of a group generated by two subgroups  $A$  and  $B$  and the members of the corresponding series of  $A$  and of  $B$ ; in the case where these series break off generalizations of some of H. Fitting's results (this Zbl. 19, 198) are obtained. Commutator forms. An expansion of the subgroup generated by  $n$  subgroups  $A_i$  as set product of these  $A_i$  and certain commutator subgroups of — roughly speaking — increasing weight, leading to a generalization of P. Hall's expansion of  $(a b)^n$ .

Hanna Neumann.

Schenkman, Eugene: Two theorems on finitely generated groups. Proc. Amer. math. Soc. 5, 497—498 (1954).

Verf. beweist: 1. Wird die Gruppe  $G$  von der endlichen Gruppe  $H$  und dem Element  $b$ , das endliche Ordnung hat, erzeugt und gilt für alle  $h \in H$ :  $(h, b, b) = 1$ , so hat  $G$  endliche Ordnung und  $b$  liegt in einem nilpotenten Normalteiler von  $G$ . 2.  $G$  werde von den endlich vielen Elementen  $b_1, b_2, \dots, b_n$  erzeugt und für jedes  $i = 1, 2, \dots, n$  sowie jedes  $g \in G$  gelte:  $(g, b_i, b_i) = 1$ . Dann ist  $G$  nilpotent von der Klasse  $n$  höchstens. Haben ferner die  $b_i$  sämtlich endliche Ordnung, so ist auch die Ordnung von  $G$  endlich.

O. Grün.



Wielandt, Helmut: Zum Satz von Sylow. Math. Z. 60, 407—408 (1954).

Die Sylowsätze für endliche Gruppen  $G$  wurden von P. Hall verallgemeinert unter der Voraussetzung, daß  $G$  auflösbar ist. Verf. gibt eine interessante Verallgemeinerung der Sylowsätze, die auch für nicht auflösbare Gruppen gilt: „Die Gruppe  $G$  der Ordnung  $g$  enthalte eine nilpotente Untergruppe  $H$  der Ordnung  $h$ , und es sei  $(g/h, h) = 1$ .  $\mathfrak{M}$  sei eine Untergruppe von  $G$ , deren Ordnung Teiler von  $h$  sei. Dann ist  $\mathfrak{M}$  zu einer Untergruppe von  $H$  in  $G$  konjugiert“. Zu der Frage, ob die Voraussetzung über die Struktur von  $H$  noch weiter abgeschwächt werden kann, bemerkt Verf., daß jedenfalls Auflösbarkeit nicht genügt, wie ein von P. Hall angegebenes Gegenbeispiel zeigt.

O. Grün.

Szép, J.: Bemerkung zu einem Satz von O. Ore. Publ. math., Debrecen 3, 81—82 (1954).

Verf. beweist: die endliche Gruppe  $G$  ist dann und nur dann nicht einfach, wenn sie eine eigentliche Untergruppe  $H$  mit folgenden Eigenschaften besitzt: 1.  $H$  ist vertauschbar mit sämtlichen in  $G$  Konjugierten einer  $p$ -Sylowgruppe  $K$  von  $H$ . 2.  $H$  ist vertauschbar mit sämtlichen in  $G$  Konjugierten einer anderen eigentlichen Untergruppe  $L$  von  $z$   $p$  primter Ordnung. — Um ganz exakt zu sein, sollte man in den obigen Satz die vom Verf. stillschweigend gemachte Annahme aufnehmen, daß  $G$  keine Gruppe von Primzahlpotenzordnung sei. Denn für eine  $p$ -Gruppe  $G$  ist obige Bedingung 2 nicht erfüllt.

O. Grün.

Hall, P.: Finiteness conditions for soluble groups. Proc. London math. Soc., III. Ser. 4, 419—436 (1954).

This paper greatly advances our knowledge of the interrelations between certain finiteness conditions and certain laws (or „identical relations“) in groups. Only a few typical results can be quoted: A finitely generated (FG) metabelian group satisfies the maximum condition for normal subgroups (Max-n), but not necessarily the maximum condition for subgroups (Max); such a group has only a countable number of normal subgroups. By contrast, an uncountable infinity of two-generator groups  $G$  is exhibited which have as their centre an arbitrarily prescribed countable abelian group, which moreover coincides with the second derived group  $G''$ . These groups then satisfy  $[G'', G] = 1$ ; a commutator law is either weaker than (or equivalent to) this, or else it is stronger than (or equivalent to) a law  $[\zeta_k, \zeta_k] = 1$ , where  $\zeta_k$  is the  $k$ -th lower central group. The finitely generated groups of this latter kind have each only countably many distinct normal subgroups. Thus we have a precise dichotomy, in terms of their commutator laws, between the varieties characterized by such laws that do, or do not, contain finitely generated groups with uncountably many distinct homomorphic maps. Within a new systematic terminology incidentally introduced by the author, soluble groups satisfying Max (that is the  $S$ -groups of Hirsch, this Zbl. 18, 145) are renamed „polycyclic“ groups. It is shown that if an extension of an abelian group by a polycyclic group satisfies FG, then it also satisfies Max-n; on the other hand (rather trivially), a soluble group which satisfies Max-n also satisfies FG. Further results deal with what the author calls the *wreathling* of two permutation groups  $G$  and  $\Gamma$  (Pólya's „Gruppenkranz“, this Zbl. 17, 232, especially p. 178; cf. also Kaloujnine, this Zbl. 34, 305; Krasner et Kaloujnine, this Zbl. 41, 158; 45, 303), and give useful sufficient conditions in terms of  $G$  and  $\Gamma$  for the wreath group to satisfy Max-n. These results allow *inter alia* the construction of groups that satisfy Max-n but are not polycyclic nor even extensions of abelian groups by polycyclic groups. Another typical result is that the group ring of a polycyclic group satisfies the maximum condition for right ideals (Max-r). Groups satisfying Max-r are more closely studied in this context. Some unsolved problems are also stated, among them the question whether every finitely generated finitely related group satisfies Max-n.

B. H. Neumann.



Piccard, Sophie: Structure de groupes d'ordre fini jouissant de la propriété  $P \pmod{p}$ . C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2217—2219 (1954).

Die Verf. referiert über endliche Gruppen, die durch Erzeugende und definierende Relationen derart gegeben sind, daß in der zugehörigen Relationenmatrix jedes Element durch eine feste Primzahl  $p$  teilbar ist. Die 15 aufgestellten Sätze ergeben sich alle aus der leicht ersichtlichen Tatsache, daß die Elementarteiler der Relationenmatrix durch  $p$  teilbar sein müssen.

W. Gaschütz.

Helmberg, Gilbert: Strukturbeziehungen zwischen endlicher Gruppe, Gruppenring und irreduziblen Darstellungen. Monatsh. Math. **58**, 241—257 (1954).

Gegeben sei eine endliche Gruppe  $G$ , eine Darstellung  $\mathfrak{D}$  von  $G$ , eine Untergruppe  $\mathfrak{H}$  von  $G$  und beliebige Elemente  $A_1, A_2, \dots, A_s$  aus  $G$ . Es werden im Anschluß an die Dissertation des Verf. (Wien 1950) Analogien zwischen der Theorie der diophantischen Approximationen und der Gruppentheorie untersucht. Ausgangspunkt dafür sind die Definitionen des Fixraumes  $\mathfrak{F}(\mathfrak{H})$  von  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{D}$  und der Fixrangmatrix  $F(A_1, A_2, \dots, A_s)$  von  $A_1, A_2, \dots, A_s$  in  $\mathfrak{D}$ . Ersterer ist definiert als die Gesamtheit der Fixpunkte von  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{D}$ , das sind die bei Anwendung aller Elemente aus  $\mathfrak{H}$  invarianten Elemente eines Darstellungsmoduls von  $\mathfrak{D}$ ; letztere ist die rechteckige Matrix  $F(A_1, A_2, \dots, A_s)$ , die durch Untereinandersetzen der Matrizen  $D(A_\sigma) - E$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, s$ ) entsteht, wo  $D(A_\sigma)$  die Darstellungsmatrix von  $A_\sigma$  bei  $\mathfrak{D}$  und  $E$  die Einismatrix jeweils passender Reihenzahl bezeichnet. Dann gilt das folgende Analogon zum allgemeinen Kromckerschen Approximationssatz. Ein Element  $B \in G$  ist genau dann als Produkt der Elemente  $A_1, A_2, \dots, A_s$  (in beliebiger Reihenfolge und mit beliebigen Wiederholungen) darstellbar, wenn die Ränge von  $F(A_1, A_2, \dots, A_s)$  und  $F(A_1, A_2, \dots, A_s, B)$  für jede irreduzible Darstellung  $\mathfrak{D}$  von  $G$  übereinstimmen. Unter weiteren Sätzen, die die Darstellbarkeit und die Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten von  $B$  aus  $A_1, A_2, \dots, A_s$  in der angegebenen Weise untersuchen, findet sich auch ein Analogon einer von H. Weyl stammenden Verschärfung des Kromckerschen Approximationssatzes. Die in der Arbeit aufgezeigten Verbindungen zwischen der Gruppentheorie und der Theorie der diophantischen Approximationen entstehen bei abelschen Gruppen  $G$  dadurch, daß man in den gefundenen gruppentheoretischen Ergebnissen von der multiplikativen Schreibweise bei den irreduziblen Darstellungen, die ja Abbildungen der Elemente aus  $G$  auf Potenzen von  $e^{1/n}$  mit rationalen Exponenten sind, zur additiven Schreibweise dieser Exponenten übergeht. Dagegen scheint es sich bei nichtabelschen Gruppen  $G$  zunächst nur um formale Analogien zu handeln.

P. Wolf.

Gaschütz, Wolfgang: Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen. Math. Nachr. **12**, 253—255 (1954).

Verf. beweist: Dann und nur dann besitzt die endliche Gruppe  $G$  eine treue absolut-irreduzible Darstellung in einem Körper, dessen Charakteristik kein Teiler der Ordnung von  $G$  ist, wenn das Kompositum aller minimalen abelschen Normalteiler von  $G$  durch eine Klasse unter  $G$  konjugierter Elemente erzeugt werden kann. Diese Kennzeichnung ist wesentlich einfacher als alle bisher bekannten. Nach einer brieflichen Mitteilung des Verf. läßt sich seine Methode auch auf den Fall übertragen, daß die Charakteristik des Darstellungskörpers in der Ordnung von  $G$  aufgeht, und liefert dann eine entsprechende Vereinfachung des für diesen Fall bekannten Kriteriums.

R. Kochendörffer.

Robinson, G. de B. and O. E. Taubee: The reduction of the inner product of two irreducible representations of  $S_n$ . Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 723—726 (1954).

Es wird eine Methode angegeben, um die Analyse der irreduziblen Bestandteile des direkten Produkts (inneren Produkts) zweier beliebiger Darstellungen der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  auf die Berechnung gewisser äußerer Produkte zurückzuführen. Den Spezialfall, daß ein Faktor die Gestalt  $(n-1, 1)$  hat, haben schon Gamba und Radicati (dies. Zbl. **51**, 259) behandelt; der allgemeine Beweis, der eine bemerkenswerte elementare Beziehung benützt, ist nun auch wesentlich durchsichtiger.

F. L. Bauer.

Murnaghan, Francis D.: On the analyses of  $\{m\} \otimes \{1^k\}$  and  $\{m\} \otimes \{k\}$ . Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 721—723 (1954).

Verf. gibt in Verallgemeinerung eines früheren Ergebnisses (dies. Zbl. **43**, 19) eine Methode an, um zu bestimmen, welche der durch  $(k-j)$ -gliedrige Klammern ( $j = 0, \dots, n-1$ ) gekennzeichneten Darstellungen in den Plethysmen  $\{m\} \otimes \{1^k\}$

und  $\{m\} \otimes \{h\}$  enthalten sind. Die Methode ist verwandt, aber nicht identisch mit einer ebenfalls vom Verf. unlängst gegebenen (dies. Zbl. 48, 255), dem gleichen Zweck dienenden.

F. L. Bauer.

**Bivins, Robert L., N. Metropolis, Paul R. Stein and Mark B. Wells: Characters of the symmetric groups of degree 15 and 16.** Math. Tables Aids Comput. 8, 212- 216 (1954).

Unter Verwendung der Murnaghanschen Rekursionsbeziehung und der Frobeniusschen Formel für die Charaktere der Einheitsklasse wurde ein systematisches Verfahren zur Berechnung der Charaktere der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_N$  entwickelt. Methodisch bemerkenswert ist, daß keine Verschleppung von Berechnungsfehlern stattfinden kann. Organisatorisch ist das Verfahren einfach genug, um sich für einen Rechenautomaten (MANIAC, Los Alamos) programmieren zu lassen. Es wurden die Charaktere für  $N = 15$  und  $N = 16$  berechnet und die bekannten Berechnungen für  $N = 10$  bis  $N = 14$  überprüft. Die Ergebnisse sind auf Mikrofilm (UMT File 195) verfügbar. Die Verwendung von Rechenautomaten bei der Lösung von bisher kaum zu bewältigenden praktischen Aufgaben gruppentheoretischer und algebraischer Art dürfte angesichts der ermutigenden Erfahrungen, von denen die Verf. sprechen, nutzbringend sein.

F. L. Bauer.

**Bauer, Friedrich L.: Zur Theorie der Spingruppen.** Math. Ann. 128, 228- 256 (1954).

Spingruppe heißt die „Spindarstellung“ der orthogonalen Gruppe  ${}^nO$ , das ist die irreduzible Darstellung  ${}^nO(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ ; sie wird mit  ${}^nO(1)$  bezeichnet. Ähnlich wie in der Tensortheorie die  $N$ -te Kroneckerpotenz der linearen Gruppe oder einer ihrer Untergruppen, so wird hier die von  ${}^nO(\Delta)$ , bezeichnet mit  ${}^nO(\Delta)_{\times}^N$ , zum Gegenstand der Untersuchung gemacht; das Analogon der Tensoren sind die „Undoren“. Als wichtigstes Hilfsmittel wird ein Komplementaritätsbegriff für irreduzible Darstellungen orthogonaler Gruppen eingeführt. Die Darstellungen  ${}^nO(m_1, \dots, m_{[n/2]})$  und  ${}^nO(m'_1, \dots, m'_{[N/2]})$  heißen komplementär, genauer die zweite das  $N$ -Komplement der ersten, die erste das  $n$ -Komplement der zweiten, wenn ihre Young-Tableaux sich zu einem Kästchenrechteck der Zeilenlänge  $n+2$  und Spaltenlänge  $N+2$  zusammenfügen, falls man sie so legt, daß die erste Zeile des einen links von unten nach oben, die des zweiten oben von rechts nach links läuft. (Falls  $n$  und  $N$  beide ungerade, bleibt ein Viertelkästchen rechts unten frei.) Es muß hierzu bei geradem  $N$  ( $n$ ) die erste (zweite) Darstellung eine ganzzahlige sein, bei ungeradem eine halbzahlige. Dann wird folgender „Struktursatz“ bewiesen: In  ${}^nO(1)^N$  tritt jedes  ${}^nO(m)$  auf, das ein  $N$ -Komplement besitzt, und zwar so oft wie dessen Grad (bei geradem  $n$ ) bzw. dessen reduzierter Grad (bei ungeraden  $n$ ) beträgt. (Der reduzierte Grad einer halbzahligen Darstellung ist hier Grad, dividiert durch den von  ${}^nO(1)$ .) Dieser Satz hat natürlich etwas zu tun mit der „ausreduzierenden Algebra“ der mehrstufigen Undoren, der Kommutatoralgebra von  ${}^nO(1)^N$ ; doch sind die Zusammenhänge wesentlich verwickelter als bei den Tensoren. Mit invariantentheoretischen Hilfsmitteln wird der Rang dieser Algebra bestimmt und werden ihre Elemente angegeben; auch der Rang der einhüllenden Matrixalgebra von  ${}^nO(1)^N$  wird bestimmt. Um die Ausreduktion der  $N$ -stufigen Undoren wirklich durchzuführen, wird erst das seit Brauer und Weyl wohlbekannte  ${}^nO(\Delta)_{\times}^N = {}^nO(\square)$  betrachtet, das aus lauter TensorDarstellungen besteht, dann hiervon die  $M$ -te Kroneckerpotenz gebildet. Damit ist der Fall  $N = 2M$  erledigt, auf den  $N = 2M + 1$  zurückgeführt wird durch Betrachtung von  ${}^nO(m)$  mit ganzzahligem  $(m)$ . Man erhält für  $n = 2\nu + 1$ : die Charakteristik des führenden Terms  ${}^nO(m_1 + \frac{1}{2}, \dots, m_{\nu} + \frac{1}{2})$  von  ${}^nO(m_1, \dots, m_{\nu}) = O(1)$  ist die Charakteristik der Darstellung  ${}^{n-1}\text{Sp}(m_1, \dots, m_{\nu})$  der symplektischen Gruppe, multipliziert mit der Charakteristik von  ${}^nO(\Delta)$ . Für gerades  $n$  gibt es keine Gruppe  ${}^{n-1}\text{Sp}$ , aber man hat formal ein analoges Ergebnis. Hilfsmittel ist hierbei die Betrachtung von Tensoren über der Clifford-Algebra. Im einfachsten Fall, nämlich  $n = 2\nu$  und  $N = 2M$ , gilt eine Aussage, die fast so einfach ist wie bei den Tensoren: Die Kommutatoralgebra von  ${}^{2\nu}O(\square)^M$  ist isomorph zur einhüllenden Algebra von  ${}^{2\nu}O^-(\square)^M$  ( $O^+$  ist die eigentlich orthogonale Gruppe), und umgekehrt; die gegenseitige Zuordnung der irreduziblen Bestandteile wird durch die Komplementarität geliefert. Im Fall  $n = 2\nu + 1$ ,  $N = 2M + 1$  geht man zu  ${}^{2\nu}\text{Sp}$  und  ${}^{2\nu}\text{Sp}$  über und erhält einen analogen Satz für  ${}^{2\nu}\text{Sp}(\square)^M$  und  ${}^{2\nu}\text{Sp}(\square)^M$ , wo unter  ${}^{2\nu}\text{Sp}(\square)$  die zusammengesetzte Darstellung  $\sum_{\beta=0}^{\nu} (\alpha - \beta + 1) {}^{2\nu}\text{Sp}(1^{\beta})$  verstanden ist. Schließlich gilt Ähnliches auch für die unitär beschränkte unimodulare Gruppe  $SL$ : Wenn man  ${}^nSL(\square) = \sum_{\nu=0}^n {}^nSL(1^{\nu})$  setzt, so tritt in  ${}^nSL(\square)_{\times}^M$  irgendein  ${}^nSL(f)$  so oft auf,



wie der Grad des analog wie oben zu definierenden  $M$ -Komplements dieser Darstellung angibt; und es besteht die entsprechende Beziehung wie oben zwischen  ${}^uSL(\cdot)_1^u$  und  ${}^uSL(\cdot)_1^n$ . Endlich wird ein direkter Zusammenhang zwischen diesem Ergebnis und den obigen bei den orthogonalen Gruppen hergestellt.

H. Boerner.

Harish-Chandra: Representations of semisimple Lie groups. V. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1076—1077 (1954).

Harish-Chandra: Representations of semisimple Lie groups. VI. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1078—1080 (1954).

1<sup>re</sup> Note. Soient  $G$  un groupe de Lie semi-simple connexe,  $\mathfrak{g}_0$  son algèbre de Lie,  $Z$  son centre,  $x \mapsto x^*$  l'application canonique de  $G$  sur  $G^* = G/Z$ ,  $dx^*$  la mesure de Haar sur  $G^*$ ,  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  dans un espace hilbertien  $\mathfrak{H}$ ; pour  $\varphi \in \mathfrak{H}$ ,  $\langle \varphi, \pi(x)\varphi \rangle$  ne dépend que de  $x^*$ ;  $\pi$  est dite de carré intégrable si  $\int_G \langle \varphi, \pi(x)\varphi \rangle^2 dx^* < \infty$  pour tout  $\varphi \in \mathfrak{H}$ . L'A. généralise à de telles représentations les relations d'orthogonalité de Schur (th. 2). Le th. 1 ne pourrait être énoncé qu'en recopiant la Note. L'A. observe que les exemples connus suggèrent une relation entre les classes de sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$  et les différentes séries de représentations unitaires irréductibles provenant de la réduction de la représentation régulière. Il associe à une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}_0$  de  $\mathfrak{g}_0$  une représentation unitaire quasi-simple de  $G$ , telle que  $\dim \mathfrak{H}_\pi = \infty$  pour toute  $\pi \in \Omega$  (pour ces notations, cf. Harish-Chandra, ce Zbl. 51, 430). Cette représentation est construite comme représentation induite, à partir d'une représentation unitaire irréductible d'un certain sous-groupe de  $G$  et d'un caractère d'un certain sous-groupe abélien. Généralisation d'un résultat de finitude de Bruhat (ce Zbl. 55, 20).

2<sup>me</sup> Note. Soit  $G_\mathbb{C}$  un groupe de Lie complexe „complexification“ de  $G$  (l'A. suppose par exemple que  $G$  admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie). À tout caractère analytique du sous-groupe complexe correspondant à  $\mathfrak{h}_0$ , on associe un espace hilbertien de fonctions holomorphes sur une sous-variété ouverte de  $G_\mathbb{C}$ , et on fait opérer  $G$  par translation à gauche dans cet espace. La représentation unitaire obtenue est irréductible et de carré intégrable. L'A. donne une construction algébrique de la représentation associée de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}_0$ .

J. Dixmier.

Matsushima, Yozô: Sur le prolongement d'un pseudogroupe d'isomorphismes locaux d'une variété différentiable. Nagoya math. J. 7, 193—110 (1954).

Les relations d'isomorphisme et d'homomorphisme entre pseudogroupes sont transitives. — Les prolongements des groupes de Lie sont isomorphes (resp. homomorphes) si et seulement si les groupes de Lie originales sont elles-mêmes isomorphes (resp. homomorphes) (Pour ce dernier théorème, voir aussi Ch. Ehresmann, ce Zbl. 43, 174).

H. Guggenheimer.

Raševski, P. K.: Inneralgebraische Liesche Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 539—540 (1954) [Russisch].

Inneralgebraisch heißt eine Lie-Gruppe, wenn ihre adjungierte algebraisch ist. Notwendig und hinreichend dafür ist die Existenz einer Basis  $(b_\alpha, a_\alpha, s_\alpha)$ , wo die  $s_\alpha$  eine Basis einer maximalen halbeinfachen Untergruppe bilden, die  $b_\alpha$  und  $a_\alpha$  eine Basis des Radikals und die  $b_\alpha$  eine Basis des nilpotenten Ideals des Radikals, und wo

$$[a_\alpha, a_\mu] = [a_\alpha, s_\omega] = 0, \quad [a_\alpha, b_\alpha] = \mu_{\alpha\alpha} b_\alpha$$

mit ganzen  $\mu_{\alpha\alpha}$  gilt. Für die Existenz einer (treuen) algebraischen linearen Darstellung sind diese Bedingungen notwendig. Ohne Beweise. H. Freudenthal.

● Freudenthal, Hans: Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Utrecht: Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit 1951. 52 S.

$\mathfrak{C}$  sei das System der Cayleyzahlen (Oktaven) und  $\mathfrak{J}$  die Jordansche Algebra der 3-reihigen hermiteschen Matrizen über  $\mathfrak{C}$ . Nach E. Cartan tritt die Ausnahme-gruppe  $\mathfrak{G}_2$  (in der Cartanschen Bezeichnung einfacher Liegruppen) als Automor-

phismengruppe von  $\mathfrak{C}$  auf, und ebenso ist  $\mathfrak{F}_1$  diejenige von  $\mathfrak{F}$ , nach Chevalley und Schafer. Diese Resultate sowie die Hurwitzsche Kennzeichnung von  $\mathfrak{C}$  und die Trialität der  $\mathfrak{D}_4$  bezüglich  $\mathfrak{C}$  werden erneut dargestellt.  $\mathfrak{F}_4$  läßt sich auch als Invariantengruppe von  $\mathrm{Sp} X^2, \mathrm{Sp} X^3$  ( $X \in \mathfrak{F}$ ) charakterisieren. — Die Ausnahme-  
gruppe  $\mathfrak{C}_6$  tritt als lineare Invariantengruppe von  $\det X$  auf, ferner (ohne Beweis) als Automorphismengruppe einer von R. Moufang entdeckten, ebenen projektiven Geometrie  $\mathfrak{P}$ , die dann von Pascual Jordan (dies. Zbl. **34**, 381) mit Hilfe der Idempotenten von  $\mathfrak{F}$  konstruiert wurde. Eine zusammenhängende Geometrie mit 3 Geschlechtern (Punkten, Geraden, Bändern), wie sie der Autor behandelt, ist leider nicht existent (die angegebene Konstruktion ist unvollständig). — Anmerkung des Ref.: Die obige Geometrie  $\mathfrak{P}$ , die als Punktraum 16-dimensional ist, läßt eine  $\mathfrak{F}_4$ -invariante symmetrische Riemannsche Metrik zu, die von E. Cartan entdeckt wurde (Oeuvres I, 2 p. 349 et 424).  
*Ernst Witt.*

**Wendel, J. G.:** Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 923—929 (1954).

Verf. gibt einen neuen Beweis der Existenz des Haarschen Maßes auf einer kompakten Gruppe  $G$ . Zu diesem Zweck beweist er (ohne Referenz) den Satz von Kawada und Itô [Proc. phys.-math. Soc. Japan. III. Ser. **22**, 977—998 (1940)], daß ein Borelsches Maß, welches idempotent unter Faltung ( $\mu * \lambda(E) = \int_G \mu(E x^{-1}) d\lambda(x)$ ) ist, das Haarsche Maß auf einer kompakten Untergruppe von  $G$  sein muß. Die Menge  $S$  aller nicht-negativen Borelschen Maße  $\mu$  auf  $G$  mit  $\mu(G) = 1$  bildet eine kompakte Halbgruppe unter der Faltungsoperation und der schwachen Topologie für  $S$ . Nach einem Satz von Numakura (dies. Zbl. **47**, 255) enthält  $S$  ein idempotentes Element. Der Beweis endet jetzt mit einer Anwendung des Wohlordnungssatzes.  
*E. Hewitt.*

**Yamanoshita, Tsuneyo:** On the dimension of homogeneous spaces. J. math. Soc. Japan **6**, 151—159 (1954).

Die wichtige Gleichung  $\dim G = \dim H + \dim G/H$  wird für jede metrische, separable, lokal kompakte topologische Gruppe  $G$  und jede abgeschlossene Untergruppe  $H$  von  $G$  bewiesen. Der allgemeine Fall wird auf denjenigen zurückgeführt, wo  $G$  endlichdimensional und zusammenhängend ist: dieser Fall wird dann mittels des Satzes von Montgomery und Zippin [Ann. of Math., II. Ser. **56**, 213—241 (1952)] erledigt, wodurch jede solche Gruppe  $G$  inverse Grenzgruppe Liescher Gruppen ist. Wie Verf. bemerkt, wäre ein Beweis der obigen Gleichung ohne Benützung des Ergebnisses von Montgomery und Zippin erwünscht. Folgende Verallgemeinerung wird noch bewiesen: Wirkt die metrische, separable lokal kompakte Gruppe  $G$  auf den Raum  $X$ , so gilt für jedes  $x \in X$ ,  $\dim G = \dim G_x + \dim G(x)$ , wo  $G_x$  die Untergruppe aller  $g \in G$  mit  $gx = x$ , während  $G(x)$  die Menge aller  $gx \in X$ ,  $g \in G$  bedeutet.  
*T. Ganea.*

**Kertész, A. and T. Szele:** On the existence of non-discrete topologies in infinite Abelian groups. Publ. math., Debrecen **3**, 187—189 (1954).

Mittels algebraischer Zerlegungssätze abelscher Gruppen wird gezeigt, daß jede unendliche abelsche Gruppe einer nicht diskreten, regulären, dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügenden Topologie fähig ist, und daß eine abelsche Gruppe dann und nur dann einer nicht diskreten Untergruppen-Topologie fähig ist, wenn sie die Minimalbedingung für Untergruppen nicht befriedigt. — Daß eine Gruppe einer gewissen Topologie fähig ist, soll offenbar besagen, daß sie damit zu einer topologischen Gruppe wird; gibt es ein, aus Untergruppen bestehendes vollständiges Umgebungssystem des Einselementes, so heißt die zugehörige Topologie eine Untergruppen-Topologie.  
*T. Ganea.*

**Leptin, Horst:** Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen. I. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 23—40 (1954).



Der Autor untersucht eine Klasse vollständiger total unzusammenhängender topologischer abelscher Gruppen, die zuerst von H. Prüfer eingeführt wurden [Math. Z. 22, 222–249 (1925)]. Der Inhalt dieser Abhandlung steht im engeren Zusammenhang mit den (unabhängig davon geschriebenen) Arbeiten von H. Schöneborn (dies. Zbl. 55, 22, 256; Zur Theorie der abelschen Gruppen mit ganz- $p$ -adischem Operatorenbereich, erscheint in den Math. Ann.) Eine teilweise geordnete Menge  $M$  heißt filtergeordnet, wenn zu zwei Elementen  $a$  und  $b$  aus  $M$  stets ein weiteres Element  $c$  in  $M$  existiert mit der Eigenschaft  $c \leq a$  und  $c \leq b$ . Unter einem Filter von  $M$  verstehen wir eine filtergeordnete Teilmenge von  $\mathfrak{P}'M$  (Mengensystem aller von der Nullmenge  $\emptyset$  verschiedenen Mengen von  $M$ , geordnet durch die Relation des Enthaltenseins). Diese Definition des Filters verdanken wir einem Vorschlag von E. Witt. Eine abelsche topologische Gruppe  $\mathfrak{G}$  heißt eine Prüfersche Gruppe (P.-Gruppe), wenn erstens  $\mathfrak{G}$  eine Filterbasis (der Null) aus offenen Untergruppen enthält, und zweitens jeder Filter aus Restklassen offener Untergruppen von  $\mathfrak{G}$  Berührungspunkte hat. Dabei verstehen wir unter den Berührungspunkten von  $F = \{F\}$  die Punkte von  $\bigcap F$  ( $F \in F$ ). Jede Prüfersche Gruppe ist dann direkte Summe von primären Gruppen. Im § 3 untersucht der Autor Haupteigenschaften primärer Prüferscher Gruppen. Es gilt nämlich z. B. (i) Die primäre P.-Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist genau dann kompakt, wenn  $\mathfrak{G}^\infty = 0$  ist, dabei  $\mathfrak{G}^\infty = \bigcap p^i \mathfrak{G}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). (ii)  $\mathfrak{G}^*$  ist die kleinste Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  mit kompakter Faktorgruppe. (iii) Es ist  $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{G}^\infty$  mit geeigneter kompakter Untergruppe  $\mathfrak{K}$ .

T. Tannaka.

## Verbände. Ringe. Körper:

Sholander, Marlow: Medians and betweenness. Proc. Amer. math. Soc. 5, 801–807 (1954).

Die früher (dies. Zbl. 47, 54) begonnene systematische, insbesondere axiomatische Untersuchung verschiedener Ordnungsbegriffe und der auf ihnen beruhenden Strukturen wird fortgesetzt: Der schon früher eingeführte Median-Halbverband, eine simultane Verallgemeinerung des Verbands- und des Baumbegriffs, wird auf mehrere äquivalente Weisen charakterisiert, wobei jedesmal ein anderer Grundbegriff vorangestellt wird: (1) Man versteht unter  $S$  zunächst ein System mit einer in ihm stets eindeutig definierten ternären Median genannten Operation  $(a, b, c)$ ,  $a, b, c \in S$ , mit den zwei folgenden Identitäten als Axiomen:

$$(M) \quad (a, a, b) = a; \quad (N) \quad ((a, b, c), (a, b, d), e) = ((c, d, e), a, b).$$

Daraus folgt unter anderem, außer der schon früher bewiesenen Unabhängigkeit des Median von der Reihenfolge seiner Glieder:  $\{(a, x, b) = (a, y, b)\} \Leftrightarrow \{(x, a, y) = (x, b, y)\}$ . Man definiert „ $x$  ist zwischen  $a$  und  $b$ “  $\Leftrightarrow (a, x, b)$ . Die Menge aller zwischen  $a$  und  $b$  gelegenen Elemente heißt das Segment  $(a, b)$ . (2) Umgekehrt charakterisiert man die Segmente durch drei Durchschnittsaxiome: (P)  $a, b, c \in S \Rightarrow (\exists d \in S) (a, b) = (a, c) = (a, d)$ ; (Q)  $(a, b) \cap (a, c) = (a, b) \cap (c, a) = (a, a)$ ; (R)  $(a, b) \cap (a, c) = (a, a) \Leftrightarrow (a, a) \cap (b, c) = \{a\}$ ; und leitet daraus den Median- und den „Zwischen“-Begriff ab. (3) Man geht von der Zwischenrelation aus, die man wie folgt charakterisiert: (D<sub>1</sub>)  $a, b, c \in S$ ;  $(\exists w \in S) (a, w, b \& b, w, c \& c, w, a)$ ; (B<sub>1</sub>)  $a, b, a = a = b$ ; (I)  $a, b, c \& a, b, d \& c, e, d \Rightarrow c, b, a$ . Die Diskussion weiterer Varianten liefert noch fünf andere äquivalente Axiomensysteme. [Ref. gestattet sich bei dieser Gelegenheit auf seine Verwendung des Zwischenbegriffs für eine verallgemeinerte Definition geordneter multiplikativer Systeme hinzuweisen (C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1910 (1949))]. Distributive Verbände  $S$  charakterisiert man mit Hilfe des Medianbegriffs durch die Axiome (M), (N) und ein weiteres Axiom (O): Man kann in  $S$  Folgen  $a_1, a_2, \dots$  und  $c_1, c_2, \dots$  an-

geben, so daß  $(u_i, a, v_j) = a$  für alle  $a \in S$  und alle genügend großen  $i$  und  $j$  (d. h.  $i, j \geq n(a)$ ). D. Tamari.

**Sholander, Marlow:** Medians lattices and trees. Proc. Amer. math. Soc. 5, 808—812 (1954).

Hier benutzt der Verf. Axiome, die mit Hilfe binärer, in üblicher Weise als Multiplikation (Durchschnitt oder größte untere Schranke) und Addition (Vereinigung oder kleinste obere Schranke; existiert nicht allgemein im Halbverband) geschriebener, Operationen formuliert werden, und charakterisiert Halbverbände, distributive Verbände, Ketten, distributive Halbverbände, Median-Halbverbände und Bäume. Es wird die Einbettbarkeit distributiver Halbverbände  $S = S_0$  in distributive Verbände  $T$  bewiesen: Man konstruiert zunächst die erste Erweiterung  $S_1 = S \times S$  modulo  $R$ , d. h. die Menge geordneter Paare  $(a, b)$  ( $a, b \in S$ ) mit der durch  $\{(a, b) \sim (c, d)\} \Leftrightarrow \{a = ac + ad, b = bc + bd, c = ca + cb, d = da + db\}$  definierten Äquivalenz  $R$ .  $(a, b) (c, d) = (ac + ad, bc + bd)$ . Die  $(k+1)$ -te Erweiterung  $S_{k+1}$  ist die erste Erweiterung von  $S_k$ :  $S_{k+1} = (S_k)_1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Im allgemeinen:  $\alpha, \beta \in S_k \Rightarrow \alpha + \beta \in S_{k+1}$ . Schließlich hat  $T = S \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$  die gewünschten Eigenschaften. Insbesondere gestatten Bäume und, allgemeiner, Median-Halbverbände als spezielle distributive Halbverbände eine solche Erweiterung. D. Tamari.

**Sampei, Yoemon:** Supplement to the paper entitled „On lattice completions and closure operations“. Commentarii math. Univ. St. Pauli 3, 29—30 (1954).

In einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 55, 23) ergab sich als Anwendung die Lösung eines Problems von Funayama [Isô Sûgaku, J. Fac. Hokkaidô Univ., 5, Nr. 1, 44—46 (1943)], das bestimmte Einbettungen distributiver Verbände in vollständige Verbände betrifft. Verf. gibt einen neuen, mehr konstruktiven Beweis an. H.-J. Kowalsky.

**Dilworth, R. P.:** Proof of a conjecture on finite modular lattices. Ann. of Math., II. Ser. 60, 359—364 (1954).

Verf. beweist: Sei  $L$  ein endlicher modularer Verband,  $V_k$  (bzw.  $W_k$ ) die Menge der Elemente, welche genau  $k$  obere (bzw. untere) Nachbarn haben. Dann bestehen  $V_k$  und  $W_k$  aus der gleichen Anzahl von Elementen. Als Spezialfall  $k = 1$  ist darin enthalten: Die Anzahl der  $\cap$ -irreduziblen und der  $\cup$ -irreduziblen Elemente ist gleich. Der Beweis benutzt im Falle eines komplementierten Verbandes Sätze über Rang und Komplement, im anderen Falle eine Art Möbius-Funktion, die so definiert wird: Sei  $Q_k(a)$  die Anzahl der Mengen von  $k$  verschiedenen Punkten von  $L$ , deren Vereinigung  $a$  ist, dann sei  $\mu(a) = \sum_k (-1)^k Q_k(a)$ . H. Gericke.

**Dwinger, Ph.:** On the closure operators of a complete lattice. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 560—564 (1954).

If  $L$  is a complete lattice, the set of all closure operators on  $L$ , partially ordered by putting  $q_1 \leq q_2$  if and only if  $q_1(A) \leq q_2(A)$  for all  $A \in L$ , constitutes a complete lattice  $C$ . This lattice is isomorphic to the dual of the class of those subsets of  $L$  which contain the greatest element  $1$  of  $L$  and which are closed under meet, partially ordered by set inclusion. In this isomorphism every closure operator is mapped onto its range. For these results cf. M. Ward, Ann. of Math., II. Ser. 43, 191—196 (1942). Using these facts the author proves that  $C$  is distributive if and only if  $L$  is a (complete) chain and that  $C$  is a Boolean algebra if and only if  $L$  is well-ordered and has a greatest element. In the last case  $C$  is isomorphic to the Boolean algebra of all subsets of a suitable set and therefore is completely distributive. W. Peremans.

**Thurston, H. A.:** Congruences on a distributive lattice. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 10, 76—77 (1954).

Let  $L$  be a lattice consisting of finite subsets of a set  $S$  with set-theoretical intersection and union as lattice operations. The following two theorems are proved:



1. With every congruence relation  $\vartheta$  on  $L$  a subset  $K$  of  $S$  corresponds such that  $A \vartheta B$  if and only if  $A \in K \Leftrightarrow B \in K$ . 2. Any two congruence relations on  $L$  are permutable. As to the proof of theorems 1 we remark that  $X_g$  and  $X_l$  are defined as greatest and least elements of a certain subset of  $L$ , which, however, need not exist. It is better to define  $X_g$  and  $X_l$  as union and intersection of that subset, the fact that they are elements of  $L$  not being used in the proof. By inspection of the author's proofs one sees that the condition that the elements of  $L$  are finite subsets of a set  $S$  may be replaced by the weaker condition: the elements of  $L$  are subsets of a set  $S$  and if  $X \in L$  and  $Y \in L$ , then  $X - (X \cap Y)$  is finite. *W. Peremans.*

**Yamamoto, Koichi:** Logarithmic order of free distributive lattice. *J. math. Soc. Japan* **6**, 343—353 (1954).

Let  $f(n)$  be the number of elements in the free distributive lattice on  $n$  free generators. The author proves

$$(1) \quad \left| \frac{2}{\pi} 2^{\frac{1}{2}} n^{-1/2} (1 + O(n^{-1})) - \log f(n) - \left\lfloor \frac{2}{\pi} 2^{\frac{1}{2}} n^{-1/2} \log \right\rfloor \right| \sim \frac{\pi}{2} (1 + O(n^{-1}))$$

(all logs are taken to the base 2). The proof uses certain boundary and coboundary operations defined on the lattice-elements, regarded as complexes. From (1) the author deduces that, for any  $\delta > 0$ , and sufficiently large  $n$ ,  $2^{n n^{-1/2 - \delta}} \leq \log f(n) \leq 2^{n n^{-1/2 + \delta}}$ , and he conjectures the asymptotic relation  $\log f(n) \sim \left\lfloor \frac{2}{\pi} 2^{\frac{1}{2}} n^{-1/2} \right\rfloor$ . *P. M. Cohn.*

**Chion, Ja. V.:** Archimедisch geordnete Ringe. *Uspechi mat. Nauk*, **9**, Nr. 4 (62), 237—242 (1954) [Russisch].

Auf Grund bekannter Tatsachen über archimедisch geordnete Gruppen, insbesondere des Satzes von Hölder [Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. **53**, 1—64 (1901)], wird bewiesen, daß archimедisch geordnete Ringe entweder Ringe mit Nullmultiplikation (alle Produkte = 0) sind oder Unterringen des geordneten Körpers der reellen Zahlen isomorph sind. Der Verf. bemerkt, daß es nicht nötig ist, diese Ringe a priori als assoziativ vorauszusetzen. Es werden dann einfache notwendige und hinreichende Kriterien für die Gleichheit der so durch die reellen Zahlen induzierten archimедischen Ordnungen, sowohl für Gruppen wie auch für Ringe, angegeben, womit die Gesamtheit der möglichen, voneinander verschiedenen archimедischen Ordnungen erschöpfend charakterisiert ist. Dabei wird ein Resultat von M. I. Zájceva (dies. Zbl. **50**, 23) betreffs (abelscher) Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden verallgemeinert. *D. Tamari.*

**Podderjugin, V. D.:** Eine Bedingung für die Möglichkeit der Ordnung eines beliebigen Ringes. *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 4 (62), 211—216 (1954) [Russisch].

Die von Artin-Schreier [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 83—115 (1926)] gegebene notwendige und hinreichende Bedingung für die (volle) Anordnungsfähigkeit (kommutativer) Körper wurde zunächst von T. Szele (dies. Zbl. **47**, 31) auf Schiefkörper und unmittelbar danach von R. E. Johnson (dies. Zbl. **47**, 31) auf allgemeine (d. h. nicht notwendig kommutative) Integritätsbereiche verallgemeinert. Hier wird die Verallgemeinerung durch Verzicht auf die Assoziativität der Multiplikation und Zulassung von Nullteilern bedeutend weiter getrieben. Die (volle) Ordnung eines solchen allgemeinen „nichtassoziativen“ Ringes  $R$  bedeutet im wesentlichen, daß in ihm ein additiv und multiplikativ geschlossener Komplex  $R_1$  mit  $(-R_1) \cap R_1 = R$  und  $(-R_1) \cap R_1 = \{0\}$  gegeben ist ( $x \in R_1 \Leftrightarrow x \geq 0$ ;  $R_1 = R \cap \{0\}$ ). Es wird mit Hilfe transfiniter Induktion bewiesen, daß  $R$  dann und nur dann geordnet werden kann, wenn jedes „korrekte“ System von Elementen  $a_1, \dots, a_n \in R$  durch geeignete Vorzeichenwahl ein „unabhängiges“ System  $\pm a_1, \dots, \pm a_n$  wird. Dabei heiße  $a_1, \dots, a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) korrekt, wenn  $0 \neq a_i \pm a_j$  ( $i \neq j$ ), und unabhängig, wenn außerdem 0 nicht als Summe von Produkten  $\neq 0$  aus den  $a_i$  erzeugt werden kann. Es gilt auch die weitere Verallgemeinerung [im Sinne von J. P. Serre (dies. Zbl. **33**, 350), Szele und Johnson (l. c.)] betreffs der Fortsetzung

einer gegebenen Ringordnung auf einen Erweiterungsring. Wenn Nullteiler ausgeschlossen werden, kann die notwendige und hinreichende Bedingung der Ordnungsfähigkeit darauf reduziert werden, daß 0 nicht als Summe „gerader“ Elemente darstellbar ist. Dabei heißt ein Element  $\neq 0$  (nach Johnson [l. c.]) gerade, wenn es als ein Produkt darstellbar ist, in dem Elemente nur eine gerade Anzahl mal als Faktoren vorkommen.

*D. Tamari.*

**Rédei, Ladislaus:** Über die Ringe mit gegebenem Modul. *Acta Sci. math.* **15**, 251—254 (1954).

This paper contains a generalization of a theorem of R. A. Beaumont (this Zbl. **30**, 197) and of a well-known theorem about the multiplication constants of a linear associative algebra. If  $M$  is a left  $R$ -module over a ring  $R$  with unit element, we take a set of linear generators  $\omega_i$  of  $M$ , where  $i$  runs through an index set  $I$ . This means that every element of  $M$  may be written in the form  $\sum_i a_i \omega_i$  (all summations are extended over  $I$ ) with  $a_i \in R$  and  $a_i = 0$  for all  $i \in I$  with a finite number of exceptions. The following theorem is proved. If we set  $\omega_i \omega_j = \sum_k c_{ijk} \omega_k$  ( $c_{ijk} \in R$ ; for all  $i, j \in I$  we have  $c_{ijk} = 0$  for all  $k \in I$  with a finite number of exceptions), a multiplication in  $M$  is defined which makes  $M$  a ring if and only if  $\sum_{i,j} (c_{rsi} c_{itj} - c_{sit} c_{rji}) \omega_j = 0$  for all  $r, s, t \in I$  and  $\sum_{i,j} a_i c_{irj} \omega_j = \sum_{i,j} a_i c_{rij} \omega_j = 0$  for all  $r \in I$  and for all  $\{a_i\}$  with  $\sum_i a_i \omega_i = 0$ . Moreover the ring satisfies the usual operator property  $\alpha(\alpha\beta) = (\alpha\alpha)\beta = \alpha(\alpha\beta)$  ( $a \in R$ ;  $\alpha, \beta \in M$ ), if and only if  $\sum_i (a b - b a) c_{rsi} \omega_i = 0$  for all  $r, s \in I$  and for all  $a, b \in R$ . As applications of this theorem the above-mentioned property of multiplication constants and the theorem of Beaumont are given.

*W. Peremans.*

**Lemmlejn, V.:** Über Euklidische Ringe und Hauptidealringe. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **97**, 585—587 (1954) [Russisch].

Einfacher und anschaulicher Beweis dafür, daß es Hauptidealringe gibt, die nicht euklidisch sind, selbst bei weitgehender Verallgemeinerung des Begriffs eines euklidischen Algorithmus (verallgemeinerte Normen mit Werten in irgendwelchen, auch transfiniten, wohlgeordneten Mengen). Zusatz des Ref.: Die vorliegende Arbeit enthält kaum Neues. Der Verf. zitiert nur H. Hasse, *J. reine angew. Math.* **159**, 3 (1928). Die Behandlung dieser Fragen ist jedoch inzwischen erheblich fortgeschritten. Insbesondere enthält Th. Motzkin, dies. Zbl. **35**, 303 alle Resultate des Verf. (einschl. Beispiele und Definitionen) und in jeder Richtung weitergehende Einsichten.

*D. Tamari.*

**Büke, Altıntaş:** Untersuchungen über kommutativ-assoziativ und nilpotente Algebren vom Index 3 und von der Charakteristik 2. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **19**, Suppl. 1—145 (1954).

Für eine kommutativ-assoziative nilpotente Algebra  $W$  vom Index 3 (d. h.  $W^2 \supset W^3 = (0)$ ) über dem Körper  $K$  der Charakteristik 2 sei  $Q$  das Ideal der  $x$  mit  $x^2 = 0$ . Mit  $X'$  als dem Ideal der  $x'$  mit  $x'x = 0$  für alle  $x \in X$  werden die Ideale  $Q, Q', Q \cap Q', Q \cup Q', Q'', Q' \cup Q'', (Q \cup Q')'$ ,  $W'$  als die Strukturideale von  $W$  bezeichnet; ihre Gesamtheit ist bezüglich der Operationen  $\cap, \cup, \cdot$  abgeschlossen. In der Menge der aus den Strukturidealen durch Multiplikation untereinander und mit  $W$  entstehenden Ideale  $\cap W^2$  werden die sämtlichen 35 maximalen Ketten aufgestellt. Hat  $W^2$  nun über  $K$  eine Dimension  $\geq 7$ , so müssen in einigen dieser Ketten einige Elemente einander gleich sein. Nach dem Auftreten solcher Gleichheiten können die Algebren  $W$  in Typen eingeteilt werden. Falls  $W^2$  eindimensional (über  $K$ ) ist, ergeben sich so 7 Typen und, falls  $W^2$  zweidimensional ist, 166 Typen. Für einige dieser Typen werden vollständige Invariantensysteme angegeben.

*G. Pickert.*

**Okugawa, Kôtarô:** On differential algebra of arbitrary characteristic. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A* **28**, 97—107 (1954).

Die Seidenbergschen Ergebnisse über Differentialalgebren der Charakteristik  $p \neq 0$



(dies. Zbl. 47, 35) lassen sich auf den partiellen Fall übertragen, wenn neu definiert wird:  $u$  heie  $D$ -algebraisch (Okugawa: „ $S$ -algebraisch“) ber einem  $D$ -Körper  $F$ , wenn es Nullstelle eines  $D$ -Polynoms in  $U$  über  $F$  ist, das sich nicht als  $D$ -Polynom über  $F$  in  $U^p$  und den  $p$ -ten Potenzen der Ableitungen von  $U$  schreiben läßt. Ist  $(w_i)$  eine lineare Basis von  $F/F^p$ , so heie ein perfektes  $D$ -Ideal  $P$  eines  $D$ -Polynomringes  $S$  über  $F$  zulässig, wenn aus  $\sum A_i w_i \in P$  und  $A_i \in S^p$  für jedes  $i$  stets  $A_i \in P$  folgt. Verf.'s Verallgemeinerung des Satzes von primitiven Element ist jedoch falsch. *A. Jaeger.*

Gurevi, G. B.: Liesche Standard-Algebren. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 437—460 (1954) [Russisch].

All Lie algebras considered are linear Lie algebras, i. e. Lie algebras of linear transformations of a vector space  $\mathfrak{B}$  of dimension  $n$  over a field of characteristic zero. Such a Lie algebra is called a nilalgebra, if all its elements are nilpotent. For each nilalgebra  $\mathfrak{A}$  acting on  $\mathfrak{B}$  there is a chain  $0 = \mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ , such that (1)  $A \mathfrak{B}_k \subset \mathfrak{B}_{k-1}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) for all  $A \in \mathfrak{A}$ . The set of all linear transformations  $A$  satisfying (1) is called a complete nilalgebra. If  $\mathfrak{A}$  is any linear Lie algebra, then its normaliser  $\mathfrak{Z}$  is the set of all matrices  $S$  such that  $[A, S] \in \mathfrak{A}$  for all  $A \in \mathfrak{A}$ . Now a standard Lie algebra is defined as a linear Lie algebra whose normaliser is also the normaliser of some complete nilalgebra. The author determines all standard Lie algebras by finding a basis for each such algebra in terms of the matrix units  $E_{ij}$  relative to a suitably chosen „canonical“ basis of  $\mathfrak{B}$ : A standard nilalgebra is completely determined by its characteristic  $(i_1, \dots, i_q; j_1, \dots, j_q)$ , where  $i_s = i, 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_q \leq n$ : its basis consists then of all  $E_{xy}$  such that  $i_{s-1} < x \leq i_s, j_s < y \leq j_{s+1}$  ( $s = 1, \dots, q; i_0 = 0$ ). Next, if  $\mathfrak{A}$  is any soluble standard algebra and  $\mathfrak{Z}$  its normaliser, then  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}] = \tilde{\mathfrak{A}}$  is a standard nilalgebra, and  $\mathfrak{A}$  may be obtained from  $\tilde{\mathfrak{A}}$  by the adjunction of certain diagonal matrices (in the canonical basis). Finally, an insoluble standard algebra consists of a number of square blocks on the main diagonal, together with a soluble standard algebra which turns out to be the radical of the whole. The blocks constitute a semi-simple algebra and thus a Levi-decomposition is obtained. - Secondly the author investigates the embeddings of an arbitrary nilalgebra in a standard nilalgebra. Two linear transformations  $A, B$  are orthogonal, if  $\text{Tr}(AB) = 0$ . The orthogonal complement  $\mathfrak{A}^\perp$  of a Lie algebra  $\mathfrak{A}$  is again a Lie algebra. A nilalgebra  $\mathfrak{A}$  is said to be minimally embedded in a standard nilalgebra  $\mathfrak{A}$ , if  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ , and if no proper subalgebra of  $\mathfrak{A}$  containing  $\mathfrak{A}$  is a standard algebra. It is shown that a nilalgebra  $\mathfrak{A}$  is minimally embedded in a standard nilalgebra  $\mathfrak{A}$  if and only if  $\mathfrak{A} = [\mathfrak{Z}, \mathfrak{A}] + \mathfrak{A}^\perp$ , where  $\mathfrak{Z}$  is the normaliser of  $\mathfrak{A}$ . The proof uses the reduction of  $\mathfrak{A}$  to a canonical form and hence leads, for given  $\mathfrak{A}$ , to a minimal embedding. As a corollary the author shows that a linear nilalgebra  $\mathfrak{A}$  is a standard nilalgebra if and only if  $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^\perp]$  is a nilalgebra. *P. M. Cohn.*

Jenner, W. E.: Arithmetics of algebras over algebraic function fields of several variables. Portugaliae Math. 13, 35—36 (1954).

Als Ergänzung zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 52, 270) werden zwei Resultate hergeleitet. Der eine Satz behauptet (mit den früheren Bezeichnungen) die Vertauschbarkeit der Block-Ideale  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_s$ , wenn ihr direkter Durchschnitt gleich  $\mathfrak{a} \mathfrak{D}$  mit einem ganzen  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{a}$  ist. Der andere Satz beschäftigt sich mit den Isomorphieeigenschaften der durch  $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \mathfrak{D}$  definierten Abbildung der ganzen Ideale von  $\mathfrak{o}$  auf die ganzen Ideale von  $\mathfrak{D}$ . Diese Sätze gelten auch noch, wenn der Grundkörper  $k$  ein algebraischer Funktionenkörper ist. *P. Wolf.*

Flanders, Harley: A remark on Hilbert's Nullstellensatz. J. math. Soc. Japan 6, 160—161 (1954).

Zariski a montré (ce Zbl. 32, 260) que le Nullstellensatz est une conséquence

immédiate de la proposition suivante, qu'il a d'ailleurs démontrée: Si  $k$  et  $K$  sont deux corps tels que  $K = k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $K$  est une extension algébrique de  $k$ . L'A. donne une démonstration très simple de cette proposition, basée sur des propriétés élémentaires de la théorie arithmétique des extensions algébriques.

G. Ancochea.

**Zassenhaus, Hans: Über eine Verallgemeinerung des Henselschen Lemmas.**  
Arch. der Math. **5**, 317—325 (1954).

The following generalization is given of Hensel's well-known lemma (cf. e. g. van der Waerden, this Zbl. **37**, 19, p. 263). Let  $k$  be a field with a complete valuation  $\varphi$  and let  $\mathfrak{o}$  be the ring of integers of  $k$  ( $a \in \mathfrak{o} \rightarrow \varphi(a) \leq 1$ ) and  $\mathfrak{p}$  be the maximal prime ideal of  $\mathfrak{o}$  ( $a \in \mathfrak{p} \rightarrow \varphi(a) < 1$ ). Further let  $\mathfrak{D}$  be an associative torsionfree  $\mathfrak{o}$ -ring (i. e. for  $a \in \mathfrak{o}$  and  $A \in \mathfrak{D}$  if  $aA = 0$  then  $a = 0$  or  $A = 0$ ) with unit and finitely generated over  $\mathfrak{o}$ . Then, if in the hypercomplex system  $\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D}$  a system of matrix units  $e_{ij}^\mu$  ( $\mu = 1, \dots, r$ ,  $i, j = 1, \dots, f_\mu$ ) satisfying

$$(1) \quad e_{ij}^\mu e_{kl}^\nu = 0 \text{ if } \mu \neq \nu \text{ or } j \neq k, = e_{il}^\mu \text{ if } \mu = \nu \text{ and } j = k$$

is given there will be in  $\mathfrak{D}$  a system  $E_{ij}^\mu$  satisfying

$$(2) \quad E_{ij}^\mu E_{kl}^\nu = 0 \text{ if } \mu \neq \nu \text{ or } j \neq k, = E_{il}^\mu \text{ if } \mu = \nu \text{ and } j = k,$$

$E_{ij}^\mu$  belonging to the residue class  $e_{ij}^\mu$ . The case  $r = 2$ ,  $f_1 = f_2 = 1$  is equivalent to Hensel's lemma. First the author proves the somewhat analogous purely algebraic theorem A: If in a ring  $\mathfrak{S}$  elements  $e_{ij}^\mu$  ( $\mu = 1, \dots, r$ ,  $i, j = 1, \dots, f_\mu$ ) are given which satisfy

$$(3) \quad e_{ij}^\mu e_{kl}^\nu = 0(\mathfrak{N}) \text{ if } \mu \neq \nu \text{ or } j \neq k, = e_{il}^\mu(\mathfrak{N}) \text{ if } \mu = \nu \text{ and } j = k,$$

where  $\mathfrak{N}$  is a two-sided nilideal of  $\mathfrak{S}$  then there exist elements  $E_{ij}^\mu$  satisfying (2) and  $e_{ij}^\mu \equiv E_{ij}^\mu(\mathfrak{N})$ . The case  $r = 1 = f_1$  is ascribed to Brauer. The proof is somewhat lengthy and uses mathematical induction. With the aid of an  $\mathfrak{o}$  basis  $A_1 \dots A_n$  of  $\mathfrak{D}$  an extension of the valuation of  $k$  to a complete pseudo-valuation  $q_\mathfrak{D}$  of  $\mathfrak{D}$  can be given by putting  $q_\mathfrak{D} \left( \sum_{i=1}^n A_i A_i \right) = \max_i q_\mathfrak{D}(A_i)$  ( $A_i \in \mathfrak{o}$  and  $A = \sum A_i A_i \in \mathfrak{D}$ ) clearly satisfying  $q_\mathfrak{D}(A) = \varphi(A)$  if  $A \in \mathfrak{o}$ ,  $q_\mathfrak{D}(A+B) \leq \max(q_\mathfrak{D}(A), q_\mathfrak{D}(B))$ ,  $q_\mathfrak{D}(A \cdot B) \leq q_\mathfrak{D}(A) + q_\mathfrak{D}(B)$  ( $A, B \in \mathfrak{D}$ ). The set of all  $A \in \mathfrak{D}$  with  $q_\mathfrak{D}(A) \leq \eta \leq 1$  is a two-sided ideal denoted by  $\mathfrak{D}(\eta)$ . Now arbitrary elements

$E_{ij}^\mu$  from the residue class  $e_{ij}^\mu$  satisfy (3) with  $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}(\alpha) \mathfrak{D}(\alpha^2)$ , for some  $\alpha < 1$ , which is a nilideal in  $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}/\mathfrak{D}(\alpha^2)$ . Repeated application of the theorem A gives systems of matrix units  ${}_\tau E_{ij}^\mu$  which converge to the required system if  $\tau$  tends to infinity. After defining equivalence of two systems  $e_{ij}^\mu$  ( $\alpha < 1$ ) both satisfying (1), it is derived that equivalence mod the two-sided nilideal  $\mathfrak{N}$  respectively mod  $\mathfrak{p}\mathfrak{D}$  implies equivalence in  $\mathfrak{S}$  respectively  $\mathfrak{D}$ , from which it follows: Every semi-primary ring  $\mathfrak{S}$  with unit admits a Remak decomposition of the left  $\mathfrak{S}$ -module  $\mathfrak{S}$ . Every two such decompositions are operator isomorph (by an inner automorphism), and the similar theorem for the  $\mathfrak{D}$  left module  $\mathfrak{D}$ . Also some remarks about the relation with the modular representations of finite groups are given. The paper concludes with considerations about the connection of the representations of  $\mathfrak{D}$  over  $\mathfrak{o}$  and of  $\mathfrak{D}/\mathfrak{p}\mathfrak{D}$  over  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ . Since the concepts used are rather involved we shall not formulate the result here.

J. Verhoeff.

## Zahlentheorie:

● Beauvois, F.-Henri-A.: **Problème de Fermat: Appel aux Mathématiciens.** Nouvelle édition revue et complétée. Chartres: Imprimerie Durand 1954. 24 p. 600 frs.



Ramasarma, B. V.: Partitions of zero into 4 cubes. *Math. Student* **22**, 102—103 (1954).

Leonardi, Raffaele: Some bimagic matrices. *Scripta math.* **20**, 165—167 (1954).

Eine Matrix von  $n^2$  Zahlenpaaren  $x_{ik}, y_{ik}$  ( $x_{ik}, y_{ik} = m_1, \dots, m_n; i, k = 1, \dots, n$ ) heißt bimagisch, wenn in jeder Matrix  $(a_{ik})$  mit  $a_{ik} = Ax_{ik} + By_{ik} + C$  alle Reihen und die beiden Diagonalen gleiche Summen und gleiche Quadratsummen haben. Beispiele für  $n = 8$  und 9 (mit  $m_i = 1$ ), sowie für  $n = 10$ . *R. Sprague*.

Xeroudakes, George and Alfred Moessner: A theorem of the elementary arithmetic. *J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein.* **57**, 89—92 (1954).

From the solutions of  $x^2 + y^2 = 2z^2$  in relative prime integers a solution is found of the system  $2X^{in} = a^i + b^i + c^i + d^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) for  $n = 1$ , where the given positive integer  $N$  contains at least one prime factor  $\equiv 1 \pmod{4}$ . Finally a method is developed to find solutions of this system for  $n = 2, 3, \dots$  from those for  $n = 1$ . *W. Verdenius*.

Selmer, Ernst S.: The Diophantine equation  $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ . Completion of the tables. *Acta math.* **92**, 191—197 (1954).

The author is now able to fill in all the blanks in the tables in his earlier paper (this Zbl. **42**, 269) either by giving a solution to the title equation or by showing it impossible (the basic solution  $X, Y, Z$  of  $X^3 + Y^3 = 382Z^3$  is numbers of 53 digits(!)). He also gives some further numerical results bearing on his conjectures about the number of generators of the title equation (see this Zbl. **55**, 271).

*J. W. S. Cassels*.

Gupta, Hansraj: On triangular numbers in arithmetical progression. *Math. Student* **22**, 141—143 (1954).

Sei  $J_n$  eine Dreieckszahl. Der Verf. leitet die Bedingungen her, die  $a, b, c$  erfüllen müssen, damit  $J_a, J_b, J_c$  eine arithmetische Reihe bilden. Wenn  $A_n, J_a, J_c$  und  $J_a, J_b, J_c$  zwei arithmetische Reihen sind, gibt er ferner die Bedingungen dafür, daß auch  $J_{a_1}, J_{a_2}, J_{a_3}, J_{a_4}, J_{a_5}$  eine arithmetische Reihe bilden. *B. Stolt*.

Nagell, Trygve: On the solvability of some congruences. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **27**, Nr. 3, 5 p. (1954).

Der Verf. beweist den folgenden Satz: Es seien  $a, b$  und  $c$  ganze Zahlen  $\neq 0$  und  $p$  eine Primzahl, die kein Teiler von  $7ab$  ist. Dann gibt es ganze Zahlen  $x, y$ , die  $ax^3 + by^3 = c \pmod{p}$  erfüllen. Der Satz wurde schon 1935 bewiesen und in *Norsk mat. Tidsskr.* **22**, 28 (1940) als Aufgabe publiziert. Andere Beweise sind von Skolem (dies. Zbl. **17**, 157) und M. Hall (publ. von E. Selmer, dies. Zbl. **42**, 269) gegeben. Ferner wird der folgende Satz bewiesen: Wenn  $q$  eine ungerade Primzahl und  $N$  eine beliebige ganze Zahl ist, ist  $y^2 = x^2 + (-1)^{(q-1)/2}q \pmod{N}$  durch ganze Zahlen  $x, y$  lösbar. *B. Stolt*.

Skolem, Th.: On the least odd positive quadratic non-residue modulo  $p$ . *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **27**, Nr. 20, 7 p. (1954).

Es sei  $p$  eine ungerade Primzahl und  $q$  die kleinste ungerade positive ganze Zahl, die quadratischer Nichtrest modulo  $p$  ist. Durch einfache Methoden werden die folgenden Ungleichungen hergeleitet.  $q < 13,41p^{2/5}$ ,  $p \equiv 3 \pmod{8}$ ;  $q < 6,74p^{2/5}$ ,  $p \equiv 7 \pmod{8}$ ;  $q < 5,82p^{2/5}$ ,  $p \equiv 5 \pmod{8}$ . Diese Ausdrücke sind Verbesserungen früherer Resultate von T. Nagell (dies. Zbl. **36**, 302, **46**, 267), L. Rédei (dies. Zbl. **51**, 281) und dem Ref. [*Math. Scandinav.* **2**, 187—192 (1954)] aber schlechter als die Resultate von A. Brauer (dies. Zbl. **1**, 57). *B. Stolt*.

Carlitz, L.: Congruences for the solutions of certain difference equations of the second order. *Duke math. J.* **21**, 669—679 (1954).

L'A. part d'une équation de différences étudiée par D. H. Lehmer:  $u_{n+1} = (an + b)u_n + cu_{n-1}$  où  $u_0, u_1, a, b, c$  sont des entiers fixés. Lehmer a prouvé en particulier que si  $m$  est un entier positif arbitraire et  $(a, m) = 1$ ,  $u_{n+m} \equiv c^m u_n$

(mod.  $m$ ). L'A. étend ce résultat de différentes manières. Si on pose  $\Delta^r u_n = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c^{m(r-s)} u_{n+2s}$  et  $(c, m) = 1$ , on a  $\Delta^{2r-1} u_n \equiv \Delta^{2r} u_n \equiv 0 \pmod{m^r}$ , pour  $r \geq 1$ ,  $m$  impair et tout  $n$  (pour  $m$  pair le module est à remplacer par  $2^{-(r-1)m'}$ ). En partant de l'équation  $u_{n+1} = n u_n + b c u_{n-1} + b^n + c^n$  où  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  et prenant  $b \equiv c \pmod{p}$  pour chaque  $p$  premier diviseur de  $m$ , l'A. prouve d'abord:  $u_{n+m} \equiv b^m u_n \equiv c^m u_n \pmod{m'}$  où  $m' = \prod_{p|m} p^e$ ,  $m' = \prod_{p|m} p^{e-1}$ .

Ensuite en posant un peu différemment d'avant:  $\Delta^r u_n = \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c^{m(r-s)} u_{n+2s}$ , il prouve  $\Delta^{2r} u_n \equiv \Delta^{2r+1} u_n \equiv 0 \pmod{m^r m'}$  pour  $r \geq 1$ ,  $m$  impair et tout  $n$  (pour  $m$  pair le module est à remplacer par  $2^{-(r-1)m' m'}$ ). Ces résultats sont en relation avec le problème des ménages. S. Bays.

Carlitz, L.: Extension of a theorem of Glaisher and some related results. Bull. Calcutta math. Soc. 46, 77—80 (1954).

Let the numbers  $A_r^{(k)}$  be defined by  $\prod_{r=1}^{p-1} (x - k p - r) = x^{p-1} - A_1^{(k)} x^{p-2} + \dots + A_{p-1}^{(k)}$ , where  $k$  is an arbitrary integer and  $p$  a prime  $\geq 3$ . The author proves the formulas:

$A_{2r+1}^{(k)} \equiv [(2k+1)(2r+1)/4r] p^2 B_{2r} \pmod{p^3}$ ,  $A_{2r}^{(k)} \equiv (-p/2r) B_{2r} \pmod{p^2}$ , where  $B_{2r}$  denotes the Bernoulli number in the even-suffix notation and  $r \geq 1$ . For  $k=0$  these congruences are due to Glaisher [Quart. J. Math. 31, 342—353 (1900)]. Putting  $H_r = \binom{n}{p^r}$ ,  $p, p$ , the author also derives the following congruence:  $H_r - H_{r-1} \equiv \frac{1}{3} n^2 p^{3r} B_{p-3} \pmod{p^{3r+3}}$ . For  $n=p$  this is a result due to the reviewer (this Zbl. 30, 198). W. Ljunggren.

Carlitz, L.: A note on Euler numbers and polynomials. Nagoya math. J. 7, 35—43 (1954).

Seien  $E_m$  die Eulerschen Zahlen, welche durch die Rekursionsformel  $(E+1)^m (E-1)^m = 0$ ,  $E_0 = 1$  ( $E^r$  zu ersetzen durch  $E_r$ ) definiert sind und  $E_m(x) = \sum_{0 \leq s \leq m} \binom{m}{2s} 2^{-2s} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{m-2s} E_{2s}$ . Es gilt: Wenn  $p$  eine ungerade Primzahl und  $(p-1) p^{e-1} | 2m$ , so ist  $E_{2m} \equiv 0$  bzw.  $2 \pmod{p^e}$  für  $p \equiv 1$  bzw.  $3 \pmod{4}$ ; für  $p \nmid a$  ist  $E_{2m}(a) \equiv 1 + (-1)^c \pmod{p^e}$ , wobei  $a \equiv c \pmod{p}$ ,  $1 \leq c \leq p-1$ ; für  $p|a$  ist  $E_{2m}(a) \equiv 0 \pmod{p^e}$ ; wenn  $m$  überdies ungerade ist, so gilt

$$E_m(a) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{a+i}{p} \pmod{p^e}, \quad \left(\frac{r}{p}\right)\text{-Legendresches Restsymbol.}$$

Eine Reihe von ähnlichen Resultaten wird für die durch

$$\frac{1-\zeta}{e^l-\zeta} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\zeta) \frac{t^m}{m!}, \quad \varphi_m(x, \zeta) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^{m-s} \varphi_s(\zeta)$$

( $\zeta$   $l$ -te Einheitswurzel,  $l \geq 2$ ,  $\zeta \neq 1$ ) definierten Zahlen und Polynome bewiesen, wobei also Kongruenzen nach Primidealepotenzen des durch  $\zeta$  erzeugten Körpers betrachtet werden. K. Prachar.

Carlitz, L.: The number of solutions of some equations in a finite field. Portugaliae Math. 13, 25—31 (1954).

Let  $a, b$  ( $a \neq 0$ ) be elements of  $GF(q)$ , where  $q$  is odd; for  $m = 3, 4$  the author finds the number of solutions  $x_1, x_2, \dots, x_m$  in  $GF(q)$  of the equation  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m - b)^2 = 2a x_1 x_2 \dots x_m$ . For  $m = 4$  this number contains a sum over the elements of  $GF(q)$ , whilst for  $m = 3$  the formulae contain multiple sums over  $GF(q)$ . M. C. R. Butler.

Vandiver, H. S.: On trinomial equations in a finite field. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1008—1010 (1954).



Let  $p$  be an odd prime and  $F[p^e]$  denote a finite field of order  $p^e$ ,  $p^e - 1 = e \cdot m$ . Let further  $S_e$  denote the set  $\{0, 1, 2, \dots, a-1\}$  and  $g$  a multiplicative generator of the nonzero elements of  $F[p^e]$ . The author considers the equation  $(1) g^{x_1} \cdots g^{x_n} = 1$  for a fixed  $i$  and  $j$ , belonging to  $S_e$  and  $S_m$  respectively. Let the number of distinct solutions  $s$  in  $S_e$  and  $t$  in  $S_m$  of (1) be denoted by  $(i, j)_{em}$ . In a previous paper (E. H. Pearson and H. S. Vandiver, this Zbl. 52, 278) the relation (1) was considered for  $n = 1$ . In the present paper some new formulas concerning the  $(i, j)$ 's are derived. As an example we mention the following result: If  $c = m \cdot c_1$ ,  $(b, h)_{cm} = m$  and  $(b, i)_{cm} = 0$  for  $i \equiv h \pmod{m}$ ,  $b \equiv 0 \pmod{c}$ , then  $\sum_{c=1}^c \sum_{i=0}^{c-1} (i, j)_{cc} (c, j-b)_{cc} = m^2 - m$ , where  $c$  ranges over  $m, 2m, 3m, \dots, (c_1 - 1)m$ . W. Ljunggren.

**Brauer, Alfred and B. M. Seelbinder:** On a problem of partitions. II. Amer. J. Math. 76, 343—346 (1954).

Teil I [Amer. J. Math. 64, 299—312 (1942)] handelt von folgender Aufgabe: Es sollen Funktionen  $F(a_1, \dots, a_k)$  ermittelt werden, derart, daß die diophantische Gleichung  $n = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$  für alle  $n \in F$  positive Lösungen hat, wobei  $a_1, \dots, a_k$  relativ prim und positiv sind. Eine solche Funktion ist

$$T = a_2 d_1 d_2 = a_3 d_2 d_3 = \dots = a_k d_{k-1} d_k,$$

wobei  $d_1 = a_1$ ,  $d_\kappa = (a_1, \dots, a_\kappa)$ ,  $(1 < \kappa \leq k)$ ,  $d_k = 1$ .  $T$  ist dann und nur dann bestmögliche Schranke, wenn  $\frac{a_\kappa}{d_\kappa} = \frac{1}{d_{\kappa-1}} \sum_{i=1}^{\kappa-1} a_i y_{\kappa i}$  ( $3 \leq \kappa \leq k$ ) in ganzen nicht negativen Zahlen darstellbar ist. Ist  $T$  nicht beste Schranke, so ist die beste Schranke höchstens gleich  $T - \min(a_1, a_2, \dots, a_k)$ . N. Hofreiter.

**Pagni, P.:** Studio sulle partizioni numeriche. I. II. Periodico Mat., IV. Ser. 32, 172—183, 199—211 (1954).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Darstellung ganzer Zahlen als Summen nicht-negativer ganzer Zahlen systematisch zu klassifizieren. Hauptgrundsatz ist die Unterscheidung der Zerlegungen in kombinatorische und dispositive. Bei der kombinatorischen Zerlegung kommt es nicht auf die Reihenfolge an, bei der dispositiven gehen zwei Zerlegungen mit gleichen Elementen in verschiedener Reihenfolge nicht als identisch. Die Anzahl der dispositiven Zerlegungen einer Zahl  $n$  in  $k$  Summanden bezeichnet Verf. mit (1)  $P'_{n,k}$ , (2)  $Q'_{n,k}$ , (3)  $R'_{n,k}$ , (4)  $S'_{n,k}$ . Dabei sind bei (1) die  $k$  Summanden eventuell auch einander gleich und  $\geq 0$ , bei (2) ebenso, nur durchwegs  $> 0$ , bei (3) durchwegs paarweise verschieden und  $\geq 0$ , bei (4) ebenso und  $> 0$ . Die Anzahl der kombinatorischen Zerlegungen mit denselben Bedingungen bezeichnet er bzw. mit  $P_{n,k}$ ,  $Q_{n,k}$ ,  $R_{n,k}$ ,  $S_{n,k}$ . Mit diesen Bezeichnungen leitet er eine große Zahl durchwegs bekannter Sätze auf einfachem Wege ab. — II. Hier gibt Verf. Tabellen der in Teil I genannten Zahlen  $P_{n,k}, \dots$  sowie Formeln nebst Beweisen, z. B.  $S'_{n,k} = k! P_{n-k+1, k} + \log k = k! S_{n,k}$ . L. Holzer.

**Corput, J. G. van der:** On sums of systems. Math. Centrum, Amsterdam, Scriptum 7, 31 S. (ohne Jahr).

The author uses the word „system“ to mean a finite, non-empty set of non-negative real numbers. If  $A_1, A_2, \dots, A_n$  are systems, their sum  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  is the system formed by all numbers expressible in the form  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , where  $a_i$  is in  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). The author proves a very general theorem on the addition of systems, of which Mann's theorem on the density of sums of sets of positive integers [Ann. of Math., II. Ser. 43, 523—527 (1942)] and Dyson's generalization thereof [J. London math. Soc. 20, 8—14 (1945)] are special cases. His arguments are similar to those used by Dyson. P. T. Bateman.

**Lambek, J. and L. Moser:** Inverse and complementary sequences of natural numbers. Amer. math. Monthly 61, 454—458 (1954).

The authors prove that the sequences  $m = [f(m)]$  and  $n = [g(n)]$  (for

$m, n = 1, 2, \dots$ ) are complementary (i.e. exhaust all positive integers) if and only if the sequences  $f$  and  $g$  are inverses. Here two sequences  $f$  and  $g$  are called inverses if for all positive integers  $m, n$  one has  $f(m) = n$  or  $g(n) = m$ , but not both. Their result is a generalization of a theorem of S. Beatty which covers the case  $f(m) = \frac{m}{x}$ .

A further main result is the following. Let  $F^*(n)$  denote the number of elements  $\leq n$  of a set  $F$  of positive integers; let  $F(m)$  denote the  $m^{\text{th}}$  greatest element of  $F$ . Putting  $F_0(n) = n$ ;  $F_k(n) = n - F^*(F_{k-1}(n))$  the sets  $F(n)$  and  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(n)$  are

complementary. A last result states that if  $F(m+1) - F(m) \geq m$ , then  $F(n)$  and  $F_2(n)$  are complementary. Of all three results interesting applications are given.  
H. J. A. Duparc.

Erdős, Paul: Some results on additive number theory. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 847–853 (1954).

Nach Lorentz (dies. Zbl. **56**, 39) gibt es zu jeder beliebigen unendlichen Menge  $\mathfrak{A}$  nichtnegativer ganzer Zahlen ebensolche Mengen  $\mathfrak{B}$  mit den Eigenschaften 1.  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  enthält alle hinreichend großen natürlichen Zahlen. 2. die asymptotische Dichte von  $\mathfrak{B}$  ist Null, genauer

$$(*) \quad B(n) < c \sum_{k=1}^n \frac{\log A(k)}{A(k)} \quad (A(k) > 0; \quad c = \text{const} > 0)$$

[ $A(n)$  bzw.  $B(n)$  bedeuten die Anzahlen der positiven Elemente von  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$ , die kleiner oder gleich  $n$  sind.] – Wählt man speziell für  $\mathfrak{A}$  die Primzahlmenge, so folgt aus (\*)  $B(n) = O(\log^3 n)$ . Verf. beweist, daß in diesem Spezialfall sogar Mengen  $\mathfrak{B}$  mit  $B(n) = O(\log^2 n)$  existieren. – Besitzt  $\mathfrak{A}$  positive asymptotische Dichte, so folgt aus (\*) leicht  $B(n) = O(\log^2 n)$ . Verf. zeigt, daß dies Ergebnis allgemein nicht verbessert werden kann, indem er die Existenz von Mengen  $\mathfrak{A}$  mit positiver asymptotischer Dichte nachweist, so daß aus  $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cap [N, \infty) = [N, \infty)$  für genügend großes  $N$  stets  $B(n) = \text{const} \cdot \log^2 n$  folgt. – Abschließend greift Verf. noch die von Volkmann (dies. Zbl. **48**, 34) aufgeworfenen Frage auf: „Gibt es pseudorationale Mengen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  derart, daß  $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  nicht pseudorational ist“. Verf. zeigt, daß es solche Mengen gibt, und behandelt außerdem noch einige Modifikationen dieser Fragestellung (dieses Ergebnis ist jedoch nicht neu; ein auf M. Kneser zurückgehendes Beispiel gibt Volkmann (dies. Zbl. **56**, 51) an).  
H. Ostmann. •

Schinzel, A. et W. Sierpiński: Sur quelques propriétés des fonctions  $\varphi(n)$  et  $\sigma(n)$ . Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 463–466 (1954).

$n$  sei eine natürliche Zahl,  $q(n)$  die Anzahl der zu  $n$  primen natürlichen Zahlen  $n$ , und  $\sigma(n)$  die Summe aller natürlichen Teiler von  $n$ . Ohne Benutzung des Satzes von Lejeune-Dirichlet über arithmetische Reihen wird gezeigt, daß es zu jeder natürlichen Zahl  $m$  natürliche Zahlen  $n, r, s$  und  $t$  gibt, die bzw.

1.  $\varphi(n-1)/\varphi(n) > m$ ,  $\varphi(n+1)/\varphi(n) > m$ ; 2.  $\varphi(r)/\varphi(r-1) > m$ ,  $\varphi(r)/\varphi(r+1) > m$ ;
  3.  $\sigma(s-1)/\sigma(s) > m$ ,  $\sigma(s+1)/\sigma(s) > m$ ; 4.  $\sigma(t)/\sigma(t-1) > m$ ,  $\sigma(t)/\sigma(t+1) > m$
- erfüllen.  
B. Stolt.

Schinzel, A.: Quelques théorèmes sur les fonctions  $q(n)$  et  $\sigma(n)$ . Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 467–469 (1954).

Seien  $m$  und  $k$  zwei natürliche Zahlen  $> 1$ . Die folgenden Sätze werden mit elementaren Methoden gezeigt. 1. Es gibt eine natürliche Zahl  $n$ , die  $\varphi(n+i)/\varphi(n+i-1) > m$  für  $i = 1, 2, \dots, k$  erfüllt. 2. Es gibt eine natürliche Zahl  $n$ , die  $\varphi(n+i)/\varphi(n+i+1) > m$  für  $i = 1, 2, \dots, k-1$  erfüllt.

B. Stolt.

Stewart, B. M.: Sums of distinct divisors. Amer. J. Math. **76**, 779–785 (1954). Es bedeute:  $I$  die Menge der natürlichen Zahlen,  $n \in I$ ,  $O$  die Menge der un-



graden Zahlen  $n > 5$ ,  $p_i$  eine Primzahl,  $\sigma(n)$  die Summe aller (natürlichen) Teiler von  $n$ ,  $\chi(n)$  die Anzahl der Zahlen, die Summen verschiedener Teiler von  $n$  sind (also  $\sigma(n) - \chi(n) \geq 0$ , und für  $n \in O$   $\sigma(n) - \chi(n) > 2$ ), und  $S^*$  die Untermenge derjenigen Zahlen von  $S \cap I$ , für die  $\sigma(n) - \chi(n)$  minimal ist. Es wird unter anderem bewiesen: (1)  $n \in I^*$ , d. h.  $\sigma(n) = \chi(n)$ , dann und nur dann, wenn entweder (a)  $n = 2^a$ ,  $a \geq 0$ , oder (b)  $n = 2^{a_0} p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ ,  $p_0 = 2 < p_1 < \cdots < p_k$ ,  $a_i \geq 1$ ,  $p_{i+1} \leq \sigma(2^{a_i} p_1^{a_1} \cdots p_i^{a_i}) - 1$ . (2) Dies sind genau die sogenannten „praktischen“ Zahlen von A. K. Srinivasan (Current Science, Bangalore-Indien 1948, 179–180). (3) Die Werte von  $\chi(n)$ ,  $\sigma(n)$  sind überall dicht im Intervall von 0 bis 1. (4)  $n \in O^*$ , d. h.  $\sigma(n) - \chi(n) = 2$ , dann und nur dann, wenn für  $i \geq 3$  entweder (a)  $d_{i+1} \leq \sigma_i - 2$ ,  $d_{i+1} \neq \sigma_i - 4$ , oder (b)  $d_{i+1} = \sigma_i - 4$ ,  $d_{i+2} = \sigma_i - 2$ , wo  $d_1 = 1 = d_2 = 3 = d_3 = 5 = \cdots = d_r = n$  die Teiler von  $n$  in natürlicher Ordnung sind und  $\sigma_i = \sum_{j=1}^i d_j$ . (5) Die Kenntnis von  $I^*$ , bzw.  $O^*$ , führt zu Lösungen des Stammbruchproblems, bzw. einer Variante davon [E. P. Starke, Amer. math. Monthly 59, 640 (1952)].

D. Tamari.

Selberg, Sigmund: Über die Summe  $\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n d(n)}$ . 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund

1953, 264–272 (1954).

Denote the sum in question by  $h(x)$ . Easy arguments show that  $0 < h(x) \leq 1$  for  $x \geq 1$ . More complicated arguments show that  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ . The author proves that

$$h(x) = \{1 + o(1)\} \left\{ \frac{1}{7 \log x} \prod_p \left(1 + \frac{1}{4p^2 - 4p}\right) \right\}^{1/2}$$

as  $x \rightarrow \infty$ . His proof uses a contour integration somewhat similar to that used by Landau in proving his asymptotic formula for the number of positive integers less than  $x$  which are expressible as a sum of two squares (Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, §§ 176–183). By a slight modification of the last stage of the argument one can replace the factor  $1 + o(1)$  by an asymptotic series (in the sense of Poincaré) of the form  $1 + \gamma_1 (\log x)^{-1} + \gamma_2 (\log x)^{-2} + \cdots$  [cf. Stanley, J. London math. Soc. 3, 232–237 (1928), 4, 32 (1929)].

P. T. Bateman.

Rodosskij, K. A.: Über die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression. Mat. Sbornik, n. Ser. 34 (76), 331–356 (1954) [Russisch].

In an earlier note (this Zbl. 51, 34) the author has sketched a simpler proof of Linnik's theorem that if  $l$  and  $D$  are coprime positive integers and  $D > 1$ , then the least prime number congruent to  $l$  modulo  $D$  is less than  $D^c$ , where  $c$  is an absolute positive constant. In the present paper, he gives the proof in full. P. T. Bateman.

Bang, Thøger: Große Primzahlen. Nordisk mat. Tidsskrift 2, 157–168 (1954) [Dänisch].

Der Verf. referiert einige Sätze über Zerlegung von Zahlen und gibt einen geschichtlichen Überblick über die bekannten großen Primzahlen. Die größte in der Arbeit mitgeteilte Primzahl ist die im Oktober 1952 mit Hilfe der Elektronenmaschine SWAC in Los Angeles gefundene Zahl  $2^{2255} - 1$ , die er im Dezimalsystem mit 687 Ziffern schreibt.

B. Stoll.

Mautner, F. I.: On congruence characters. Monatsh. Math. 57, 307–316 (1954).

Ist  $P$  der rationale Zahlkörper, so entsprechen die primitiven Kongruenzcharaktere  $\lambda$  von  $P$  eindeutig den stetigen Charakteren des direkten Produktes  $\Pi$  der zugehörigen  $p$ -adischen Einheitengruppen  $U_p$  (bei der üblichen Umgebungs-topologie). Verf. gibt eine isomorphe Einbettung der Multiplikativgruppe  $P^*$  in  $\Pi$ .

an ( $a \in P^* \leftrightarrow u(a) \in U$ ). Die Folgen  $u(1), u(2), u(3), \dots$ , bzw.  $u(q_1), u(q_2), \dots$  ( $q_n$  die  $n$ -te Primzahl) sind gleichverteilt im Sinne von Weyl und Eckmann. Hieraus folgen Beziehungen zwischen Dichteaussagen von Primzahlmengen und dem Haarschen Maß ihrer Bilder in  $U$ . — Verf. skizziert abschließend, wie sich diese Überlegungen auf algebraische Zahl- und Funktionenkörper  $K$  (über einem Galoisfeld) und auf allgemeinere Charakterfunktionen (Größencharaktere, Weilsche Charakterfunktionen) übertragen lassen: eine hier für die isomorphe Einbettung der Divisorengruppe  $I$  von  $K$  in die Idealklassengruppe  $\text{mod } D$  ( $D$  — zusammenhängende Komponente der 1) angegebene Vorschrift ist im rationalen Spezialfall  $P$  von der oben erwähnten verschieden.

*E. Lamprecht.*

**Watson, G. L.:** The representation of integers by positive ternary quadratic forms. *Mathematika*, London 1, 104—110 (1954).

Damit eine positive ternäre quadratische Form  $f$  eine positive ganze Zahl  $n$  darstellt, ist notwendig, daß  $(1) f \equiv n \pmod{m}$  für jeden Modul  $m$  lösbar ist. Eine Zahl  $n$  heiße außergewöhnlich (exceptional), wenn  $(1)$  gilt, aber  $n$  nicht durch  $f$  dargestellt wird. Ist  $n$  nicht von der Gestalt  $n_1^2 n_2$ , wo  $n_1 \equiv 1$  und  $n_2$  außergewöhnlich, so heiße  $n$  primitiv außergewöhnlich. Es sei  $E(f)$  bzw.  $E_0(f)$  die Anzahl der außergewöhnlichen bzw. der primitiv außergewöhnlichen Zahlen von  $f$ . Während der Verf. in einer andern Arbeit zeigt, daß  $E(f)$  im allgemeinen unendlich ist, wird hier gezeigt, daß  $E_0(f) = O(d^{1/2})$ , wenn nur die Determinante  $4d$  der Form hinreichend groß ist.  $\delta$  mag beliebig klein, aber positiv sein. Der Nachweis erfolgt durch Abschätzung von Charaktersummen.

*N. Hofreiter.*

**Cassels, J. W. S.:** On the product of two inhomogeneous linear forms. *J. reine angew. Math.* 193, 65—83 (1954).

Für die reellen (inhomogenen) Linearformen  $\xi = \xi(x, y) = \alpha x + \beta y + p$ ,  $\eta = \eta(x, y) = \gamma x + \delta y + q$  mit der Determinante  $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  ist nach Minkowski  $|\xi \eta| \leq 1/4$  in ganzen  $x, y$  lösbar. Nach Davenport und Heilbronn (dies. Zbl. 31, 155) muß hier  $1/4$  durch 1 ersetzt werden, wenn man auch  $\xi \eta \geq 0$  fordert, und ähnliches gilt, wenn man sogar  $\xi, \eta \geq 0$  fordert. Im Anschluß an Mordell (dies. Zbl. 42, 44) untersucht Verf. das Minimum von  $|\xi \eta|$  für ganze  $x, y$  mit  $\xi \eta \neq 0$  mit dem interessanten Ergebnis, daß dann  $1/4$  „im allgemeinen“ durch  $1/3$  ersetzt werden muß. Er nennt zwei Paare  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi_1, \eta_1)$  äquivalent, wenn es ganzzahlige Linearformen  $L_1 = ax + by + x_0$ ,  $L_2 = cx + dy + y_0$  ( $a\delta - bc = \pm 1$ ) und Zahlen  $\lambda, \mu (\neq 0)$  gibt, so daß  $\xi_1(L_1, L_2) = \lambda \xi(x, y)$ ,  $\eta_1(L_1, L_2) = \mu \eta(x, y)$  gelten. Wird  $M = \min |\xi \eta|$  für ganze  $x, y$  mit  $\xi \eta \neq 0$ , ferner  $\mathfrak{M} = M + 1/4$  gesetzt, so ist  $\mathfrak{M}$  klasseninvariant (d. h. für äquivalente Formenpaare gleich). Vom klassischen Fall, wo  $(\xi, \eta)$  einem homogenen Formenpaar äquivalent ist, wird abgesehen; dieser Fall tritt gewiss ein, wenn  $\xi = 0, \eta = 0$  simultan ganzzahlig lösbar sind. Ebenfalls wird von  $\xi = x, \eta = y + d$  ( $d$  nicht ganz) und den hierzu äquivalenten Paaren abgesehen, für die trivial  $\mathfrak{M} = \min |d - n|$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ist. Über die übrigen Klassen wird bewiesen, daß es ihrer nur abzählbar viele mit  $\mathfrak{M} \leq 1/3$  gibt, daß dagegen für jedes  $\epsilon > 0$  un abzählbar viele solche Klassen mit  $\mathfrak{M} \leq 1/3 + \epsilon$  vorhanden sind. In den erstgenannten Klassen gibt es ein Paar  $(\xi, \eta)$  oder  $(\eta, \xi)$  mit  $\xi = x + \rho y + \tau$ ,  $\eta = x - \sigma y$ , wo  $\rho, \sigma, \tau$  in einer Tabelle aufgezählt werden, auch wird jedesmal der Wert von  $\mathfrak{M} (\leq 1/3)$  explizit angegeben. Z. B. wenn  $r = 1$ ,  $\rho = p$ ,  $p_{n-1}$  ( $n \geq 4$ ,  $p_n$  die  $n$ -te Fibonacciische Zahl, d. h.  $p_0 = 0, p_1 = 1, \dots, p_n = p_{n-2} + p_{n-1}$ ) oder  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  und  $\sigma = 5$  ist, so ist  $\mathfrak{M} = 5(1 - \rho^2)/(5 + \rho) (\leq 1/3)$ . Der Beweis beider Sätze stützt sich auf mehrere Lemmata und ist ziemlich kompliziert.

*L. Rédei.*

**Barnes, E. S.:** The inhomogeneous minimum of a ternary quadratic form. *Acta math.* 92, 13—33 (1954).

Let  $Q(x, y, z)$  be an indefinite ternary quadratic form of determinant  $D \neq 0$ . Write  $M(Q; x_0, y_0, z_0) \equiv g$ , i. b.  $|Q(x, y, z)|; x \equiv x_0, y \equiv y_0, z \equiv z_0 \pmod{1}$  and



$M(Q) = 1$  u. b.  $M(Q; x_0, y_0, z_0)$ . The author shows that  $M(Q) = \frac{4}{15} D^{1/3}$  unless  $Q$  is equivalent to one of  $Q_1 = x^2 - y^2 - z^2 + x y - 7 y z + 2 x$ ,  $Q_2 = 2 x^2 - y^2 + 15 z^2$  and that  $M(Q_i; x_0, y_0, z_0) \sim \frac{4}{15} D^{1/3}$  ( $i = 1, 2$ ) unless  $x_0 = y_0 = z_0 \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ . This improves a result of Davenport (this Zbl. 30, 297). The proof uses results of the author and Swinnerton-Dyer on the „asymmetric“ inhomogeneous minima of binary quadratic forms (see the next review). J. W. S. Cassels.

**Barnes, E. S. and H. P. F. Swinnerton-Dyer: The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. III.** Acta math. 92, 199—234 (1954).

(Part II, this Zbl. 47, 281.) Let  $\mathcal{L}$  be an inhomogeneous lattice in the  $(\xi, \eta)$ -plane of determinant 1. It was shown by Delone (this Zbl. 37, 316) that there are always four points  $A, B, C, D$  of  $\mathcal{L}$ , one in each quadrant, forming a parallelogram of determinant 1, a „divided cell“, provided that  $\mathcal{L}$  has no point on  $\xi\eta = 0$ . The authors prove this and show that in general the divided cells may be arranged in an infinite sequence  $A, B_n, C, D_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) related by a simple algorithm. They use this algorithm to investigate the (inhomogeneous) critical determinant  $D_m$  of the region  $R_m: 1 - \xi\eta \leq m$  ( $m > 1$ ) (i. e.  $R_m$  contains a point of  $\mathcal{L}$  if  $A < D_m$  but there is some „critical“  $\mathcal{L}$  with  $1 - D_m$  having no point in  $R_m$ ). They show that a critical  $\mathcal{L}$  is always of the form  $\xi = \alpha(x - \frac{1}{2}) + \beta(y - \frac{1}{2})$ ,  $\eta = \gamma(x - \frac{1}{2}) + \delta(y - \frac{1}{2})$  ( $x, y$  integers) and evaluate  $D_m$  for the range  $1.9 \leq \frac{21}{11} \leq m \leq m_0 = 1098 \frac{1}{10} + 6750 \frac{1}{4810} \approx 2.1$  near  $m = 2$ . Here  $D_m$  is a complicated function of  $m$  with infinitely many discontinuities near  $m_0$ . In an obvious sense  $D_m$  is isolated in this range except at  $m_0$ ; where it is not. An explicit estimate is given of the second minimum for  $m = 2$  much better than that of Davenport (this Zbl. 30, 297). The authors remark that this behaviour of  $D_m$  is typical and that their methods will evaluate  $D_m$  for any given  $m$ . In the course of their work the authors prove independently many results of Blaney (this Zbl. 36, 26). J. W. S. Cassels.

**Barnes, E. S.: The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. IV.** Acta math. 92, 235—264 (1954).

The author continues the discussion of the „algorithm of the divided cell“ (see preceding review). He shows that every such algorithm defines a sequence of pairs of integers  $h_n, k_n$  satisfying certain simple conditions and conversely every such sequence defines an inhomogeneous lattice  $\mathcal{L}$  possessing the algorithm. The sums  $h_n + k_n$  characterize the corresponding homogeneous lattice. It is claimed that this algorithm is more effective than the methods used in papers I, II of the series (this Zbl. 46, 276; 47, 281). As an illustration it is shown that  $M(x^2 - 19y^2) = \frac{17}{11}$  (wrongly given as  $\frac{17}{11}$  in I) and  $M(x^2 - 46y^2) = \frac{17}{11}$ ; these being two cases of particular difficulty. The reviewer remarks that H. J. Godwin has independently not merely obtained  $M(x^2 - 46y^2)$  but filled in all other gaps in the table in I [J. London math. Soc. 30, 114—119 (1955)]. J. W. S. Cassels.

**Hlawka, Edmund: Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen.** J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 57, 37—55 (1954).

Keller's recent contribution on geometry of numbers to the new „Enzyklopädie“ (this Zbl. 55, 277) ranges over a big field and is therefore rather condensed; also it deals only with results up to 1951. The present report will therefore be much appreciated by all working in the subject or starting to do so. It discusses mainly the newer general methods, in particular those based on the compactness property of bounded sets of lattices, and gives a careful bibliography. K. Mahler.

**Hlawka, Edmund: Inhomogene Minima von Sternkörpern.** Monatsh. Math. 58, 292—305 (1954).

The author proves a far-reaching generalisation of the theorem of Davenport-Khintchine that if  $f(x, y)$  is an indefinite quadratic form of determinant  $D \neq 0$

then there are real  $x_0, y_0$  such that  $|f(x, y)| \geq c |D|^{1/2}$  for all  $x \equiv x_0, y \equiv y_0$  (1) where  $c$  is an absolute constant ( $c \geq 1/128$ ). Let  $f_1 = f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), f_2 = f_2(x_{n_1+1}, \dots, x_n), n = n_1 + n_2$ , be the distance functions of star-bodies  $S_1, S_2$  in  $n_1$ - and  $n_2$ -dimensional space respectively. Let the automorphic star body  $S$  be defined by  $f < 1$ , where  $f^n = f_1^{n_1} f_2^{n_2}$ . If  $S_1$  and  $S_2$  are both convex then there is an  $\xi$  such that

$$f(\xi') \geq c_n^{-1} \min \mu_n(S(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G}), \quad \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1$$

with  $c_n = 128 n^{7/2} (n!)^5$  for all  $\xi'$  such that  $\xi' - \xi \in \mathfrak{G}$ . Here  $S(\lambda_1, \lambda_2)$  is the body defined by  $\max(\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2) < 1$  and  $\mu_n(S(\lambda_1, \lambda_2), \mathfrak{G})$  is its  $n$ -th homogeneous minimum with respect to a given lattice  $\mathfrak{G}$ . The conclusion continues to hold with a more complicated expression on the right hand side if only one of  $S_1, S_2$  is convex. The author shows indeed that indenumerably many  $\xi$  with the required property exist. This result contains (apart from the value of the relevant constants) results of Davenport on the inhomogeneous minima of factorisable ternary and quartic forms (this Zbl. 37, 308; 39, 31). The reader will be mightily perplexed until he realizes that in (2), (7), (11), (11'), (12) it is only the sign of the L. H. S. which is equal to the R. H. S.

*J. W. S. Cassels.*

**Hlawka, Edmund:** Zur Theorie der Überdeckung durch konvexe Körper. Monatsh. Math. 58, 287—291 (1954).

Let  $K$  be an open symmetric convex body in  $r$ -dimensional space of volume  $J$  and  $f(\xi)$  the corresponding distance function. For a lattice  $\mathfrak{G}$  of determinant  $m$  write  $E(K, \mathfrak{G}) = \sup_{\mathfrak{p}} \inf_{\mathfrak{p}' - \mathfrak{p} \in \mathfrak{G}} f(\mathfrak{p}')$  the inhomogeneous minima of  $K$  with respect to  $\mathfrak{G}$  (the author calls it the Exzentrizität). Let  $\mu_1, \dots, \mu_n$  be the successive homogeneous minima of  $K$  with respect to  $\mathfrak{G}$  and for real  $x$  let  $\{x\}$  denote the integer next greater than  $x$ , so  $\{x\} = [x] + 1$ . The author shows that

$$(1) \quad 2E(K, \mathfrak{G}) \leq v^{1/n} \{v\}^{1-1/n} \mu_1 \quad \text{and indeed} \quad (2) \quad 2E(K, \mathfrak{G}) \leq u^{1/n} \{u\}^{1-1/n} \mu_n$$

where  $v = 2^n m/J \mu_1^n$  and  $u = 2^n m/J \mu_1 \cdots \mu_n$ . Also (3)  $2E(K, \mathfrak{G}) \leq \omega^{1/n} \{\omega\}^{1-1/n}$ , where  $\omega = 2^{n-1} (A+1) m/J$  and  $A$  is the number of points of the lattice in  $K$  (including the origin, so  $A$  is odd). An example shows that (3) sometimes cannot be improved. The methods are a slight variation on those in the author's paper, this Zbl. 47, 50. For a yet stronger result than (1) still involving only  $\mu_1$  see M. Kneser, Math. Z. 61, 429—434 (1955).

*J. W. S. Cassels.*

**Mahler, Kurt:** On a problem in the geometry of numbers. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 38—41 (1954).

Let  $K$  be a convex body in  $n$ -dimensional space,  $K_s$  the portion of it in  $|x_n| \leq s$  ( $s > 0$ ) and  $\lambda(K_s)$  the corresponding lattice constant. The author conjectures that  $s^{-1} \lambda(K_s)$  is a decreasing function of  $s$  and gives a proof for  $n = 2$ .

*J. W. S. Cassels.*

**Rademacher, Hans:** Dedekind sums and lattice points in a tetrahedron. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises 49—53 (1954).

Sei  $((x)) = 0$  für ganzes und  $= x - [x] - \frac{1}{2}$  für nicht ganzes  $x, s(h, k) = \sum_{\mu=1}^k \mu \binom{h+\mu}{k}$  die Dedekindsche Summe und  $f(h, k) = s(h, k) - \frac{h}{12k}$ . Es wird für ganze, paarweise teilerfremde  $a, b, c$  die Formel  $f(b, c, a) + f(a, c, b) + f(c, a, b) = -abc/12 \pmod{2}$  und die dazu nach einer Formel von Mordell äquivalente  $f(b, c, a) + f(c, a, b) + f(a, b, c) \equiv -1/4 - abc/12 + 1/12abc \pmod{2}$

bewiesen. Mittels einer zweiten Formel von Mordell ergibt sich daraus: Sind  $a, b, c$  ganz und paarweise teilerfremd und ist  $N$  die Zahl der Gitterpunkte im Tetraeder  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 0 < x/a + y/b + z/c < 1$ , so ist

$$N \equiv \frac{1}{4} (a+1)(b+1)(c+1) \pmod{2}.$$



Bei den Beweisen werden Sätze aus Rademacher und Whitman (dies. Zbl. 25, 287) und Mordell (dies. Zbl. 43, 51) verwendet.

G. Lochs.

Linnik, Ju. V.: Die asymptotische Verteilung der Gitterpunkte auf der Kugel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 909—912 (1954) [Russisch].

The author is concerned to prove the following conjecture: the distribution of the primitive integral points  $(x, y, z)$  on the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = m$  tends to uniformity as  $m \rightarrow \infty$  through those values for which  $x^2 + y^2 + z^2 = m$  is soluble in integers. He proves the conjecture if  $m$  runs through values tending to infinity satisfying the farther condition  $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$  where  $q$  is any odd prime. He states that it is also true if  $m$  runs through values such that  $\sum \chi_m(n) n^{-s}$  has no zeroes in  $s = 1 + i t$  where  $\chi_m$  is a real non-principal character modulo  $m$ . More precisely, he proves the following theorem: Let  $q$  be an odd prime,  $\lambda > 0$  real, and  $I$  a convex region of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = m$  with a piece-wise smooth boundary and area  $A = 4\pi \lambda m$ . Let  $H_0(I)$ ,  $H_0(m)$  be the number of primitive integral points in  $I$  and on  $x^2 + y^2 + z^2 = m$  respectively. Then

$$H_0(I) = (A/4\pi m) H_0(m) (1 + o_0(\lambda, m, q))$$

where  $o_0(\lambda, m, q)$  is bounded by a constant depending only on  $\lambda, m, q$  which  $\rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty$ ,  $(-m/q) = 1$  for fixed  $\lambda, q$ . The proof uses quaternions [cf. Linnik and Mal'cev, this Zbl. 52, 42; Mal'cev, Doklady Akad. Nauk, n. Ser. 93, 771 (1953)]. An essential tool is the following lemma ascribed to V. A. Zalgaller: the surface of the unit sphere can be completely covered by equilateral triangles of the same arbitrarily small diameter such that the total area covered by more than one triangle is arbitrarily small and no point is covered by more than six triangles.

J. W. S. Cassels.

Mal'cev, A. V.: Über Gitterpunkte auf Ellipsoiden. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 253—255 (1954) [Russisch].

Enunciations without proofs of theorems about the distribution of integer points on the surface  $f(x, y, z) = m$  where  $f$  is an integral definite ternary quadratic form, and  $m > 0$  is an integer. For similar results when  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  cf. Linnik and Mal'cev (this Zbl. 52, 42) and other recent work of these authors.

J. W. S. Cassels.

Breusch, Robert: A proof of the irrationality of  $\pi$ . Amer. math. Monthly 61, 631—632 (1954).

Es wird ein Irrationalitätsbeweis für  $\pi$  mitgeteilt, der in bezug auf die benutzten Hilfsmittel sehr einfach ist; insbesondere tritt keine Integration auf. Grundlage des Beweises bildet die (durch Induktion zu beweisende) Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^m \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} = P_m(x) \cos x + Q_m(x) \sin x,$$

die für  $m = 0, 1, 2, \dots$  und gewisse ganzzahlige Polynome  $P_m$  und  $Q_m$  gilt; daraus wird durch eine indirekte Schlußweise die Behauptung gefolgert. In analoger Weise kann auch die Irrationalität von  $e^m$  ( $m > 0$ , ganz) bewiesen werden. F. Kersch.

Geiringer, Hilda: On the statistical investigation of transcendental numbers. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises 310—322 (1954).

The author discusses the statistical behaviour of the digits 0, 1, ..., 9 and groups of digits in the first 2,010 and 2,035 decimals of  $e$  and  $\pi$ , respectively, as computed on „Eniac“. In the case of  $e$  the digits show a surprisingly uniform distribution; but a footnote suggests that this may not continue if more and more places are considered.

K. Mahler.

## Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Haupt, O. et Chr. Pauc: Propriétés de mesurabilité de bases de dérivation. *Portugaliae Math.* **13**, 37—54 (1954).

Durch eine Präbasis  $\alpha$  wird jedem Punkt  $x$  einer Teilmenge  $E(\alpha)$  der betrachteten Grundmenge  $R$  eine nicht leere Menge  $\alpha(x)$  von Moore-Smithschen Mengenfolgen, die konvergent gegen  $x$  heißen, zugeordnet. Jede konfinale Teilfolge einer Folge aus  $\alpha(x)$  konvergiere ebenfalls gegen  $x$ .  $v(g)$  bedeute das System der „Konstituenten“ von  $g$ , d. h. der in  $g$  auftretenden Mengen, wenn  $g \in \alpha(x)$ , und  $v(\alpha)$  das System aller Konstituenten aller Folgen aller  $\alpha(x)$ . Es werden nun sehr allgemeine hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß  $E(\alpha)$  und die Definitionsbereiche  $E(\alpha')$  gewisser Unterbasen  $\alpha'$  von  $\alpha$  meßbar sind in bezug auf die  $n$ -Vervollständigung  $\mathfrak{z}^*$  einer Booleschen  $\sigma$ -Mengenalgebra  $\mathfrak{z}$  in  $R$ , wobei  $n$  ein  $\sigma$ -Ideal in  $\mathfrak{z}$  darstellt:  $A_\alpha$ . Für jedes  $g$  eines beliebigen  $\alpha(x)$  liegt eine reelle, endliche, positive „Bewertung“  $\alpha(V, g, x)$  der Konstituenten  $V$  von  $g$  vor, so daß  $\lim_r \alpha(V, g, x) = 0$ , und  $\alpha(V, g', x) \leq \alpha(V, g, x)$ , wenn  $g'$  konfinal in  $g$ .  $A_\alpha$ .  $\alpha$  ist „ $W$ -gesättigt“, d. h. jeder Konstituenten  $V$  von  $g$  mit  $g \in \alpha(x)$  ist eine Menge  $W(V, g, x)$  zugeordnet, so daß jede Folge  $(V_m)_{m=1,2,\dots}$  mit  $\lim_m \alpha(V_m, g_m, x_m) = 0$ , bei der alle

$W(V_m, g_m, x_m)$  einen festen Punkt  $x$  enthalten, eine gegen  $x$  konvergierende Teilfolge besitzt.  $M$ . Alle  $W(V, g, x)$  sind  $\mathfrak{z}^*$ -meßbar.  $U$ . Bei jeder  $W$ -gesättigten Unterbasis  $\alpha'$  von  $\alpha$  enthält das System aller  $W(V, g, x)$  mit  $V \in v(g)$ ,  $g \in \alpha(x)$ , und  $x \in E(\alpha')$  eine abzählbare Überdeckung von  $E(\alpha')$  mod  $n^*$  ( $n^*$  ist die  $n$ -Vervollständigung von  $n$ ). Für die  $\mathfrak{z}^*$ -Meßbarkeit der oberen und unteren Derivierten jeder in  $v(\alpha)$  erklärten reellen Funktion nach einer beliebigen anderen, doch endlichen derartigen Funktion reichen hin:  $A_\alpha$ ,  $A_\alpha$  und die  $\mathfrak{z}^*$ -Meßbarkeit der Definitionsbereiche aller  $W$ -gesättigten Unterbasen von  $\alpha$ . — In Anwendungen auf die klassischen Fälle (euklidischer, metrischer Raum), auf die Ableitungsbasen von de la Vallée Poussin (durch abzählbare Folgen von Zerlegungen erzeugt) und auf die von A. Denjoy ist  $W(V, g, x) = V$ , und  $\alpha(V, g, x)$  bedeutet den Durchmesser von  $V$ , den reziproken Index der Zerlegung, der  $V$  angehört, oder das Maß von  $V$ . — Zum Schluß werden Basen betrachtet, die in bezug auf eine Denjaysche regulär sind.

K. Krickeberg.

McMinn, Trevor J.: Measure splitting and average measurability. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 420—429 (1954).

Gegenstand der Untersuchung sind, kurz gesagt, nicht leere Systeme  $F$  von abzählbar vielen, fremden Mengen  $\tilde{X}$  je von positivem „Maß“  $\mu$  mit der Eigenschaft, daß die Vereinigung von höchstens  $n$  der  $\tilde{X} \in F$  stets das innere Maß Null hat („ $F$   $n$   $\mu$  splits“). — Im einzelnen: Bezeichnungen:  $\mathfrak{Z}$  Grundmenge,  $S$  Boolescher Verband der Teilmengen von  $\mathfrak{Z}$ , in dem sich alles Weitere abspielt. Ist  $T$  Teilsystem von  $S$  (also  $T \subset S$ ), so bezeichne  $\sigma T$  die Vereinigung aller  $\tilde{X} \in T$  und  $N(T)$  die Anzahl der Elemente (d. h. Mengen) von  $T$ , falls  $T$  endlich ist, sonst  $N(T) = \infty$ . Ferner sei  $\mu|S$  eine „Maßfunktion“ über  $S$ , also  $\mu$  reell, nicht-negativ mit  $\mu(\mathfrak{A}) \leq \sum \mu(\mathfrak{A}_i)$ , wenn  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \cup \dots$ . Es sei  $S(\mu)$  der Boolesche  $\sigma$ -Verband der im Sinne von Carathéodory  $\mu$ -meßbaren Mengen. Es sei  $\mu(\mathfrak{A}) = \sup(\mu(\mathfrak{B}))$ ;  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ ;  $\mathfrak{B} \in S(\mu)$  das durch  $\mu|S(\mu)$  induzierte innere  $(\mu)$ -Maß, entsprechend  $\bar{\mu}|S$  das äußere  $(\mu)$ -Maß und  $\mu' = \frac{1}{2}(\mu + \bar{\mu})$  das  $(\mu)$ -Mittelmaß. Weiter soll „ $F$   $n$   $\mu$  splits“ bedeuten:  $F \subset S$ ,  $F$  abzählbar und die  $\tilde{X} \in F$  paarweise fremd mit  $\mu(\tilde{X}) = 0$  mit  $\sigma F \in S(\mu)$ ; sind  $\tilde{X}_i \in F$ ,  $i = 1, \dots, k$  mit  $k \leq n$  beliebig gewählt, so ist  $\mu(\tilde{X}_1 \cup \dots \cup \tilde{X}_k) = 0$ . Ferner bedeutet „ $G$   $\mu$  straddles  $F$ “;  $G \subset S$  abzählbar,  $\sigma F \subset \sigma G$  und für beliebige  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in F$ ,  $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \in G$  mit  $\mu(\mathfrak{A}\mathfrak{A}') + \bar{\mu}(\mathfrak{B}\mathfrak{B}') = \dots = \infty$ .



gilt  $\mu(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}) = 0$ . — An Ergebnissen seien erwähnt: (I) Vor.:  $n, k$  natürliche Zahlen mit  $n + k \leq N(F)$  und  $F \cap \mu$  splits mit  $\mu(\sigma F) < \infty$ . Beh.: Es existiert  $F' \subset S$  mit  $N(F') = k$ ,  $\sigma F' = \sigma F$  und  $F' \cap \mu$  splits. — (II) Vor.:  $F = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ,  $\mu(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}) < \infty$ ,  $\mathfrak{A} \perp S(\mu')$  und  $F \cap \mu$  splits. Beh.: Es existiert ein  $F'$  mit  $N(F') = 3$ ,  $\sigma F' = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$  und  $F' \cap \mu$  splits. — (III) Vor.:  $S(\mu') \subset S(\bar{\mu})$ ,  $F = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  mit  $\mu(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}) < \infty$  und  $F \cap \mu$  splits. Beh.: Es existiert ein  $G$  mit  $N(G) = 3$ ,  $\sigma G = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$  und  $G \cap \mu$  splits. — (IV) Vor.: Zu jedem  $F = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  mit  $\mu(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}) < \infty$  und  $F \cap \mu$  splits existiert  $G$  mit  $G \cap \mu$  straddles  $F$ . — Beh.:  $S(\mu') \subset S(\mu)$ . — Mit Hilfe von (III) und (IV) erhält man:  $S(\mu') \subset S(\mu)$  genau dann, wenn folgendes gilt: Zu allen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  bzw. allen  $F = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  mit  $\mu(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}) < \infty$  und  $F \cap \mu$  splits existiert  $G$  mit  $N(G) = 3$ ,  $\sigma G = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$  und  $G \cap \mu$  splits.

Otto Haupt.

Tsurumi, Shigeru: On the ergodic theorem. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 53—68 (1954).

Setting.  $(X, \mathfrak{B}, m)$ : measure space.  $Y_1, \dots, Y_k, \dots$ : sequence of disjoint  $\mathfrak{B}$ -sets with  $m(Y_k) < \infty$ ,  $X = \bigcup Y_k$ .  $A, B$ : generic  $\mathfrak{B}$ -sets.  $T$ : mapping of  $X$  into itself, which is measurable (i. e.  $T^{-1}A \in \mathfrak{B}$ ) and non-singular (i. e.  $(m(A) = 0) \rightarrow (m(T^{-1}A) = 0)$ ).  $M^*(B, A) = \limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m(B \cap T^{-i}A)$ .  $M^*(X, A) = M^*(A)$ .  $\chi(A) = \sup \sum M^*(A_i)$  for all countable  $\mathfrak{B}$ -partitions of  $A$ . Two measures  $\lambda$  and  $\mu$  defined on  $\mathfrak{B}$  are „equivalent“ if  $(\lambda(A) = 0) \sim (\mu(A) = 0)$ .  $A$  is  $T$ -invariant if  $A$  and  $T^{-1}A$  differ by  $m$ -nullsets. Conditions. There exists a constant  $K$  such that (I)  $0 < M^*(A) \leq K \cdot m(A)$ , whenever  $m(A) > 0$ . (I')  $M^*(A) \leq K \cdot m(A)$ . There exists an expanding sequence  $X_1, \dots, X_j, \dots$  of  $\mathfrak{B}$ -sets of finite measure, whose union (or limit) is  $X$ , and a constant  $K$  such that (II)  $0 < \sup M^*(X_j, A) \leq K \cdot m(A)$ , whenever  $m(A) > 0$ , (II')  $M^*(X_j, A) \leq K \cdot m(A)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . (B) For any function  $f \in L(X, \mathfrak{B}, m)$ , the  $T$ -means of  $f$  have a limit  $\tilde{f}(x)$  almost everywhere and  $\tilde{T}f = \tilde{f} \in L(X, \mathfrak{B}, m)$ . General idea of the paper. The distinction between the finite and the non-finite cases is worked out clearly in the proofs and emphasized by counter-examples. The author borrows from C. Ryll-Nardzewski (this Zbl. 44, 123) some parts of proofs and a lemma (applied to  $T$ ) asserting the continuity of a positive, additive and homogeneous operator in an  $L$ -space. Theorem 1. (I)  $\rightarrow$  (B). In case  $m$  is finite (I)  $\sim$  (I')  $\sim$  (B). Theorem 2. (II)  $\rightarrow$  (B). (B)  $\rightarrow$  (II'). Theorem 3. If there exists a finite  $T$ -invariant measure equivalent to  $m$ , then (II)  $\sim$  (II')  $\sim$  (B). Theorem 4. If  $X$  is the union of countably many invariant subsets of finite measure, then (II)  $\sim$  (II')  $\sim$  (B). Counter-examples show that the implications (B)  $\rightarrow$  (II), (II')  $\rightarrow$  (B), (B)  $\rightarrow$  (I') do not hold in case  $m$  is not finite. The implication (I')  $\rightarrow$  (B) remains undecided. Hints to the proof of (I)  $\rightarrow$  (B). Assuming (I) the author defines  $\beta(A) = \lim \chi(T^{-n}A)$ , when  $m(A)$  is finite,  $\gamma(A) = \sum \beta(A \cap Y_k)$ .  $\gamma$  is a  $T$ -invariant measure (i. e.  $\gamma(A) = \gamma(T^{-1}A)$ ). The positiveness of  $M^*$  implies the equivalence of  $\gamma$  to  $m$ . G. Birkhoff's ergodic theorem is applied to  $L(X, \mathfrak{B}, \gamma)$ .

Chr. Pauc.

McKean jr., Henry P.: Notes on some finitely additive measures. J. London math. Soc. 29, 440—449 (1954).

Setting.  $S = [0, 1)$ .  $m$ : Lebesgue measure on  $S$ .  $\mathfrak{M}$ : family of the  $m$ -measurable subsets of  $S$ .  $\beta$  (ergodic transformation): one-one measure-preserving transformation of  $S$  onto itself, leaving invariant no  $\mathfrak{M}$ -set of measure other than 0 and 1.  $\chi_E(u)$ : characteristic function of the subset  $E$  of  $S$ .  $\mathfrak{M}_\beta$ : family of the sets  $E$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \chi_E(\beta^i u)$  exists and has a constant value, denoted by  $m_\beta(E)$ , almost everywhere.  $\mathfrak{M}_0$ : family of the  $\mathfrak{M}_\beta$ -sets  $E$  for which  $m_\beta(E) = 0$ . According to G. Birkhoff's ergodic theorem,  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_\beta$  and  $m(M) = m_\beta(M)$  on  $\mathfrak{M}$ . Two

ergodic transformations  $\alpha$  and  $\beta$  are „weakly dependent“ when to almost all  $u \in S$  correspond positive integers  $s_1 = s_1(u)$  and  $s_2 = s_2(u)$  such that  $\alpha^{s_1} u = \beta^{s_2} u$ .  $\alpha$  is „strongly dependent“ on  $\beta$  when to almost all  $u \in S$  corresponds a positive integer  $s = s(u)$  such that  $\alpha u = \beta^s u$ . Theorem I.  $m_\beta$  is a proper extension of  $m$ .  $\mathfrak{M}_\beta$  is closed under complementation and addition of disjoint sets but not under intersection. Theorem II.  $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_\beta$  when and only when  $\alpha$  and  $\beta$  are weakly dependent. Otherwise there is no relation of inclusion between them.  $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{M}_\beta$  when and only when  $\alpha$  is strongly dependent on  $\beta$ , the equality holding when and only when  $\alpha u = \beta u$  almost everywhere. Theorem III. For each  $E \in \mathfrak{M}_\beta$ ,  $m_\beta(E)$  lies between the inner and the outer measure of  $E$ .  $m_\beta$  is not countably additive. To each  $A \in \mathfrak{M}_\beta$  and each  $a$  between 0 and 1 there exists a subset  $A(a)$  of  $A$  such that  $m_\beta(A(a)) = a m_\beta(A)$ . Hints to the proofs. The  $\beta$ -periodic points form an  $m$ -nullset  $P(\beta)$ . Using the axiom of choice a representative is picked of each non-periodic  $\beta$ -orbit, forming a set  $E(\beta)$ . By means of the decomposition  $S = P(\beta) + \bigcup \beta^i E(\beta)$  ( $i$ : any integer), properties of  $m_\beta$  are expressed in terms of density properties for sequences of zeros and ones. Here is the „construction“ of  $A(a)$  in Th. III: To each terminating binary  $b = \sum_{j=0}^{j=q} 2^{-p_j}$  ( $1 \leq p_0 < p_1 < \dots < p_q$ ) is ordered the sequence  $\mathfrak{X}(b)$  of the integers  $2^{p_j} i + (2^j - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , in the natural order. Thus  $(b_1 \leq b_2) \Rightarrow (\mathfrak{X}(b_1) \subset \mathfrak{X}(b_2))$  and  $\mathfrak{X}(b)$  has density  $b$ . Of each non-periodic orbit  $O$  intersecting  $A$  is extracted a point  $v$  in  $A$ ,  $B$  denotes their set. To each  $v \in B$  is associated the sequence of integers  $n_i(v)$ ,  $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  such that  $b^{n_i(v)} v \in A$ ,  $n_i(v) < n_{i+1}(v)$ .  $A(b)$  is defined as  $\bigcup_{v \in B} \bigcup_{i \in \mathfrak{X}(b)} b^{n_i(v)} v$ ,  $A(a)$  as  $\bigcup A(b)$  for all terminating binaries  $b \leq a$ . Chr. Pauc.

Besicovitch, A. S. and S. J. Taylor: On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure. J. London math. Soc. 29, 449—459 (1954).

Es sei  $J = [0, 1]$  bzw.  $J$  das abgeschlossene bzw. offene Einheitsintervall auf der Zahlgeraden und  $m$  das (lineare) Lebesguesche Maß (in  $J$ ). Ist dann die Menge  $E \subset J$  mit  $m(E) = 0$  abgeschlossen, so ist  $J - J \setminus E = E'$  Vereinigung abzählbar vieler offener, fremder Intervalle, für deren Längen  $a_n$  gilt (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ ; dabei sollen o. B. d. A. die  $a_n$  so numeriert sein, daß  $0 < a_{n+1} \leq a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Umgekehrt „gehören“ zu jeder nicht zunehmenden Folge  $f = \{a_n\}$  positiver  $a_n$ , die (1) genügt, abgeschlossene  $E$  mit  $m(E) = 0$ . In der vorliegenden Arbeit werden Beziehungen aufgestellt zwischen Eigenschaften von  $f$  und dem  $q$ -dimensionalen Maß von zu  $f$  gehörigen  $E$ , wobei  $0 < q \leq 1$ . — Bezeichnungen:  $r_n = a_n + a_{n+1} + \dots$ ;  $L(q, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n(n^{-1} r_n)^q)$  und  $b(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , wenn  $b_n$  so gewählt ist, daß  $n(n^{-1} r_n)^{b_n} = 1$ . — Sätze: (1) Gehört  $E$  zu  $f$ , wobei (I) erfüllt ist, so ist für  $0 < q \leq 1$  das  $q$ -dimensionale Maß von  $E$  nicht größer als  $L(q, f)$ . — (2) Ist (I) für  $f$  erfüllt, gilt ferner  $b(f) > 0$ ,  $0 < q \leq b(f)$  und ist  $c$  eine Zahl mit  $0 \leq c \leq 4^{-1} L(q, f)$ , dann gehört zu  $f$  ein  $E$  mit  $\dim E = q$  und dem  $q$ -dimensionalen Maß  $c$ . — (3) Zum Schluß wird mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse eine in der Theorie der Brownschen Bewegung auftretende Menge untersucht. Otto Haupt.

Pchakadze, Š. S.: Über Mengen, die absolut vom Maße Null sind. Soobsčeniya Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 15, 201—205 (1954) [Russisch].

The paper is dealing with measure problems in a  $R^n$  and contains several definitions, problems and announcement of 8 theorems. A set  $X$  is said to be absolutely of zero measure (a. z. m.), provided for each set  $X'$  which is of countable configuration of  $X$  (i. e.  $X'$  is the union of countable many sets each of which is congruent with a subset of  $X$ ), there exists a resolvable class and that for each such class  $M$  and each measure  $\mu$  on  $M$  one has  $\mu(X') = 0$ . A class  $M$  of sets is resolvable, provided



that 1.  $M$  is a  $\sigma$   $\delta$ -system containing:  $O$ ,  $R^n$  and each set  $S \leq R^n$  which is congruent with an element of  $M$ ; 2. there exists a measure in  $M$  i. e. a real valued completely additive mapping  $\mu$  of  $M$  so that  $\mu(R_0^n) = 1$  and  $\mu(X) = \mu(Y)$  provided  $X \cong Y$ ;  $R_0^n$  designs the unit cube in  $R^n$ . A set  $S$  is normal, if  $S = L \cup X_1 \setminus X_2$ ; here  $L$  denotes Lebesgue measurable set;  $X_1, X_2$  denote a. z. m. sets. Problems: I<sub>1</sub> Does there exist a non measurable a. z. m. set? II<sub>1</sub> Is the union of countable many a. z. m. sets again an a. z. m. set? (the union of a finite number of a. z. m. sets is again such a set; Th. 1). III<sub>1</sub> Is  $R^n$  such a union? In theorems 2, 3, 5, 6, one indicates characteristic properties of a. z. m. sets in terms of „exhausting“ and „vanishing“ sets. To each normal set  $S$  corresponds a proper measure which does depend neither upon the resolvable class  $M$  containing  $S$  nor upon the measure in  $M$  (th. 7).

G. Kurepa.

Morse, Anthony P.: On intervals of prescribed lengths. Proc. Amer. math. Soc. 5, 407—414 (1954).

Es sei  $I' = [0, 1]$ ,  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $(\lambda_n)_{n \in \omega}$  eine feste Folge nichtnegativer Zahlen mit  $\sum_{n \in \omega} \lambda_n = 1$  und  $L$  das Lebesguesche Maß. Dann gibt es eine Menge  $A$  mit

$L(A) = 0$  und  $A \subset I'$ , die von keiner Folge  $(J_n)$  mit  $L(J_n) = \lambda_n$  und  $J_n \subseteq I'$  überdeckt werden kann. Ersetzt man  $I'$  durch  $I = ]0, 1[$ , so gilt die entsprechende Aussage im Fall  $0 < \lambda_0 < 1$  dann und nur dann, wenn die Menge aller Summen  $\sum_{n \in \alpha} \lambda_n$ ,

wobei  $\alpha$  alle Teilmengen von  $\omega$  durchläuft, das Lebesguesche Maß Null hat.

K. Krickeberg.

● Sierpinski, Waclaw: On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition. Lucknow University Studies, No. XX, Lucknow: The Lucknow University 1954, 117 p.

Die Themen des kleinen anregenden Buches entstammen einer Gastvorlesung, die der Verf. im Jahre 1949 an der Universität Lucknow hielt. Es werden in leicht verständlicher Weise die reizvollen Ergebnisse erörtert, die sich im Zusammenhang mit den Begriffen der Kongruenz und der Zerlegungsgleichheit (Multikongruenz) bei Punktengen ergeben. Hierbei beschränkt sich Verf. auf Figuren und Punktengen  $A, B, \dots$  der Geraden  $G$ , der Ebene  $E$ , der Kugelfläche  $S$  und des Raumes  $R$ .  $A \sim B$  bzw.  $A \preceq B$  drücken aus, daß  $A$  und  $B$  kongruent bzw.  $n$ -fach multikongruent sein sollen, d. h. daß sich  $A$  und  $B$  je in  $n$  paarweise fremde Teilmengen  $A_i$  und  $B_i$  zerlegen lassen, so daß  $A_i \sim B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gilt. Von den 34 Theoremen einige ausgewählte Beispiele: Ist  $D \subseteq G$  beliebig abzählbar, so gilt  $G \preceq G - D$ . — Ist  $D \subseteq S$  beliebig abzählbar, so gilt  $S \preceq S - D$ . — Ist  $I \subseteq G$  bzw.  $T \subseteq G$  die Menge der Punkte mit irrationaler bzw. mit transzendenter Koordinate in  $G$ , so gilt  $I \preceq T$ . — Es existiert  $A \subseteq E$ ,  $A \sim B \subseteq C \subseteq B, C$  fremd,  $A \sim B$  und  $A \sim C$ . — Ist  $K \subseteq R$  eine eigentliche Kugel,  $A \subseteq R$  beschränkt und  $K \sim A$ , so gilt mit einem passenden  $n$   $K \preceq A$  (Banach-Tarskisches Paradoxon). — Viele Fragen dieser Art sind noch ungeklärt. Beispiele: Es existiert  $A \subseteq E$  und ein Punkt  $P \notin A$ , so daß  $A - P \sim A$  gilt. Existiert ein  $A \subseteq E$  und zwei Punkte  $P, Q \in A$ , so daß sowohl  $A - P \sim A$  als auch  $A - Q \sim A$  gilt? Nach J. Mycielski gibt es dagegen eine abzählbare Punktmenge  $D \subseteq S$ , so daß  $D - P \sim D$  für jeden Punkt  $P \in D$  gilt. — Es sei  $K \subseteq E$  ein eigentlicher Kreishereich und  $Q \subseteq E$  ein mit  $K$  flächengleiches Quadrat. Gilt dann mit einem passenden  $n$   $K \preceq Q$ ? — So fesselt der Verf., der beste Kenner dieses Sachgebietes, die Leser immer wieder damit, daß er auf ungewöhnliche Fragen unerwartete Antworten zu geben weiß. Wie uns die Lektüre nahe bringt, kommt es nur darauf an, die auch in den elementarsten Gegenständen latent vorhandenen Möglichkeiten des Unendlichen durch geeignete Fragestellungen zu aktivieren, um die vor allem dem Kontinuum innewohnenden „Paradoxien“ auf oft überraschende Art zur Wirkung zu bringen.

H. Hadwiger.

**Parzen, Emanuel:** Some conditions for uniform convergence of integrals. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 55—58 (1954).

Sei  $P$  un  $\sigma$ -finito m. su uno spazio  $R$  e  $T$  un insieme indici. Per ogni  $t \in T$  sia  $f_n(x, t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e  $f(x, t)$  m. f. in  $x \in R$ . Z. B. per la q. della validità del teo. dei grandi numeri per variabile casuale, la cui legge di distribuzione dipende da un parametro, è di interesse, la validità di (1)  $\int_R |f_n(x, t) - f(x, t)| dP \rightarrow 0$ , uniformemente in  $t \in T$ ,

per chiedersi. [Vgl. E. Parzen, Univ. California Publ. Statistics **2** (1954).] Es sia I: Per ogni  $\varepsilon > 0$ , ogni m. m.  $A$  con  $P(A) < \infty$  e almeno un  $n > N$  vale  $P\{x \in A: |f_n(x, t) - f(x, t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$  per  $N \rightarrow \infty$ , uniformemente in  $t \in T$ , II: Per ogni  $\varepsilon > 0$  vale  $P\{x: |f_n(x, t) - f(x, t)| > \varepsilon\} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  uniformemente in  $t$ , (A): Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una m. m.  $A$  con  $P(A) < \infty$  e un  $\eta > 0$ , tale che da  $P(A \cap B) < \eta$  uniformemente in  $t \int_B |f(x, t)| dP < \varepsilon$

segue, (B): Per opportuno  $N$  e tutti  $n > N$  vale (A) per la  $f_n(x, t)$ . Wir zitieren: (I) e (A) valgono esattamente, quando II e (B) valgono. I e (B) implicano (I) e (A).

*L. Schmetterer.*

**Darbo, Gabriele:** Convergenza in variazione in senso forte e derivazione per serie. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 310—315 (1954).

L'A. amplia sensibilmente la portata di un teo. di Baire (questo Zbl. **48**, 291), già esteso da Conti [Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 86—90 (1954)]. L'A. considera una successione convergente nell'intervallo  $a$ — $b$  di funzioni  $f_1(x), f_2(x), \dots$  ivi a variazione limitata e dimostra che la funzione limite  $f(x)$  è assolutamente continua e soddisfa alla  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)] = 0$ , se e soltanto

se risulta soddisfatta la  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \int_a^{b+h} [f_n(x+h) - f_n(x)] = 0$ . In particolare, quindi,

questa condizione è sufficiente affinché la successione delle derivate  $f'_1(x), f'_2(x), \dots$  converga in media d'ordine 1, in  $a$ — $b$ , verso  $f'(x)$ .

*G. Scorza-Dragoni.*

**Džvaršejšvili, A. G.:** Über verallgemeinert absolut stetige Funktionen von zwei Veränderlichen. Soobščeniija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR **15**, 129—133 (1954) [Russisch].

Let  $F(x, y)$  be a continuous function, defined on a rectangle  $R_0$ . The paper contains the definition of the absolute continuity and of the generalized absolute continuity (ACG) of  $F$  on a set  $E \subset R_0$ , and the definition of the approximate derivative  $D_{ap}F$  and of the regular and strong derivatives  $D_R F$  and  $D_E^s F$  taken relative to a subset  $E$  of  $R_0$ . All the derivatives are, obviously, defined as some limits

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)}{h \cdot k}.$$

The following theorems are announced: (I) If  $F(x, y)$  is (ACG), then  $R_0 = A_1 + A_2 + \dots$ , where  $A_k$  are closed, and  $D_{A_k} F$  exists almost everywhere and is summable. (II) If  $F(x, y)$  is (ACG), then  $R_0 = H + A_1 + A_2 + \dots$  where  $|H| = 0$  and  $D_{A_k}^s F$  exists almost everywhere and is summable. (III) If  $F(x, y)$  is (ACG), then almost everywhere  $i_{ap}^2 F(x, y) = i_{ap}^2 F(x, y) = i_{ap}^2 F(x, y) = D_{ap} F$ . The paper contains also some Fubini theorems for the double Denjoy integral.

*R. Sikorski.*

**Pezzana, Mario:** Sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili reali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 299—309 (1954).

La funzione reale  $f(P)$ , dove  $P = (x_1, \dots, x_n)$  è un punto dello spazio reale euclideo  $n$ -dimensionale, ammette differenziale  $\mu_{n-k}$  asintotico nel punto



$P^* \equiv (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , se per  $n$  opportune costanti  $a_1^*, \dots, a_n^*$  risulta

$$\lim_{P \rightarrow P^*} \frac{1}{P \cdot P^*} \{f(P) - f(P^*) - a_1^* \cdot (x_1 - x_1^*) - \dots - a_n^* \cdot (x_n - x_n^*)\} = 0$$

quando  $P$  tende a  $P^*$  senza abbandonare un insieme  $E(P^*)$  siffatto, che le proiezioni del suo complementare sulle  $\binom{n}{k}$  varietà lineari coordinate a  $n - k$  dimensioni passanti per  $P^*$  hanno densità nulla in  $P^*$ . Premessa questa definizione, l'A. dimostra che se  $f(P)$ , data nel parallelepipedo  $n$ -dimensionale  $R_n$ , è continua rispetto ai gruppi di  $k$  variabili ovunque e quasi ovunque differenziabile rispetto a quei medesimi gruppi, essa ammette quasi ovunque differenziabile  $\mu_{n-k}$  asintotico. L'A., presenta indi, come casi particolari del proprio, risultati precedenti altrui.

*G. Scorza-Dragoni.*

**Shenton, L. R.:** A determinantal expansion for a class of definite integral. II. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **10**, 78—91 (1954).

In Part I [ibid. **9**, 44—52 (1953)] the author had given an expansion for integrals of the form  $\int_a^b A(x) B(x) \omega(x) dx C(x)$  in terms of a determinantal quotient. The functions  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x) > 0$  are continuous and  $\omega(x)$  is a non-zero weight in the finite interval  $a, b$ . In this paper more general terms are stated under which the expansion holds, and the case is considered when the limits of integration are infinite and the weight function is of the form  $A(x) e^{-x}$  or  $A(x) e^{-x^2/2}$ . In particular, expansions are given for  $\int_0^\infty e^{-ax} x^{s-1} dx$ ,  $C(x)$ , the Psi function, and  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx/C(x)$ , where  $C(x)$  is a positive polynomial. The methods in Parts I and II are closely related to the expansion of certain definite integrals as continued fractions.

*E. Frank.*

**Backes, F.:** Sur quelques formules classiques d'analyse. Mathesis **63**, 207—210 (1954).

Vereinfachte Beweise für die Mittelwertsätze der reellen Analysis auf gemeinsamer Grundlage.

*W. Maier.*

**Frame, J. S.:** Some trigonometric, hyperbolic and elliptic approximations. Amer. math. Monthly **61**, 623—626 (1954).

Für  $0 < x < \pi$  gilt z. B.

$$[(3 - x^2/10) \sin x] [2 - x^2/10 + \cos x]^{-1} < x < [(3 - x^2/10) \sin x] [2 - x^2/10 + \cos x]^{-1}.$$

Als Grenzfall folgt aus elliptischen Integralen für  $0 < y < 5\pi/12$ , daß

$$[(3 - y^2/20) \sin y] [1 - y^2/20 + 2 \cos y]^{-1} < \ln |(1 + \sin y)/\cos y| < [(3 - y^2/10) \sin y] [1 - y^2/10 + 2 \cos y]^{-1}.$$

*W. Maier.*

**Eberlein, W. F.:** The elementary transcendental functions. Amer. math. Monthly **61**, 386—392 (1954).

Parallele Einführung der Kreis- und Hyperbelfunktionen vom bekannten Flächeninhalt her, gestützt auf die Anfänge der Integralrechnung. Es ist beabsichtigt, für hochschuldidaktische Zwecke einen geschlossenen Weg zu geben, bis zur Exponentialfunktion im Komplexen; zuletzt wird auf die Rolle der Fourierschen Umkehrformel sowie auf harmonische Analyse über kommutativen Gruppen hingewiesen.

*E. Ulrich.*

### Allgemeine Reihenlehre:

**Martin, C. F.:** A note on a recent result in summability theory. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 863—865 (1954).

„Eine reguläre normale Matrix  $A$  limitiert genau dann eine beschränkte divergente Folge, wenn die beiderseitige Inverse  $B$  nicht regulär ist und es eine normale Matrix  $Q$  mit  $\|Q\| < \infty$  gibt, deren Spalten Nullfolgen sind und für die  $C = BQ$

beschränkte Spalten und  $\|C\| = \infty$  hat“. (Hier bedeutet  $\|C\| = \sup_n \sum_k |c_{nk}|$ ).

Von diesem Satz hat A. M. Tropper (dies. Zbl. 52, 55) den hinreichenden Teil bewiesen. Verf. zeigt nun, daß die Bedingung auch notwendig ist. Neuere Literatur J. Copping [J. London math. Soc. 30, 123–127 (1955)]; A. Wilansky, K. Zeller [Trans. Amer. math. Soc. 78, 501–509 (1955)].

K. Zeller.

**Kangro, G.: Summierbarkeitsfaktoren für die Methode der bewichteten arithmetischen Mittel.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 9–11 (1954) [Russisch].

Verf. behandelt Konvergenzfaktorensätze für bewichtete arithmetische Mittel

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{r=0}^n p_r s_r \quad (P_n \neq 0 \text{ für } n \geq 0). \text{ Ist } P \text{ ein derartiges Mittel und } B = (b_{nk})$$

ein beliebiges Matrixverfahren (in der  $RF$ -Form), so wird gefragt nach allen Folgen  $\varepsilon_k$ , die jede  $P$ -summierbare Reihe  $\sum a_k$  überführen in eine  $B$ -summierbare Reihe  $\sum a_k \varepsilon_k$ . Folgendes Ergebnis wird angegeben: Ist  $P$  permanent und umkehrbar und ist  $B$  permanent, so erfüllt eine Zahlenfolge  $\varepsilon_k$  genau dann die obige Bedingung,

$$\text{wenn gilt } 1. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{P_k} 1^{\frac{1}{p_k}} = \infty \text{ und } P_k 1^{\varepsilon_k} = O(P_k); 2. \sum_{k=0}^{\infty} P_k \varepsilon_{k+1} 1^{\frac{1}{p_k}} = O(1)$$

( $\Delta b_{nk} = b_{nk} - b_{n,k+1}$ ) 3.  $b_{nk} P_k \varepsilon_k = O(p_k)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). (Die Voraussetzung des Verf., daß  $P$  konvergenzerhaltend sei, bedeutet Permanenz.) Entsprechende Bedingungen werden genannt für Folgen  $\varepsilon_p$ , die  $P$ -summierbare Reihen in  $B$ -summierbare Reihen,  $P$ -summierbare Reihen in  $B$ -summierbare Reihen und  $P$ -beschränkte Reihen in  $B$ -summierbare Reihen überführen. Die Spezialfälle  $B =$  Einheitsmatrix und  $B = P$  führen auf frühere Sätze von Jurkat und dem Ref. (Jurkat, dies. Zbl. 42, 294, Peyerimhoff, dies. Zbl. 44, 64, 50, 67; Jurkat Peyerimhoff, dies. Zbl. 44, 63, 50, 67). Für  $\varepsilon_k = 1$  erhält der Verf. Vergleichssätze  $P \subseteq B$ ; ist  $B$  ein bewichtetes arithmetisches Mittel, so ergeben sich bekannte Sätze von Garabedian und Randels (dies. Zbl. 19, 209). Mit diesen Ergebnissen ist das Problem der Summierbarkeitsfaktoren für bewichtete arithmetische Mittel gelöst (abgesehen von einer möglichen Verminderung der Voraussetzungen), doch wird die Unabhängigkeit der genannten Bedingungen nicht untersucht und es werden keine Beweise gegeben).

A. Peyerimhoff.

**Bagemihl, F. and P. Erdős: Rearrangements of  $C_1$ -summable series.** Acta math. 92, 35–53 (1954).

Vorgegeben sei eine Reihe (1)  $\sum a_n$  mit reellen Gliedern. Ist  $\sum a_n = s$  und  $\sum |a_n| < \infty$ , so gilt für eine beliebige Umordnung (2)  $\sum a'_n$  von (1) stets  $\sum a'_n = s$ ; ist dagegen  $\sum a_n = s$  und  $\sum |a_n| = \infty$ , so gibt es zu jeder reellen Zahl  $s'$  eine Umordnung (2) von (1) mit der Summe  $s'$  (Riemannscher Umordnungssatz). Man kann sich nun fragen: Es sei  $\Gamma$  ein permanentes Summierungsverfahren und  $\Gamma \sum a_n = s$ ; welches ist die Menge  $R$  aller Zahlen  $s'$ , für die es eine Umordnung (2) von (1) mit  $\Gamma \sum a'_n = s'$  gibt? Die Verff. stellen sich diese seither unberücksichtigt gebliebene Frage für den Fall  $\Gamma = C_1$  und lösen sie mit beachtlichem Aufwand an kunstvollen Beweisen vollständig durch die Aussage:  $R$  besteht im Falle  $\Gamma = C_1$  entweder (i) aus einer einzigen Zahl, oder (ii) aus allen Zahlen der Form  $x + n\beta$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) für gewisse Zahlen  $\beta \neq 0$  und  $x$ , oder (iii) aus sämtlichen reellen Zahlen; alle drei Möglichkeiten kommen vor. Darüber hinaus werden Kriterien angegeben, die entscheiden lassen, welcher der genannten Fälle bei Vorgabe einer  $C_1$ -summierbaren Reihe (1) eintritt. Es wird nämlich gezeigt, daß mit Ausnahme von zwei Typen  $C_1$ -summierbarer Reihen (1) die Menge  $R$  sicher aus allen Zahlen der reellen Achse besteht. Typ A: Die Reihe (1) konvergiert absolut;  $R$  besteht aus einem Punkt. Typ B: Der Punkt 0 ist isolierter Häufungspunkt der Folge  $\{a_n\}$ , es liege etwa in  $(-\varepsilon, +\varepsilon)$  kein Häufungspunkt  $\neq 0$  von  $\{a_n\}$ ; sämtliche  $a_n \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$  seien in eine Teilfolge  $\{a_{n_k}\}$  zusammengefaßt, und es sei  $\sum_k a_{n_k} = \infty$ ; schließlich sei  $\{a_{n_k}\}$



die Folge der nicht in  $\{a_n\}$  enthaltenen Terme von (1) und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_{k+1}}{m_k} = 1$ . Für eine  $C_1$ -summierbare Reihe (1) von diesem Typ  $B$  kann  $R$  von der Art (i), (ii) oder (iii) sein; alle drei Fälle sind möglich. — Ref. wurde durch Herrn Zeller auf eine Arbeit von S. Mazur Arch. Fowarz. Nauk. Lwow 4, 411–424 (1929) aufmerksam gemacht, die sich teilweise mit der hier referierten überschneidet. Mazur zeigt z. B.: Hat (1) beschränkte Glieder und ist  $1 \cdot \sum a_n = s$ , so ist  $1 \cdot \sum a'_n = s$  für jede Umordnung (2) von (1), oder  $R$  besteht aus allen Zahlen der reellen Achse;  $V$  kann dabei das Verfahren  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) oder das Abel-Verfahren sein.

D. Gaier.

Hirokawa, Hiroshi and Genichirō Sunouchi: Two theorems on the Riemann summability. Tôhoku math. J., II. Ser. 5, 261–267 (1954).

$s_n^\beta$  sei für  $\beta \geq 0$  die  $n$ -te  $(C\beta)$ -Summe von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Aus  $s_n^\beta = o(n^{\beta\alpha})$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\alpha} = O(n^{-\alpha})$   $0 < \alpha < 1$  folgt die  $R_1$  und  $(R, 1)$ -Summierbarkeit von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Für den Fall  $\beta = 1$ , vgl. Sunouchi, *ibidem* 5, 34–42 (1953). L. Schmetterer.

Agnew, Ralph Palmer: Tauberian relations among partial sums, Riesz transforms, and Abel transforms of series. J. reine angew. Math. 193, 94–118 (1954).

Verf. gibt eine didaktisch geschickte, systematische Einführung in den neuartigen, an die Untersuchungen von Hadwiger [Commentarii math. Helvet. 16, 209–214 (1944)] anschließenden Fragekreis der Limitierungsverfahren (Tauberische Ungleichungen und Tauberische Konstanten), dem zahlreiche neuere Veröffentlichungen verschiedener Autoren gewidmet sind. Neben der sorgfältigen Formulierung der einzelnen oft ganz ähnlichen Fragestellungen, die sich jedoch von ganz verschiedenen Schwierigkeitsgraden erweisen, der Darstellung bekannter Methoden und Ergebnisse finden sich bemerkenswerte neue Resultate und Hinweise auf offene Fragestellungen. Die Reihe  $\sum b_n$  mit komplexen Gliedern, welche eine zu einer gegebenen Transformation

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) u_k \quad \text{oder} \quad \sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) s_k \quad (s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k; \quad t \rightarrow t_0)$$

gehörige Tauberische Bedingung  $T$  erfüllen, bilden die Klasse  $T^*$ . Verf. unterscheidet 8 typische Fragestellungen. Bei den ersten drei ist jedesmal eine für jede Reihe aus  $T^*$  gültige, bestmögliche Abschätzung von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t) = s$  gesucht. Bei drei weiteren Aufgaben handelt es sich entsprechend um eine für jede Reihe aus  $T^*$  gültige, bestmögliche Abschätzung von  $\lim_{t \rightarrow t_0} \sigma(t) = s_{\text{nat}}$ .

In beiden Fällen wird die Aufgabe durch die weiteren drei zusätzlichen Bedingungen variiert: (1) die Folge  $t_n$  mit  $t_n \rightarrow t_0$  ist vorgegeben, (2) soll optimal und von den Gliedern  $a_n$  der betreffenden Reihe unabhängig sein oder (3) darf noch von diesen Gliedern  $a_n$  abhängen. Endlich wird zu einem vorgegebenen Häufungspunkt  $t$  der Folge  $s$ , einer Reihe  $\sum a_n$  aus  $T^*$  die kleinste Konstante  $H$  von der Art gesucht, daß mindestens ein Häufungswert  $\bar{t}$  von  $\sigma(t)$ , d. h. eine Folge  $t_n \rightarrow t_0$  mit  $\sigma(t_n) \geq \bar{t}$  existiert, welcher die Ungleichung  $\bar{t} \geq H$  erfüllt. Eine analoge Aufgabe ergibt sich bei Vorgabe von  $\bar{t}$ . Aus diesen 8 Typen lassen sich zahlreiche weitere Fragestellungen entwickeln, z. B. durch Betrachtung geeigneter Unterklassen von  $T^*$  oder, indem man  $\sigma(t) = s$  durch  $\sigma_1(t) = \sigma_2(a_n)$  ersetzt, wobei  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(a)$  zwei verschiedene Transformationen derselben Reihe bzw. Folge bedeuten. Die Methoden und Ergebnisse werden am Beispiel der arithmetischen, Rieszschen und Abelschen Mittel auseinandergesetzt. V. Gardin.

Reid, William T.: A Tauberian theorem for power series. Math. Z. 60, 91–97 (1954).

Verf. schließt an den von H. Wielandt (dies. Zbl. 46, 78) in Anknüpfung an J. Karamata angegebenen Beweis des  $O_L$ -Umkehrsatzes für das Abelsche Summierungsverfahren an. Durch eine Modifikation dieses Beweises ergibt sich das  $O_L$ -Satz enthaltende Theorem A: Ist die Reihe (1)  $\sum a_n$  ( $a_n$  reell;  $n = 0, 1, \dots$ ) Abel-summierbar und gibt es eine der Bedingung  $I'$  genügende Folge von Zahlen  $d_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), für die (2)  $u_n a_n \leq d_n$  gilt, so ist (1) konvergent. Die Be-

dingung  $\Gamma$  für die  $d_n \geq 0$  verlangt dabei: (v)  $\sum_1^\infty d_n x^n$  konvergiert für  $|x| < 1$ ;

(vi) es gibt eine Konstante  $M$ , so daß  $g(x) = (1-x) \sum_1^\infty d_n x^n < M$  ist für  $0 \leq x < 1$ ;

(vii)  $g(x^k) - g(x) \rightarrow 0$  bei  $x \rightarrow 1-0$  für jedes positive ganze  $k$ . Korollar: Ist (1) Abel-summierbar und gibt es eine  $C_1$ -limitierbare Folge  $d_n \geq 0$ , für die (2) gilt, so ist (1) konvergent. Bemerkungen über die Bedingung  $\Gamma$ . Verallgemeinerung des Theorems A (in Richtung  $\lim$  statt  $\lim$ ). Offenes Problem: Existenz einer Folge  $d_n \geq 0$ , die der Bedingung  $\Gamma$  genügt, ohne Abel-limitierbar zu sein.

W. Meyer-König.

Moore, Charles N.: On relationships between Nörlund means for double series. Proc. Amer. math. Soc. 5, 957—963 (1954).

Let  $P = (p_{mn})$  be a double sequence of non-negative numbers. Let  $P_{mn} = \sum_{(0,0)}^{(m,n)} p_{ij}$ . Let  $s = (s_{mn})$  be a bounded double sequence (which may be regarded as the sequence of partial sums of a bounded double series  $\sum u_{ij}$ ). If

$$\sum_{(i,j)=(0,0)}^{(m,n)} p_{m-i,n-j} s_{ij} / P_{mn} \rightarrow k \text{ as } (m,n) \rightarrow \infty,$$

the series  $\sum u_{ij}$  or the sequence  $s_{mn}$  is said to be summable by Nörlund means  $P$ . The author proves that two regular Nörlund means represented by  $P = (p_{ij})$  and  $Q = (q_{ij})$  are consistent (i. e., if a sequence is summable  $P$  to  $k$  and summable  $Q$  to  $k'$  then  $k = k'$ ) if each row and each column give regular methods of summation for simple series. The author then formulates conditions for inclusion and equivalence of two Nörlund methods  $P$  and  $Q$  in terms of the two sequences  $(k_{mn})$  and  $(l_{mn})$  where

$$p(x, y) = \sum p_{mn} x^m y^n, \quad q(x, y) = \sum q_{mn} x^m y^n, \\ p(x, y)/q(x, y) = \sum l_{mn} x^m y^n, \quad q(x, y)/p(x, y) = \sum k_{mn} x^m y^n.$$

For instance,  $P$  and  $Q$  are equivalent if and only if  $\sum |k_{mn}|$  and  $\sum |l_{mn}|$  converge, assuming that  $P$  and  $Q$  are regular for bounded double sequences.

V. Ganapathy Iyer.

Bajraktarević, Mahmud: Quelques remarques sur les fractions continues. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 6, 137—148 (1954).

The object of this work is the application to real continued fractions some general conclusions previously obtained by the author (this Zbl. 50, 119). (a) The possibility is given of ordering certain continued fractions  $a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$  following decreasing values in expressing this value as a decreasing function of  $z$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . (b) To each  $z \in I$  there corresponds a sequence of partial denominators  $b_n$  such that the corresponding semiregular continued fraction represents a function of  $z$  continuous almost throughout  $I$ . (c) If the continued fraction  $1 + a_1 x | 1 + a_2 x | 1 + a_3 x | 1 + \dots$ ,  $a_n \neq 0$ , converges uniformly, it is known that equality exists between this continued fraction and its corresponding series in certain regions of the complex plane. Here it is shown that if the corresponding seminormal series in the real variable  $x$  converges, then equality exists between this series and the continued fraction.

E. Frank.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Tandori, Károly: Über die Konvergenz singularer Integrale. Acta Sci. math. 15, 223—230 (1954).

Verf. gibt mit Hilfe der Theorie der Banachschen Räume (Satz von Banach-Steinhaus) eine neue notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß ein



singuläres Integral  $\Phi_n(f, x) = \int_a^b f(t) q_n(t, x) dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) für ein  $p \geq 1$  alle Funktionen  $f(t) \in L^p[a, b]$ , für die  $\xi \in [a, b]$  Lebesguescher Punkt  $p$ -ter Ordnung ist:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\xi-h}^{\xi+h} |f(t) - f(\xi)|^p dt = 0$ , in diesem Punkte darstellt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(f, \xi)$

$f(\xi)$ . Diese Bedingung wird zu der von Korenbljum, Krejn und Levin (dies. Zbl. 31, 168) für  $p \geq 1$  aufgestellten in Beziehung gesetzt, und für  $p = 1$  daraus in einfacher Weise die Faddeeffsche Bedingung (dies. Zbl. 15, 105) hergeleitet.

Für die Funktionen  $q_n(t) \in L^1[0, 1]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 q_n(t) dt = 1$ , d. h.  $\Phi_n(f) = \int_0^1 f(t) q_n(t) dt$  sei ein für  $\xi = 0$  spezialisiertes singuläres Integral.

Die  $\Phi_n(f)$  mögen für ein  $p \geq 1$  für alle Funktionen  $f(t) \in L^p[0, 1]$  existieren, für die  $\xi = 0$  Lebesguescher Punkt  $p$ -ter Ordnung ist (Bedingung  $B_p$ ). Dann kon-

vergieren die Reihen  $A_n(p) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m/p} \left( \int_{\frac{1}{2^{m-1}}}^{2^{-m}} |\varphi_n(t)|^q dt \right)^{1/q}$ ,  $\left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ .

Notwendig und hinreichend für (I)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(f) = f(0)$  für alle genannten Funk-

tionen  $f(t)$  ist nun 1. daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\eta} q_n(t) dt = 1$  für jedes feste  $\eta \in (0, 1)$  gilt und

2. die Beschränktheit der Folge der  $A_n(p)$ . — Zum Abschluß wird gezeigt: Erfüllen die  $\Phi_n(f)$  Bedingung  $B_1$  (und folglich auch  $B_p$  für alle  $p > 1$ ), so gilt (I) für  $p = 1$  genau dann, wenn 1. sie für alle  $p \geq 1$  gilt und 2. alle Folgen  $A_n(p)$  für  $p \geq 1$  gleichmäßig beschränkt sind.

H. König.

### Mises, Richard von: Numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale.

Z. angew. Math. Mech. 34, 201—210 (1954).

Verf. gründet die Integration nicht auf eine vorherige Annäherung des Integranden durch ein Schätzverfahren; das heißt, eine leichtere Aufgabe auf eine schwierigere zurückführen. Der erste, der beide Fragen trennte, war Wirtinger (dies. Zbl. 6, 361); Verf. behandelte nach diesem Gesichtspunkte den Fall einer Dimension  $k = 1$  (dies. Zbl. 12, 400). Hier verallgemeinert er sein Vorgehen mit bemerkenswert einfachen Hilfsmitteln auf  $k$  Dimensionen. Im  $R_k$  sei  $G$  ein Sternbereich in bezug auf einem inneren Punkt  $O(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ , und in  $G$  sei eine Funktion  $f(P)$  gegeben, die dort in jedem Punkt  $P(x_1, \dots, x_k)$  nach jeder Richtung  $m$  (1-mal ableitbar) ist. Ein Halbstrahl aus  $O$  wird durch  $k = 1$  Verhältnisse  $(x_1 - \xi_1):(x_2 - \xi_2): \dots : (x_k - \xi_k)$  einer  $k = 1$  Winkel  $\varphi, \theta, \varphi, \dots$  bestimmt. Für  $OP = r$  gilt auf dem Rande von  $G$  eine Gleichung  $r = R(\varphi, \theta, \varphi, \dots)$ . Zu berechnen ist das  $k$ -fache Integral  $J = \int_G f(P) \prod_{h=1}^k dx_h =$

$\int_G f dV = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} r^{k-1} dr \right) dS$ . Nach  $dr$  wird in fester Richtung integriert;  $dS$  ist das  $(n-1)$ -stellige Flächenelement der Einheits-Einkugel  $E$  um  $O$ , das ein dünner Halbstrahlenkegel mit der Spitze  $O$  auf ihr ausschneidet, und nach  $dS$  ist über  $E$  zu integrieren. In  $n$  Punkten  $P_r(x_{1r}, \dots, x_{kr})$ ,  $r = 1, \dots, n$ , den Grundpunkten ( $G_P$ ), seien die Werte  $f_r$  von  $f$ , die Grundwerte ( $G_w$ ), bekannt, und  $t_r$  sei mit dem Gewichte  $A_r$  versehen.  $J$  wird durch  $\sum_{r=1}^n A_r f_r$  an-

genähert, mit dem Fehler  $\epsilon = D - J = \sum_{r=1}^n A_r t_r$  (Formel  $\Phi$ ). Es kommt darauf an,  $D$  auf eine Form zu bringen, die eine Handhabe zur Wahl der  $P_r$  und  $A_r$  bietet.  $\Phi$  heiße von  $m$ -ter Ordnung, wenn  $D$  nur von den Ableitungen  $m$ -ter Ordnung  $f^{(m)}$  der Funktion  $f$  abhängt und verschwindet, sobald überall in  $G$  alle  $f^{(m)} = 0$  sind. Eine solche Formel  $\Phi$  muß  $D = 0$  ergeben, wenn  $f$  ein Polynom von niederem als  $m$ -tem Grade ist, d. h. eine lineare Verbindung von Potenzprodukten  $x_1^{x_1} \dots x_k^{x_k}$  mit ganzen  $x_h \geq 0$ ,  $\sum x_h = m$ ; ihre Zahl ist  $Z_{m,k} = \binom{m+k-1}{k}$ .

Die Freiheit der  $P_r, A_r$  ist also für eine  $\Phi_m$  durch  $Z_{m,k}$  Bedingungen, die mechanisch deutbaren Momentengleichungen (Mgl.), eingeschränkt. Im allgemeinen sind zur Bestimmung der  $A_r$

einer  $\Phi_m$  mindestens  $Z_{m,k}$  Gp. nötig, doch können aus  $D$  bei besonderer Lage der Gp. einige  $P_v$  dadurch ausscheiden, daß ihre  $A_v = 0$  werden.  $\Phi_m$  heißt dann eine verfeinerte Formel  $m$ -ter Ordnung. Solche sind für  $k = 1$  die Simpsonsche Regel (S. R.) [ $n = 3, m = 4, Z_{4,1} = 4$ ] und die Gaußsche Quadratur [ $n = m/2$  oder  $(m + 1)/2$ , je nachdem ob  $m$  gerade oder ungerade;  $Z_{m,1} = m$ ]. Aber auch Beispiele mit  $n > Z_{m,k}$  ordnen sich dem Verfahren unter — Verf.

behandelt zuerst den Fall  $m = 1$ . Es bezeichne  $f' = f'(P; OP) = \sum_{h=1}^k \frac{x_h - \xi_h}{r} \frac{\partial f}{\partial x_h}$  die Ableitung von  $f$  in  $P$  nach der Richtung  $OP$ . Wenn ferner  $OP_v = r_v$  und  $P$  ein Punkt auf  $OP_v$  ist,

sei  $f'_v(r) = f'(P; OP_v) = \sum_{h=1}^k \frac{x_{hv} - \xi_h}{r_v} \frac{\partial f}{\partial x_h}$  und  $f'_v(r_v) = f'(P_v; OP_v)$ , weiter kurz  $f'(O; OP_v) =$

$f'_v(0) = f'_v(O)$ . Man setze  $f(O) = f_0, f'_0 = f'(O; OP) = -f'(O; PO) = \sum_{h=1}^k \frac{x_h - \xi_h}{r} \frac{\partial f}{\partial x_h}$  (mit Werten der Ableitungen von  $f$  in  $O$ );  $r f'_0$  ist eine lineare Funktion der  $x_h$ . Mit vorstehenden Bezeichnungen lautet, wenn die Mgl. (2)  $\sum_{v=1}^n A_v = V = k^{-1} \int R^k dS$  gilt, der Hauptsatz für  $m = 1$

$$(3) \quad D = \int \left[ \int_0^R M_1(r) f' dr \right] dS - \sum_{v=1}^n A_v \int_0^{r_v} N_1(r, r_v) f'_v(r) dr$$

mit  $M_1(x) = (R^k - r^k)/k, N_1(r, r_v) = 1$ . Der Fehler läßt sich durch

$$(4) \quad |D| \leq |f'|_{\max} \left( \int r dV + \sum_{v=1}^n r_v |A_v| \right)$$

abschätzen. Besonderheiten des Falles  $m = 1$  müssen hier übergangen werden. — Die auf ihn bezüglichen Ergebnisse verallgemeinern sich auf einen beliebigen Wert  $m$  wie folgt: Man kann die Begriffe  $f', f'_v(r), f'_v(r_v)$  auf höhere Ableitungen ausdehnen,

$$f^{(\mu)} = \sum_{h=1}^k \left( \frac{x_h - \xi_h}{r} \frac{\partial}{\partial x_h} \right)^\mu f; \quad r^\mu f_0^{(\mu)} = \sum_{h=1}^k \left[ (x_h - \xi_h) \frac{\partial}{\partial x_h} \right]^\mu f,$$

wo  $f_0^{(\mu)}$  die  $\mu$ -te Ableitung von  $f$  in  $O$  nach der Richtung  $OP$ , ist ein Polynom  $\mu$ -ten Grades in  $x_1, \dots, x_k$ . An Stelle von  $M_1, N_1$  treten die Polynome

$$M_\mu(r) = \frac{1}{(\mu-1)!} \int_0^R e^{k-1} (R-r)^{\mu-1} d\varrho + (-1)^\mu \frac{r^{k+\mu-1}}{k! (k-1)! \dots (k-\mu+1)!},$$

$$N_\mu(r, r_v) = \frac{1}{(\mu-1)!} (r_v - r)^{\mu-1}.$$

Die  $A_v$  genügen außer (2) den weiteren Mgl.

$$(5) \quad \sum_{v=1}^n x_{hv} A_v = \int x_h dV, \quad \sum_{v=1}^n x_{hv} x_{iv} A_v = \iint x_h x_i dV, \quad \sum_{v=1}^n x_{hv} x_{iv} x_{jv} A_v = \iiint x_h x_i x_j dV$$

( $h, i, j, \dots = 1, 2, \dots, k$ ), — bis zur Ordnung  $m-1$ . Nach dieser Vorbereitung beweist Verf. den die Formel (3) für  $\mu = 1, 2, \dots, m$  verallgemeinernden Hauptsatz

$$(6) \quad D = \int \left[ \int_0^R M_\mu(r) f^{(\mu)}(r) dr \right] dS - \sum_{v=1}^n A_v \int_0^{r_v} N_\mu(r, r_v) f_v^{(\mu)}(r) dr$$

durch vollständige Induktion in bezug auf  $\mu$ . Die der Ungleichung (4) entsprechende (7) erhält man, wenn man in ihr  $f', r, r_v$  durch  $f^{(\mu)}, r^\mu, r_v^\mu$  ersetzt, und rechts durch  $\mu!$  teilt; eine obere und untere Schranke für  $D$ , auch in (4), ergibt sich, falls man in  $G$  nicht nur  $f_{\max}^{(\mu)}$ , sondern auch  $f_{\min}^{(\mu)}$  kennt und alle  $A_v = 0$  sind. Ob man es bei (7) wie bei der S. R. dahin bringen kann, daß statt der Summe zweier Glieder rechts ihr Unterschied erscheint, bleibt offen. — Verf. schließt mit Beispielen: a) Kugel im  $R_k$ . Wählt man einen Gp. in ihrer Mitte mit dem Gewichte  $A_0$  und je zwei Gp. auf jeder der  $k$  Achsen in Abständen  $r_1$  mit Gewicht  $A_1$ , so kommt man zu stark verfeinerten Formeln, die für  $k = 2$  (Kreisseihe, 5 Gp.),  $k = 3$  (Vollkugel, 7 Gp.) und [bei allen  $k > 0$ ] so lauten:  $|D| \leq |f^{(1)}|_{\max} (1/6!) [k(k+6) + k(k+2)(k+4)^2] R^k V$ .

b) Einfeldformel zweiter Ordnung. Einziger Gw. am besten im Schwerpunkt;  $\mu = 2$  liefert  $|D| \leq |f''|_{\max} \frac{1}{2} \int r^2 dV$ . — Vorteilhaft zerlegt man  $G$  in Teilgebiete  $G_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, s$ ) und wendet die erhaltene Formel auf jedes  $G_\sigma$  an. — Entsprechend bei c), dem Würfel im  $R_k$  mit der Kante  $a$ . Seiner Mitte komme das Gewicht  $A_0$ , seinen  $2^k$  Ecken als weiteren Gp. das Gewicht  $A_1$  zu; dann gilt  $|D|/V = (2f_0 - f_1)/3! + [k(1+5k)/4320] a^{k+1} |f^{(1)}|_{\max}$ , wo  $f_1$  das Mittel der ihnen zugehörigen Gw. ist.

L. Koschmieder.



Kuntzmann, Jean: Étude de représentations approchées de dérivées. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1110—1111 (1954).

Sia  $f(x)$  una funzione che nei punti  $a + p_0, \dots, a + p_n$ , ( $p_0 < p_1 < \dots < p_n$ ) assume rispettivamente i valori  $y_0, \dots, y_n$  e si consideri l'espressione  $f^{(q)}(a) = \sum_{q=0}^n A_{aq} y_q$  ( $q = 1, \dots, n$ ). L'A. si occupa dell'errore che presenta tale espressione, quando  $f(x)$  non è un polinomio di grado  $n$ . S. Cinquini.

Civin, Paul: Orthonormal cyclic groups. Pacific J. Math. **4**, 481—482 (1954).

Sia  $\{A_n(x)\}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) una successione di funzioni complesse, misurabili, formanti un gruppo ciclico moltiplicativo, esista cioè una funzione  $A_1(x)$  generatrice del gruppo tale che  $A_n(x) = [A_1(x)]^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). La condizione necessaria e sufficiente perchè  $\{A_n(x)\}$  formi un sistema ortogonale e normale in  $(0, 1)$  è che  $A_1(x) = \exp[2\pi i \cdot c(x)]$  quasi ovunque, essendo  $c(x)$  equimisurabile con  $x$ ,  $x = \text{mis}\{u, 0 \leq u \leq 1, c(u) \leq x\}$ . G. Sansone.

Butzer, P. L.: On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 547—553 (1954).

The transformation  $P_u^f(x) = e^{-u} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{u}\right) \frac{(u)^v}{v!}$ , associated with a function  $f(x)$  continuous for  $x \geq 0$  is known to converge uniformly to  $f(x)$  as  $u \rightarrow \infty$  [compare O. Szász, J. Res. nat. Bur. Standards **45**, 239—245 (1950)]. The author discusses a generalisation for functions  $f \in L(0, \infty)$ . Let  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  and  $W_u^f(x) = dP_u^F(x)/dx$ . Amongst the results are the following: (i)  $W_u^f(x) \rightarrow f(x)$  ad  $u \rightarrow \infty$  when ever  $F'(x) = f(x)$ , and hence for almost all  $x \geq 0$ . (ii) If  $p > 1$  and  $f \in L^p(0, \infty)$ , then  $W_u^f(x) \rightarrow f(x)$  p. p. dominatedly, and also strongly (in  $L^p$ ).

W. W. Rogosinski.

Campbell, Robert: Sur les séries de Neumann de variables réelles. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 983—984 (1954).

Sia  $f(x)$  una funzione definita su  $(-\infty, +\infty)$ , sia (\*)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(x)$  lo sviluppo (di Neumann) di  $f(x)$  in serie di funzioni di Bessel  $J_p(x)$ . Nella presente nota l'A. fa uso di un procedimento, già utilizzato in precedenti ricerche (questo Zbl. **48**, **45**, **46**), per valutare la differenza  $f(x) - \tau_n(x)$  fra  $f(x)$  e la media parziale, di tipo di Nörlund di ordine  $n$ ,  $\tau_n(x) = \left[ \sum_{r=1}^n x_r S_r(x) \right] \left[ \sum_{r=1}^n x_r \right]^{-1}$  essendo  $x_r = \frac{(r-1)}{2}$  ed essendo  $S_r(x)$  la somma parziale di ordine  $n$  della serie (\*). J. Cecconi.

Plessis, N. du: A note about functions in Lip  $\alpha$ . Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **10**, 100 (1954).

A necessary and sufficient condition that a trigonometrical series  $T(x)$  be the Fourier series of a function  $f(x) \in \text{Lip } \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) is that  $\sigma_n - \sigma_m = O(n^{-\alpha})$  uniformly in  $[0, 2\pi]$  for all  $m > n$ , where  $\sigma_n$  is the  $n$ th  $(C, 1)$  mean of  $T(x)$ .

Salem, R.: On a problem of Smithies. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 403—407 (1954).

In this paper the author proves the existence of a continuous, even and periodic function  $f(x)$  (with period  $2\pi$ ) such that its Fourier coefficients  $a_m$  have the following two properties: i)  $\sum a_m$  diverges, ii)  $|a_m|$  decreases. This result answers in the affirmative a question raised by F. Smithies in connection with the theory of integral equations (cf. this Zbl. **17**, 356). U. N. Singh.

Satô, Masako: Uniform convergence of Fourier series. I. II. Proc. Japan Acad. **30**, 528—531, 698—701 (1954).

I. Es wird gezeigt: Ist die Funktion  $f(x)$  stetig mit dem Stetigkeitsmodul  $\omega(\delta)$ , gibt es zu  $f(x)$  eine Funktion  $\Phi(n) = O(n)$  und eine Konstante  $D$ , so daß für alle

$x, n, a, b$  mit  $b - a \leq 2\pi$  gilt  $\Phi(n) \int_a^b f(x+t) \cos nt \, dt < D$  [d. h. ist  $f(x)$  von der Klasse  $\Phi(n)$ ], und genügt die monoton wachsende Funktion  $\theta(n)$  der Bedingung  $1 \leq \theta(n) \leq \Phi(n)$ , so gibt es von  $f(x)$  unabhängige Konstante  $A, B, C$ , mit denen

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \omega(1/n) [A \log \theta(n) + B \log (n/\Phi(n))] + C/\theta(n)$$

gilt. Daraus folgt, daß die Fourierreihe gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert, wenn für  $n \rightarrow \infty$   $\omega(1/n) \log (n/\Phi(n)) \rightarrow 0$ ,  $\theta(n) \rightarrow \infty$  und  $\omega(1/n) \log \theta(n) \rightarrow 0$  gilt. Der Satz des Verf. ist eine Erweiterung eines Satzes von Nash [Rice Inst. Pamphlet, Spec. Issue 31—57 (1953)], der für  $\theta(n)$  noch eine weitere Voraussetzung braucht. — II. Ähnlich wie in Teil I für die Differenzen  $|s_n(x) - f(x)|$  wird hier für die Annäherung der  $(C', -\alpha)$ -Mittel der Fourierreihe an  $f(x)$  eine von  $\omega(\delta)$  und  $\Phi(n)$  abhängige Schranke angegeben, wobei jetzt  $\Phi(n) < n$  vorausgesetzt ist. Aus ihr folgt, daß die Fourierreihe gleichmäßig  $(C', -\alpha)$ -summierbar ist, wenn  $0 < \alpha < 1$  und  $\omega(1/n)^{1-\alpha} (n/\Phi(n))^\alpha \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$ . G. Lochs.

**Izumi, Shin-ichi:** Some trigonometrical series. IX—XI. Tôhoku math. J., II. Ser. 6, 30—34, 69—72, 73—77 (1954).

IX. Verf. erweitert ein von ihm und Kawata (dies. Zbl. 22, 129) angegebenes Kriterium für gleichmäßige  $C'$ -Summierbarkeit Fourierscher Reihen derart, daß nunmehr auch ein Hardy-Littlewoodscher Satz mit umfaßt wird: Erfüllt die stetige Funktion  $f(x)$  die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{n}{k^{1+\alpha}} \int_{\pi/n}^{2\pi/n} |f(x+t+2k\pi/n) - f(x+t+(2k+1)\pi/n)| dt = o(1)$$

gleichmäßig in  $x$ ,  $-1 < \alpha < 1$ , so ist die Fourierreihe von  $f(x)$  gleichmäßig  $(C, \alpha)$ -summierbar. — Ferner wird bewiesen:  $f(t)$  sei eine integrable Funktion der Periode  $2\pi$ ,  $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$  und  $\sigma_n^\delta(x)$  bezeichne das  $n$ -te Cesàro-Mittel der Ordnung  $\delta$  bezüglich der Fourierreihe von  $f(t)$  bei  $t = x$ . Dann gilt, unter  $A_r$  eine nur von  $r$  abhängige Konstante verstanden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r} |n^\delta \{\sigma_n^\delta(x) - f(x)\}|^p \leq (A_r p)^p \int_0^\pi \left| \frac{\varphi_x(t)}{t^\delta} \right|^p t^{r-2} dt$$

mit  $p > 1$ ,  $r > 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ . — Mit Hilfe dieses Satzes wird ein bekannter Approximationssatz hergeleitet und gezeigt, daß  $\sigma_n^\delta(x) - f(x) = O(\log n \cdot n^{-\alpha})$  gilt, wenn  $f(t)$  der Klasse  $\text{Lip } \alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) angehört. — X. Verf. beweist das folgende Konvergenzkriterium: die Funktion  $q(t)$  sei integrierbar und erfülle die beiden Bedingungen

$$(1) \int_0^t |q(u)| du = o(t) \text{ für } t \rightarrow 0 \text{ und } n \int_0^{\pi/n} dt \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \int_{t+2k\pi/n}^{t+(2k+1)\pi/n} \frac{\varphi(v) - \varphi(v-\pi/n)}{v} dv = o(1).$$

Dann konvergiert die Fourierreihe von  $q(t)$  bei  $t = 0$ . Aus dem Beweis ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fourierreihe von  $q(t)$  bei  $t = 0$  konvergiert, sofern nur (1) erfüllt ist, die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\pi/n} \cos nt \, dt \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \int_{t+2k\pi/n}^{t+2(k+1)\pi/n} \frac{\varphi(v) - \varphi(v-\pi/n)}{v} dv = 0. —$$

XI. Für die trigonometrischen Reihen (1)  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ , (1')  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  beweist Verf. Integrabilitätssätze der Art: I. Die Reihe (1) konvergiere in jedem Punkt des Intervalls  $(\delta, \pi)$ , wo  $\delta$  irgendeine positive Zahl bedeutet, die Absolutbeträge ihrer Teilsummen seien daselbst gleichmäßig beschränkt, ferner sei die Bedingung (2)  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = O(1)$  erfüllt. Das Cauchysche Integral



(3)  $\int_0^{\pi} g(x) dx$  konvergiert dann und nur dann, wenn die Reihe (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  konvergiert. Im Fall der Reihe (1') ist die Bedingung (2) durch die beiden Bedingungen

$$(2') \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0, \quad \sum_{r=n}^{2n} a_r = O(1), \quad (4) \quad \text{durch} \quad (4') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \quad \text{und das Integral}$$

(3) durch (3')  $\int_0^{\pi} \frac{t(t)}{t} dt$  zu ersetzen. II. Es sei  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$ ,

$\sum_{r=1}^n r a_r = O(n^{\alpha})$  und  $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| = O(n^{-\beta})$ . Dann existieren die Integrale

$\int_0^{\pi} \frac{t(x)}{x^{\alpha}} dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{g(x)}{x^{\beta}} dx, \quad \gamma = 2\alpha(\alpha + \beta)$ . Gilt überdies  $0 < \beta + \alpha < 1$ , so gehört

(1) der Klasse  $L^{\gamma}$  mit  $\gamma < (\alpha + \beta)/(\alpha - \beta)$  an.

V. Garten.

Rogosinski, W. W.: Extremum problems for polynomials and trigonometrical polynomials. J. London math. Soc. 29, 259—275 (1954).

Verf. betrachtet die Klasse  $\mathfrak{T}_n$  reeller trigonometrischer Polynome höchstens  $n$ -ten Grades  $t(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$  mit Beträgen  $|t(\theta)| \leq 1$ . Es sei  $I(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k + \sum_{k=1}^n \mu_k b_k$  eine reelle lineare Form der  $a_k, b_k$ . Verf. erortert das in  $\mathfrak{T}_n$  ersichtlich erreichte  $\max_{t \in \mathfrak{T}_n} |I(t)| = \|I\| = I(T)$ ,  $T \in \mathfrak{T}_n$ ;  $T$  heißt ein für  $I(t)$  extremales Polynom (e. P.). Ein hier vom Verf. mit funktionaler Rechnung erzieltetes Ergebnis erlaubt, zu gegebenem  $T$  die Klasse aller solcher  $I(t)$  zu bestimmen, daß  $(1) |I(t)| \leq I(T)$  nicht aber umgekehrt  $I(T)$  zu gegebenem  $I(t)$ . Um es herzuleiten,

bringt er  $I$  auf die Form  $(2) |I(t)| = \int_0^{2\pi} t(\theta) d\mu(\theta)$  mit  $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = \max |I(t)|$ ; die Funktion

$\mu(\theta)$  ist in  $[0, 2\pi]$  von beschränkter Schwankung. Passend genormt, heißt sie extremaler Kern (e. K.) für  $I$ . Der in Rede stehende Satz 1 lautet: Ist  $T \equiv 1 [\equiv -1]$  ein e. P. für  $I$ , dann nimmt  $a(\theta)$  zu  $ab$ , — und umgekehrt. Ist weder  $T \equiv 1$  noch  $T \equiv -1$ , und ist  $T$  ein e. P. für  $I$ , dann gibt es gerade einen e. K.; er ist eine nicht feste Treppenfunktion (Tf.)  $\mu(\theta)$ , die höchstens  $n$  Stellen positiven (und höchstens  $n$  negativen) Sprunges  $\alpha_j$  (und  $\beta_j$ ) aufweist ( $0 \leq \alpha_j, \beta_j < 2\pi$ , in denen  $(3) T(\alpha_j) = 1, T(\beta_j) = -1$ ). Umgekehrt ist eine solche Tf.  $\mu(\theta)$  dann und nur dann e. K. für (2)  $I(t)$ , wenn es  $T \in \mathfrak{T}_n$  mit den Eigenschaften (3) gibt. Diese  $T$  sind dann die e. P. für  $I$ . Geeignete Wahl von  $T$  gestattet die Angabe bemerkenswerter Ungleichungen. Z. B. ist  $T = \cos s\theta, 1 \leq s \leq n$ , dann und nur dann (Satz 5) e. P. für  $I$  (so daß  $\|I\| = \lambda_s > 0$ ), wenn die Größen  $\gamma_k = \lambda_k + i\mu_k$  die Beziehungen  $\gamma_{-k} = \gamma_k, \gamma_{k+2s} = \gamma_k$ ,

$A_j = \lambda_j + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{s-1} \gamma_{s-k} e^{ik\pi/s} + (-1)^j \lambda_0 \geq 0, 0 \leq j \leq 2s-1$  erfüllen. Wenn  $A_j$  in dem

Sonderfalle  $s = n$  für alle  $j$  positiv bleibt, ist  $\cos n\theta$  für  $I$  das einzige e. P. Beispiele: I.  $s = 1$ . Nur die Funktionale  $I(t) = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_0 a_2 + \lambda_1 a_3 + \dots, \lambda_0 \geq \lambda_1$  haben das e. P.  $\cos \theta$ .

II.  $s = 2$ . Nur die Bedingungen  $\lambda_1 \geq (\lambda_0 + \lambda_2)/2, \mu_1 \geq (\lambda_2 - \lambda_0)/2, \lambda_0 \geq \lambda_2$  unterworfenen Funktionale  $I(t) = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1 + \lambda_2 a_2 + (\lambda_1 a_3 + \mu_1 b_3) + \lambda_0 a_4 + \dots$  haben  $\cos 2\theta$  als e. P. III. Ist  $s = n$  und  $\gamma_k = i\mu_k$  für  $0 \leq k \leq n$ , dann ist  $\sin n\theta$  einziges e. P.

für  $I(t) = \sum_{k=1}^n k b_k, \|I\| = n$ . Sonderfall: Bernsteins Ungleichung  $|t'(\theta)| \leq n$  (1912). — Mit  $\gamma_k = k$

ähnlich  $\tilde{t}(\theta) \leq n$ , wo  $\tilde{t}(\theta)$  zu  $t(\theta)$  konjugiert; Gleichheit nur für  $t(\theta) = \cos n(\theta - \theta_0)$ . Der auf  $\mathfrak{T}_n$  bezüglichen Frage entspricht eine zweite, betreffend die Klasse  $\mathfrak{P}_n$  komplexer Poly-

nome  $p(z)$  höchstens  $n$ -ten Grades  $p(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ , Im  $c_0 = 0, |\operatorname{Re} p(z)| \leq 1$ , wenn  $|z| \leq 1$ .

In die Sprache der  $p(z)$  übersetzt, lautet 5) als Satz 3) für sie nützliche Dienste. Der Unglei-

chung (1) treten solche der Form  $J(p) \leq J(P), P \in \mathfrak{P}_n$  zur Seite, wo  $J(p) = \sum_{k=0}^n \gamma_k c_k$  mit

$P$  sind, wenn  $\eta_k = 1$ , alle  $\eta_k$  e. P. Wählt man  $P(z) = z^s, 1 \leq s \leq n$ , so erhält man folgenden

Satz 2: Beschränkung (4)  $J(p) \leq \lambda_s$  tritt für alle  $p \in \mathfrak{P}_n$  dann und nur dann ein, wenn

(5)  $\operatorname{Re} \left[ \gamma_s + 2 \sum_{k=1}^{s-1} \gamma_{s-k} z^k + \gamma_0 z^s \right] \geq 0$  für  $|z| \leq 1$ ; wenn ferner  $\gamma_{s+k} = \gamma_{s-k}$ , sobald  $0 \leq k <$

$s \leq n-k$ , so daß  $\gamma_s + \lambda_s = 0$ , und wenn für  $2s \leq n$  schließlich  $\gamma_k = 0$ , sobald  $0 \leq k < p$  und  $2s - p \leq k \leq n$ , wo  $2s = n - p$ . Ist  $3s \leq n$ , so sind alle  $\gamma_k$  null, (4) wird belanglos. In dem wichtigen Falle  $s = n$  bleiben als Bedingungen allein (5) und  $\gamma_n = 0$  übrig. Wenn

dann die linke Seite von (5) positiv bleibt, sind  $P(z) = \eta z^n$  die einzigen c. P. Folgerungen: Aus Satz 3 folgt für  $2s \leq n$ , daß, wenn kurz  $\sum_0^s c_k z^k + \sum_{s+1}^n c_k R^{2(s-k)} z^k = S$  ist,  $|\operatorname{Re} S| \leq R^s$  für  $|z| \leq R$ ,  $R > 1$ . Für  $s = n$  erscheint ein Ergebnis von Szegő, Schriften Königsberg. Ges., naturw. Abt. 5, 68 (1928). Ist  $s \geq 1$  und  $\varrho_s > 0$  die größte Zahl der Art, daß  $\operatorname{Re} \left\{ 1 + 2 \sum_1^{s-1} z^k + z^s \right\} \geq 0$  für  $|z| \leq \varrho_s$ , dann liefert Satz 2, wenn  $2s \geq n$  ist,  $|S| \leq R^s$  für  $|z| \leq R$ ,  $R > \varrho_s^{-1}$ . Es ist  $\varrho_s \geq \varrho_3 \sim 0,7004$  (nach Szegő, a. a. O., 80). — Für zwei Polynome  $p(z)$ ,  $q(z) = \sum_0^n b_k z^k \in \mathfrak{P}_n$  gewinnt Verf. die Ungleichung

$$\left| c_0 b_n + \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} c_k b_{n-k} z^k + c_n b_0 z^n \right| \leq 1,$$

wenn  $|z| \leq 1$ . Zum Schlusse leitet er aus Satz 2 Ungleichungen für die  $c_k$  selbst her. Ist  $\gamma_s = 1$  und sonst  $\gamma_k = 0$ , so ergibt sich  $|c_s| \leq 1$ , wenn  $3s > n$ . Ist  $2s > n$ , so  $|c_s| \leq 1 - |c_0|$ . — Schwerer ist es,  $C_k(n) = \max |c_k|$ ,  $p \in \mathfrak{P}_n$ , zu finden, — oder: da  $C_k(n) = C_1(n/k)$  ist,  $C_1(n)$ ; dabei ist  $C_1(2m) = C_1(2m-1)$ . Es ist  $C_1(1) = C_1(2) = 1$ ; Verf. beweist, daß  $C_1(3) = C_1(4) = 2/\sqrt{3}$ . L. Koschmieder.

**Salem, R. and A. Zygmund: Some properties of trigonometric series whose terms have random signs. Acta math. 91, 245—301 (1954).**

Unter  $\{q_n(t)\}$  das System der Rademacherschen Funktionen verstanden, untersuchten Paley und Zygmund [Proc. Cambridge philos. Soc. 26, 337—357, 458—474 (1930); dies. Zbl.

6, 198] bei trigonometrischen Reihen vom Typus (1)  $\sum_1^\infty q_n(t) A_n(x)$ ,  $A_n(x) = a_n \cos nx +$

$b_n \sin nx$  solche Eigenschaften, welche „fast allen“ Reihen zukommen, d. h. solche, welche für fast alle Werte von  $t$  gelten. Verff. bilden jetzt mit einem im Intervall  $(a, b)$  beliebigen ortho-normalen Funktionensystem  $\{q_n\}$  und der Folge  $\{\gamma_n\}$  nicht-negativer Konstanten, für die

$S_n = \sum_{v=1}^n \gamma_v \rightarrow +\infty$  strebt für  $n \rightarrow \infty$ , die bewichteten Mittel  $R_n(x) = \sum_{v=1}^n \gamma_v q_v(x) \left/ \sum_{v=1}^n \gamma_v \right.$

und fragen nach Bedingungen, unter welchen bei  $n \rightarrow \infty$  fast überall  $R_n(x) \rightarrow 0$  strebt. Sie finden für ein gleichmäßig beschränktes Funktionensystem die folgende hinreichende Bedingung:

Unter  $\omega(u)$  eine monoton wachsende Funktion von  $u$  verstanden, für die  $u \omega(u) \rightarrow +\infty$  und (2)  $\sum 1/k \omega(k) < \infty$  gilt, strebt fast überall  $R_n(x) \rightarrow 0$ , sofern nur  $\gamma_n = O(S_n \omega(S_n))$  ist.

Dies gilt nicht mehr, wenn (2) divergiert. Speziell für das Rademachersche Funktionensystem  $\{q_n\}$  ist  $\gamma_n = o(S_n \log \log S_n)$  eine hinreichende Bedingung dafür, daß fast überall  $R_n$  gegen Null strebt, und dies wird falsch, sobald in der Bedingung das  $o$  durch  $O$  ersetzt wird. Weiter zeigen

Verff., daß das Kolmogoroffsche Gesetz des iterierten Logarithmus für fast alle Reihen (1) gilt. In (1) bedeute nämlich jetzt  $\{q_n\}$  das Rademachersche System, und es sei  $\omega(u)$  eine wie oben be-

schaffene Funktion,  $c_k^2 = a_k^2 + b_k^2$ ,  $B_N^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N c_k^2$ ,  $S_N = \sum_1^N q_k(t) A_k(t)$ . Unter den Voraussetzun-

gen  $B_N^2 \rightarrow \infty$ ,  $c_N^2 = O(B_N^2 \omega(B_N^2))$  gilt dann für fast alle Werte von  $t$   $\lim (S_N) / \sqrt{2 B_N^2 \log \log B_N^2} = 1$  fast überall in  $x$ . Überdies strebt die Verteilungsfunktion von  $S_N / B_N$ , für fast alle  $t$ , gegen die Gaußsche Verteilung mit dem Mittelwert 0 und der Dispersion 1. Analoge Sätze werden auch

für Potenzreihen und Abel-Poissonsches Summierungsverfahren aufgestellt. — Ferner wird das Maximum des Absolutbetrages trigonometrischer Polynome mit zufälliger Vorzeichenver-

teilung ihrer Koeffizienten abgeschätzt. Es sei  $\{q_n(t)\}$  wieder das Rademachersche System,

$P_n(x, t) = \sum_1^n r_m q_m(t) \cos mx$ ,  $M_n = M_n(t) = \max_x |P_n(x, t)|$ ,  $R_n = \sum_1^n r_m^2$ ,  $T_n = \sum_1^n r_m^4$ . Dann

gibt es eine absolute Konstante  $A$  derart, daß fast überall in  $t$   $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) / \sqrt{R_n \log n} \leq A$

gilt. Unter der Voraussetzung  $T_n / R_n^2 = O(1/n)$  gilt fast überall in  $t$   $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) / \sqrt{R_n \log n} \leq 1$ . Entsprechende Abschätzungen werden auch für die Funktionen von Steinhaus an Stelle der

Rademacherschen durchgeführt; hier ergeben sich die Konstanten  $2^{3/2}$  und 1. — Unter  $\{q_n(t)\}$

wieder das Rademachersche System verstanden, heiße die Reihe  $\sum_1^\infty r_m q_m(t) \cos(m x - \alpha_m)$

mit  $\sum r_m^2 < \infty$   $r$ -stetig („randomly continuous“), wenn sie für fast alle Werte von  $t$  eine stetige Funktion darstellt. Es werden einige interessante Bedingungen für die  $r$ -Stetigkeit mitgeteilt.

Ist z. B.  $\bar{R}_n = \sum_{m=1}^\infty r_m^2$  der Rest der konvergenten Reihe  $\sum r_m^2$  und gilt (4)  $\sum \sqrt{\bar{R}_n/n} \sqrt{\log n} < \infty$ ,

so ist die Reihe (5)  $\sum_1^\infty r_m q_m(t) \cos mx$   $r$ -stetig; für fast alle  $t$  konvergiert sie sogar gleichmäßig



in  $x$ . — Ist  $\{n_q\}$  eine „Lückenfolge“, d. h.  $n_{q+1}/n_q \geq \lambda > 1$  und ist (5)  $r$ -stetig, so konvergieren für fast alle  $t$  die Teilsummen  $S_{n_q}$  von (5) gleichmäßig in  $x$ . — Ist (3)  $r$ -stetig,  $\bar{R}_n = \sum_{m=1}^{\infty} r_m$ ,  $\bar{T}_n = \sum_{m=1}^{\infty} r_m^2$ , so gilt  $\bar{R}_n \log T_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . — Ist  $\{r_m\}$  eine fallende Folge und gibt es

einen Exponenten  $p > 1$  derart, daß die Folge  $R_n (\log n)^p$  wächst, so ist die Konvergenz der Reihe (4) sowohl notwendig als auch hinreichend für die  $r$ -Stetigkeit von (5). — Schließlich betrachten die Verf. noch den Fall von Potenzpolynomen. Es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} x_k x^k$  eine Potenzreihe vom

Konvergenzradius 1, die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x_k q_k(t) x^k$ , unter  $q_k(t)$  wieder die Rademacherschen Funktionen verstanden, hat dann die Teilsummen  $P_n = \sum_{k=0}^n x_k q_k(t) x^k$ . Weiter sei  $M_n(t) =$

$\max_{-1 \leq x \leq +1} |P_n|$ . Nach dem Prinzip vom Maximum folgt aus (8) mit  $R_n = \sum_{k=0}^n x_k^2$ , fast überall

in  $t$ ,  $M_n(t) = O(\sqrt{R_n \log n})$ . Die Verf. gelangen hier aber zu besseren Abschätzungen und zeigen: Unter den Voraussetzungen  $R_n \rightarrow \infty$  und  $\alpha_k^2 = o(R_k / \log \log R_k)$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) / \sqrt{2 R_n \log \log R_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) / \sqrt{R_n} = O(1)$$

für fast alle  $t$ . Daher besitzt  $M_n(t)$  keine bestimmte Größenordnung für fast alle  $t$  gerade in den einfachsten Fällen ( $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = 1$ ), zum Unterschied von den trigonometrischen Polynomen. V. Garten.

**Kiprijanov, I. A.:** Über Konvergenz und Summation trigonometrischer Interpolationspolynome für Funktionen von zwei Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 953—955 (1954) [Russisch].

Verf. ergänzt früherer Untersuchungen (dies. Zbl. 55, 294) über den Zusammenhang zwischen der Summierbarkeit von Fourierteilsummen und trigonometrischen Interpolationspolynomen bei (2-)periodischen Funktionen zweier Veränderlicher. Er verwendet folgende Funktionmengen:  $L^M$ , die Orliczklasse;  $\tilde{A}$ , die Klasse der einschließlich ihrer ersten partiellen Ableitungen absolut stetigen Funktionen;  $\tilde{A}^M$ , die Klasse der Funktionen in  $\tilde{A}$  mit zweiten Ableitungen in  $L^M$ . Weiter bedeuten  $s_{mn}(f)$  die Fourierteilsummen und  $U_{mn}(f)$  die trigonometrischen Interpolationspolynome mit  $(2m+1)(2n+1)$  äquidistanten Teilpunkten. Alle Grenzübergänge seien für  $m, n \rightarrow \infty$  unter der Einschränkung  $\tau^{-1} < m/n < \tau$ . Als Beispiel für die Ergebnisse sei Satz 3 genannt: Gilt  $f - s_{mn} \rightarrow 0$  für jedes  $f \in L^M$ , so gilt  $m/n \|f - U_{mn}\|_M \rightarrow 0$ ,  $n \|\partial f / \partial x - \partial U_{mn} / \partial x\|_M \rightarrow 0$ ,  $m \|\partial f / \partial y - \partial U_{mn} / \partial y\|_M \rightarrow 0$  für jedes  $f \in \tilde{A}^M$ . Satz 4 bringt eine entsprechende Aussage mit der  $L^1$ -Norm. Satz 1 und 2 behandeln ähnliche Fragen bei Summierbarkeit, wobei die Behauptung vom selben Typ wie in Satz 3, die Voraussetzung jedoch stärker ist. K. Zeller.

## Funktionentheorie:

● **MacRobert, T. M.:** Functions of a complex variable. 4th rev. ed. London: Macmillan Comp., Ltd.; New York: St. Martin's Press, Inc. 1954. XVI, 422 p. 20 s net.

**Davis, P. and P. Rabinowitz:** On the estimation of quadrature errors for analytic functions. Math. Tables Aids Comput. 8, 193—203 (1954).

A complex variable method for the estimation of errors arising when approximate rules of quadrature are applied to a class of analytic functions is developed, which uses a knowledge of the modulus of the function but, in contrast to the usual real variable methods, not of its derivatives, in the complex plane. It is wellknown that every member of the class  $L^2(B)$  of functions single-valued and regular in  $B$ , and for which the norm  $\|f\|_B = \left( \iint_B |f(z)|^2 dx dy \right)^{1/2} < \infty$ , can be expressed as a Fourier

series  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_n(z)$  where  $a_n$  is the inner product  $\iint_B f(z) \zeta_n dx dy$ , and hence  $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ . The authors consider the case in which  $B$  is the ellipse  $\varepsilon_\varrho$  with foci at  $(\pm 1, 0)$ , major and minor semi-axes  $a, b$ , and  $\varrho = (a+b)^2$ . A complete orthonormal system  $\zeta_n(z)$  is then given by the polynomials  $\zeta_n(z) = 2(n+1)^{1/2} \pi^{-1/2} (\varrho^{n+1} - \varrho^{-n-1})^{-1/2} U_n(z)$ , where the  $U_n(z)$  are the Chebyshev polynomials  $(1-z^2)^{-1/2} \sin((n+1) \cos^{-1} z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . It is clear that every  $f(z)$  analytic on  $(-1, 1)$  is of class  $L^2(\varepsilon_\varrho)$  for some  $\varrho > 1$ . Hence the error  $E(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^N a_k f(\lambda_k)$  obtained in using an arbitrary rule  $R$  of approximation, where the  $\lambda_k$  lie in  $(-1, 1)$  and the  $a_k$  are the associated weights, satisfies  $E(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E(\zeta_n)$ , whence, by Schwarz' inequality,  $E(f) \leq \sigma_R \|f\|$ , where  $\sigma_R = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |E(\zeta_n)|^2 \right\}^{1/2}$ , being the norm of the bounded linear functional  $E$  over  $L^2(\varepsilon_\varrho)$ , depends only on  $\varepsilon_\varrho$  and the quadrature rule  $R$ , and is here expressed in terms of Chebyshev polynomials evaluated at the  $\lambda_k$ . Simple methods of finding an upper bound for  $\|f\|$  in terms of the max  $|f(z)|$  in  $\varepsilon_\varrho$  or in  $|z| \leq a$  are given, as well as a table of values of  $\sigma_R$ , and the examples  $\int_0^1 \exp(ct) dx$  and  $\int_3^4 I'(x) dx$  are worked out.

N. A. Bowen.

**Fekete, Michel:** Approximation par des polynomes avec conditions diophantiennes. II. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1455—1457 (1954).

In seiner ersten Note (dies. Zbl. **56**, 68) hat Verf. notwendige Bedingungen hergeleitet, unter denen die auf der beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge  $E$  stetige Funktion  $f(z)$  gleichmäßig und konvergent durch Polynome approximiert werden kann, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen aus einem gegebenen imaginär-quadratischen Zahlkörper sind. Von diesen Bedingungen zeigt Verf. in der vorliegenden Note, daß sie auch hinreichend sind.

P. Heuser.

**Davis, Philip and Henry Pollak:** Complex biorthogonality for certain sets of polynomials. Duke math. J. **21**, 653—667 (1954).

Soient donnés un domaine  $B$  du plan complexe, de contour  $C$ , et un système complet  $\{L_n\}$  de fonctionnelles linéaires sur  $L_2(B)$ : le théorème de biorthogonalité de J. L. Walsh et P. Davis (ce Zbl. **49**, 53) garantit l'existence de combinaisons linéaires finies  $L_n^*$  des  $L_n$ , d'une part, de fonctions  $q_m(z) \in L_2(B)$ , d'autre part, vérifiant  $L_n^*(q_m) = \delta_{mn}$  et  $\iint_B q_m q_n dA = \delta_{mn}$ . Les AA. montrent que sous certaines conditions les fonctions  $h_n(z) = L_n^*(1/(z-w))$  (second membre calculé par rapport à  $w$ ) satisfont à un autre type de relations d'orthogonalité  $\oint_C h_n(z) q_m(z) dz = \delta_{mn}$ . De nombreux systèmes classiques de polynomes ou de fonctions rationnelles peuvent être ainsi obtenus par une même méthode; les exemples suivants sont développés: polynomes de Tschébychev de 2<sup>e</sup> espèce, fonctions rationnelles d'interpolation de Takenaka-Walsh, polynomes de Faber.

G. Bourion.

**Saginjan, A. L.:** Über Approximation durch Polynome. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija fiz.-mat. estest. techn. Nauki **7**, Nr. 4, 1—21 (1954) [Russisch].

1. Pour  $p = 0$  donné, soit  $\Omega_p$  la classe des fonctions régulières dans le domaine  $\Omega$  et vérifiant  $\int_{\Omega} |f(z)|^p d\sigma < +\infty$ . L'A. considère un domaine  $\Omega$  non borné satisfaisant aux deux hypothèses suivantes:  $\Omega$  est dans l'extérieur d'un certain



angle  $\arg z \geq \frac{1}{2}\pi$  et son inverse par rapport à l'origine est un domaine borné de Carathéodory. Soit  $\exp[-\theta(r)]$  la mesure linéaire de l'intersection de  $\Omega$  par le cercle  $|z| = r$ . Les conditions suivantes sur  $\theta(r)$ :  $\int_0^{+\infty} r^{-(1+\delta)} \theta(r) dr$  divergente;  $\theta(rt) = \beta \cdot \theta(r)$  pour  $t \geq 1$ ;  $\theta(rt) = \delta \cdot \theta(r) \cdot \log t$  pour  $t \leq t_0 - 1$  ( $\beta, \delta$  constantes) permettent d'affirmer que toute fonction de  $\Omega_p$  est limite de polynômes (en moyenne d'ordre  $p$  sur  $\Omega$ ). Ces conditions ne sont pas contenues dans les conditions données par M. M. Džrbašjan (ce Zbl. 41, 36). 2. L'A. donne, dans l'ordre d'idées des extensions du théorème de Phragmén-Lindelöf, divers critères de normalité, qu'il applique à l'étude de l'approximation par polynômes d'une fonction donnée sur une courbe allant à l'infini. *G. Bourion.*

**Korevaar, Jacob:** Entire functions as limits of polynomials. Duke math. J. 21, 533—548 (1954).

Let  $R$  be a given set in the complex  $z$ -plane. We denote by  $C(R)$  the class of entire functions  $\neq 0$  which may be obtained as the limit of a sequence of polynomials whose zeros lie in  $R$  (the convergence being uniform in every bounded domain). The set  $R$  is called regular if  $C(R)$  consists of all entire functions whose zeros lie in  $R$ . The author proves that, if  $R$  is non-regular, then there is a finite least upper bound to the orders  $\rho$  of the functions  $\in C(R)$ . The principal result of the paper is the following theorem: Let  $C(R)$  contain an entire function of order  $\tau > 0$ . Denote by  $r$  the greatest integer less than  $\tau/2$ . Then  $C(R)$  contains all entire functions of order less than  $r + 1$  whose zeros lie in  $R$  and this bound  $r + 1$  is the best possible. *J. Górski.*

**Ricci, Giovanni:** Sui punti critici degli elementi analitici. Matematiche 9, 43—81 (1954).

Cet article est le résumé d'une conférence où l'A., après avoir exposé les conditions classiques pour que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  admette le point  $z = 1$  pour point singulier, ou que cette série admette la circonférence  $|z| = 1$  comme ligne singulière, annonce des résultats personnels en cours de publication. *G. Bourion.*

**Berg, Lothar:** Abschätzungen von Potenzreihenteilsommen. Ber. Math.-Tagung, Berlin 14. 1.—18. 1. 1953, 193—196 (1953).

**Berg, Lothar:** Über Potenzreihenteilsommen beschränkter Funktionen. Math. Nachr. 11, 213—218 (1954).

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  sei in  $|z| < 1$  konvergent und beschränkt;  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ;  $s_n = b_n \log n$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach E. Landau (Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Berlin 1929) ist  $s_n = O(\log n)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach H. Bohr (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1916, 276—291 (1916); 1917, 119—128 (1917); vgl. auch L. Neder, Math. Z. 44, 115—123 (1921)] braucht nicht notwendig  $s_n = o(\log n)$  zu gelten. Diese letztere Tatsache belegt Verf. an Hand des Beispiels  $s_0 = s_1 = 0$ ,  $b_n = e^{-n^{\alpha}}$  ( $0 < \alpha < 1/2$ ), wobei die Schwierigkeit im Nachweis der Beschränktheit des zugehörigen  $f(z)$  besteht. Weiter untersucht Verf. die Struktur der Folge  $b_n$  in den Fällen, in denen nicht  $s_n = o(\log n)$  ist. Die Folge  $b_n$  ist dann nicht konvergent, hat gewisse Häufungseigenschaften, und für unendlich viele  $n$  und unendlich viele  $m$  gilt  $B^{-1}n^{-1} < b_n/b_{n-1} < b_m/b_{m-1} < C m^{-1/2}$ , wobei die positiven Konstanten  $B$  und  $C$  beliebig klein angenommen und die Exponenten bei  $n$  und  $m$  nicht verschärft werden können. *W. Meyer-König.*

**Borozdin, K. V.:** Über eine mögliche Verallgemeinerung eines Satzes von Heilbronn-Landau. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 705—707 (1954) [Russisch].

Let the power series  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  have real coefficients and radius of

convergence 1, and let  $f(z)$  have an order of growth  $|f(z)| = O(|1-z|^{-\alpha})$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , in a neighborhood of  $z = 1$  bounded by the curves  $r = 1 - |\theta|^\beta$ , where  $\beta \geq 1$  and  $z = r e^{i\theta}$ . Then, if the coefficients  $a_n$  are bounded below,  $a_n \geq -\gamma n^\delta$  ( $\gamma > 0$ ,  $0 \leq \delta < 1$ ), they are bounded above,  $a_n < \Gamma n^{\delta+1/\beta}$ . *A. J. Lohwater.*

**Whittaker, J. M.:** A note on the series  $\sum a_n f(nz)$ . *Duke math. J.* **21**, 571—573 (1954).

The formation of series  $F(z) = \sum a_n f(nz)$  from a given function  $f(z)$  and the determination of  $f(z)$  in terms of  $F(z)$  is a well-known problem. The author studies the rate of growth of  $F(z)$  in relation to those of  $f(z)$  and  $g(z) = \sum a_n z^n$ , and points out that the rates of growth of  $f(z)$  and  $g(z)$  lead to an upper bound on the rate of growth of  $F(z)$ , since  $|F(z)| \leq \sum |a_n| M(nr)$ , where  $M(r)$  is the maximum modulus of  $f(z)$ . The object of the paper is to construct an example where  $F(z)$  is an entire function of order 0, but where  $f(z)$  and  $g(z)$  may both be entire functions of order 1.

*A. J. Lohwater.*

**Schaeffer, A. C.:** Power series and Peano curves. *Duke math. J.* **21**, 383—389 (1954).

Vorangehende Literatur: R. Salem und A. Zygmund [*Duke math. J.* **12**, 569—578 (1945)]. Unter stärkeren Voraussetzungen erhält Verf. eine weitergehende Aussage als in dem Salem-Zygmundschen Satz. Theorem:  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n^2}$  ( $a_1 \neq 0$ ) eine Potenzreihe mit Lücken,  $\sum |a_n| < \infty$ ,  $|a_{n+1}/a_n| \geq q > 3/4$ ,  $\lambda_{n+1} \lambda_n > \mu_n$ , die Folge  $\mu_n$  steigend mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1/2} \leq 1/10$ ; dann wird jeder von  $f(z)$  in  $|z| \geq 1$  angenommene Wert auch auf  $z = 1$  angenommen. Vgl. auch G. Piranian, C. J. Titus and G. S. Young (dies. Zbl. **49**, 54). *W. Meyer-König.*

**Wright, Fred M.:** A transformation for  $S$ -fractions. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 888—901 (1954).

Stieltjes discussed the correspondence between power series  $Q(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n w^{n+1}$  and  $S$ -fractions  $Q(w) \sim c_1 w \overline{1 + c_2 w} \overline{1 + \dots + c_n w} \overline{1 + \dots}$ ,  $c_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . The sequence  $\{\mu_n\}$  is called an  $S$ -sequence. In this paper the embedding of a given  $S$ -sequence  $\{\mu_n\}$  in an  $S$ -sequence  $\{\lambda_0, \lambda_1 (= \mu_0), \lambda_2 (= -\mu_1), \dots\}$ , and the determination of the conditions for a given  $S$ -sequence  $\{\lambda_n\}$  to be such that the sequence  $\{\mu_0 (= -\lambda_1), \mu_1 (= -\lambda_2), \dots\}$  is also an  $S$ -sequence, are considered. From these conditions an  $S$ -fraction transformation is obtained, and the backward extension of a given Stieltjes moment sequence  $\{\mu_n\}$ . These results are used to prove the basic theorem relative to the first backward extension of a given monotone Hausdorff moment sequence  $\{\mu_n\}$ . *E. Frank.*

**Tanaka, Chuji:** Note on Dirichlet Series. XII. XIII. On the analogy between singularities and order-directions. I. II. *Proc. Japan. Acad.* **30**, 157—159, 257—261 (1954).

Sei  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n s)$  ( $s = \sigma + it$ ,  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$ ) eine in der ganzen Ebene gleichmäßig konvergente Dirichlet'sche Reihe; dann wird die Richtung  $\Re(s) = t$  als eine Ordnungsrichtung von  $F(s)$  bezeichnet, wenn im Bereich  $|\Re(s) - t| \leq \varepsilon$ , für jedes positive  $\varepsilon$ ,  $F(s)$  die gleiche Ordnung hat wie in der ganzen Ebene, d. h.

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (-1/\sigma) \log^+ \log^+ M(\sigma) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-1/\sigma) \log^+ \log^+ M(\sigma, t, \varepsilon),$$

$$M(\sigma) = \sup_{-\infty < t < \infty} |F(\sigma + it)|, \quad M(\sigma, t, \varepsilon) = \max_{\Re(s) = \sigma, |\Im(s) - t| \leq \varepsilon} |F(s)|.$$

In der ersten Mitteilung beweist der Verf. den Satz I: Sei

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1/\lambda_n \log \lambda_n) \log |\cos(\theta_n)| = 0, \quad \theta_n = \arg(a_n);$$



(B)  $\Re(a_n) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); dann ist  $\Im(s) = 0$  eine Ordnungsrichtung von  $F(s)$ . — In der zweiten Note wird dies verallgemeinert zu Satz II: Es möge für  $F(s)$  die Annahme A von Satz I gelten sowie die Annahme: (C) Die Folge der Zahlen  $\Re(a_n)$  hat Vorzeichenwechsel zwischen  $\Re(a_{p_v})$  und  $\Re(a_{1+p_v})$ , wo  $\lim (\lambda_{1+p_v} - \lambda_{p_v}) = g > 0$  und  $r_v = \frac{1}{2} (\lambda_{p_v} + \lambda_{1+p_v})$  gesetzt,  $\lim r_v r_v' = \delta (\frac{1}{2} + 1/g)$  gilt. Dann existiert wenigstens eine Ordnungsrichtung in  $\Im(s) \sim \pi \delta$ . Dieser Satz wird weiter verallgemeinert zu Satz III:  $F(s)$  genüge den Annahmen von Satz II, und es sei  $G(s)$  eine weitere in der ganzen Ebene gleichmäßig konvergente Dirichletsche Reihe mit der Exponentenfolge  $\mu_n$ , derart, daß alle Distanzen  $|\mu_n - \lambda_n|$  oberhalb einer festen positiven Schranke liegen. Dann besitzt  $F(s) + G(s)$  wenigstens eine Ordnungsrichtung in  $|\Im(s)| \leq 2\pi \delta$ .  
A. Ostrowski.

Malliavin, Paul: Problèmes de Watson, zéros des fonctions méromorphes, équivalence de divers problèmes d'unicité. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 2481–2483 (1954).

The problem of Watson  $W(M_n, k(r))$  is to investigate whether there is a function  $g(z) \neq 0$ , holomorphic in  $\operatorname{Re}(z) > 0$  and satisfying  $|g(z)| = M_n e^{-nk(r)}$ , where  $n = [\operatorname{Re}(z)]$ ,  $r = z$ ,  $M_n > 1$  a given sequence and  $k(r)$  satisfies  $|k(r) - k(r')| = O[\log(r/r')] = O(1)$ . Let  $M(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n s - \log M_n)$ ,  $k(r) = \lim_{r' \geq r} \text{bound } k(r')$ ,  $\tilde{k}(r) = \lim_{r' \leq r} \text{bound } k(r')$ ; and let  $U(M_n, k(r))$  denote the condition: whatever be the

constant  $a > 0$ ,  $\int_0^\infty M(k(r) - a) \frac{dr}{r^2} = +\infty$ . Two sets of results (to appear probably in Acta math.) are announced: (i) The relation between the satisfaction or nonsatisfaction of  $U(M_n, K(r))$ ,  $K = k, \tilde{k}$  or  $k$ , and the existence of a solution of  $W(M_n, k(r))$ ; (ii) Various uniqueness problems, e. g. Stieltjes' moment problem, have solutions if and only if a solution of an appropriate  $W$  problem exists.

N. A. Bowen.

Malliavin, Paul: Théorèmes d'adhérence pour certaines séries de Dirichlet. Procédés d'extrapolation en analyse fonctionnelle. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 20–22 (1954).

In this sequel to a previous note (cf. preceding review) a theorem, extending the fundamental inequality of Mandelbrojt on adherence with respect to certain Dirichlet series, is stated, and, as a consequence, a lower bound for the order  $\rho$  in a certain strip, in the sense of Ritt-Mandelbrojt, of an integral function defined by an absolutely convergent Dirichlet series having exponents  $\in A$ , in terms of  $A$  and the order  $\rho$  in the plane. The process of extrapolation (loc. cit.) extends to linear operators defined on a dense variety in a Banach space, typical results being given. Finally, the convexity theorem: Let  $f(t) \in L_{\infty}(0, +\infty)$ ,  $M_s = \|f^{(s)}(t)\|_{\infty}$ ; then  $M_s < C \log n e^{\rho s/n} M_0^{1-s/n} M_n^{s/n}$ , where  $0 \leq s \leq n$ ,  $q(t) = \int_0^t \log \left[ \tan \frac{\pi \xi}{2} \right] d\xi$ ,  
( $1 > t > 0$ ), and  $C$  is independent of  $s$  and  $n$ .

N. A. Bowen.

Putnam, C. R.: Remarks on periodic sequences and the Riemannian zeta-function. Amer. J. Math. 76, 828–830 (1954).

In Fortsetzung einer früheren Untersuchung über die Nichtperiodizität der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion im kritischen Streifen (vgl. dies. Zbl. 55, 69) werden zwei weitere Sätze bewiesen.

H. Unger.

Siegel, Carl Ludwig: A simple proof of  $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau) / \tau i$ . Mathematika, London 1, 4 (1954).

Dedekind zeigte für  $q = 1$  und  $q = e^{2\pi i \tau}$  und  $q^{1/24} \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l) = \eta(\tau)$

das Bestehen der Funktionalgleichung (1)  $\eta(\tau) = \sqrt{i/\tau} \eta(-1/\tau)$ . Durch Ausschcheidung von  $\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l)$  bleibt eine zu (1) gleichwertige Aussage über Lambert-sche Reihen:

$$(2) \quad \frac{\pi i}{12} (\tau + \tau^{-1}) + \frac{1}{2} \ln \frac{\tau}{i} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1}{e^{-2\pi i k \tau} - 1} - \frac{1}{e^{2\pi i k/\tau} - 1} \right).$$

Deutet man die Summanden in (2) als Residuen der Integranden

$$z^{-1} \operatorname{ctg} \left\{ z \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{z}{\tau} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

und benutzt die Existenz von  $\lim_{\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty} \operatorname{ctg} z$ , so folgt (2) durch Randintegration.

Methodisch erscheint der Übergang von einfach periodischen Unterfunktionen zu automorphen Oberfunktionen besonders elegant.

W. Maier.

**Look, C. H.: On the Fourier coefficients of the function  $t(\omega_1, \omega_2)$ .** Acta math. Sinica 4, 113—124 und engl. Zusammenfassg. 124 (1954) [Chinesisch].

Let  $\omega_1$  and  $\omega_2$  be two complex numbers and  $\tau = \omega_2/\omega_1$ . We suppose that the imaginary part of  $\tau$  is positive. As usual, we use  $\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$  to denote Weierstrass' elliptic function. Let  $t(\tau) = t(\omega_1, \omega_2) = 12 \wp(\frac{1}{2}\omega_1)/(\wp(\frac{1}{2}\omega_1) - \wp(\frac{1}{2}\omega_1))$ . The purpose of the note is to find the coefficients of the Fourier expansion of  $t(\tau)$ , namely  $t(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i \tau}$ . We prove that

$$a_m = \frac{\pi}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{0 \leq h < k \leq \infty \\ (h, k) = 1}} \frac{\lambda(h, k)}{k} e^{-\pi i/2 k(h' + 4mh)} I_1\left(\frac{2\pi\sqrt{m}}{k}\right),$$

where  $h h' \equiv -1 \pmod{k}$ ,  $I_1(z)$  is the Bessel function of the first order of pure imaginary argument and  $\lambda(h, k)$  equals to 0,  $-1$ ,  $-1$ ,  $-i$  or  $-i$  according to the values of  $h$  and  $k$  belonging to various classes.

Autoreferat.

**Fick, E.: Konforme Abbildungen durch elliptische Funktionen.** Z. angew. Math. Mech. 34, 416—429 (1954).

Die zeichnerische Beherrschung der elliptischen Funktionen wird hier für zwölf grundlegende Transzendente wie  $\varphi, \zeta, \sigma, \theta, \dots$  ermöglicht, zunächst durch konforme Abbildung von Maschennetzen. Weiter werden die Randwerte längs einem Periodenrechteck kartesisch dargestellt. Die vieldeutigen Umkehrfunktionen werden außerdem durch Verzweigungsschnitte und Zusammenhangsverhältnisse graphisch verdeutlicht.

W. Maier.

**Biernacki, Mieczysław: Sur quelques applications de la formule de Parseval.** II. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 7, 5—13 und poln. u. russ. Zusammenfassgn. 13—14 (1954).

(Part I, ce Zbl. 41, 38.) Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans  $|z| \leq 1$ . On représente par  $M(r, f)$  le maximum de  $|f(z)|$  sur  $|z| = r$ , par  $S(r, f)$  l'aire du domaine Riemannien décrit par  $f(z)$  quand  $z$  décrit le cercle  $|z| \leq r$ , par  $I_k(r, f)$  la valeur moyenne d'ordre  $k$  de  $|f(z)|$  sur  $|z| = r$ . L'A. déduit de la formule de Parseval des inégalités déjà connues ou nouvelles, parmi lesquelles nous citerons:  $S(r, f) \leq \pi r M(r, f) I_1(r, f)$  et  $S(r, f) \leq \pi r M(r, f) I_1(r, f')$ ;  $S(r, f) \leq \pi M(r, f) I_2^2(r, f)$  et  $S(r, f) \leq \pi I_1(r, f) I_2^2(r, f)$  si  $f \neq 0$ ;  $I_2^2(r, f) \leq M(r, f) I_1(r, f)$  et  $I_2^2(r, f) \leq I_1(r, f) M(r, f)$ .

J. Dufresnoy.

**Shah, S. M. and S. K. Singh: On the maximum function of a meromorphic function.** Math. Student 22, 121—128 (1954).

Les AA. montrent que des théorèmes établis par S. K. Bose (ce Zbl. 48, 312) sont faux.

J. Dufresnoy.

**Kaplan, Wilfred: Extensions of the Gross star theorem.** Michigan math. J. 2, 105—108 (1954).

Soit  $w = \Phi(z)$  une fonction méromorphe dans l'un des domaines  $D$  suivants:



le plan moins un ensemble dénombrable de points, le domaine  $0 < |z| < 1$ , le cercle unité. L'A. étudie le prolongement analytique de la fonction inverse  $z(u)$  le long de courbes définies par  $w = r(s + it)$  avec  $s = \text{const.}$ , la fonction  $f(s + it)$  étant méromorphe dans un domaine  $G: 0 < s < 1, -b < t < h(s)$ .

*J. Dufresnoy.*

**Umezawa, Toshio:** The coefficients of meromorphic functions. Duke math. J. **21**, 355—361 (1954).

The author extends a result of A. W. Goodman (this Zbl. **42**, 313), on functions regular in  $|z| < 1$  and starlike of order  $p$  in the direction of the diametral line (T. Umezawa, this Zbl. **48**, 313), to the case of functions meromorphic in  $|z| \leq 1$ , by proving that the magnitude of its Laurent series coefficients depends on the location of its zeros and poles. Further, the author obtains two theorems which are specializations of a theorem of M. S. Robertson (this Zbl. **47**, 313).

*K. Noshiro.*

**Collingwood, Edward F.:** Sur les ensembles d'accumulation radiaux et angulaires des fonctions analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 1769—1771 (1954).

$f(z)$  sei eine in  $|z| < 1$  meromorphe analytische Funktion. Definition von  $C_\theta(f, e^{i\theta})$  für reelles  $\theta: a \in C_\theta(f, e^{i\theta})$ , wenn eine reelle Folge  $r_n \rightarrow 1$  mit  $f(r_n e^{i\theta}) \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) existiert. Analog  $C_{\theta, q}(f, e^{i\theta})$  für geradlinige Annäherung an  $e^{i\theta}$  unter dem Winkel  $q$  ( $-\pi/2 < q < \pi/2$ ) gegen den Radius, und  $C_A(f, e^{i\theta})$  für Annäherung an  $e^{i\theta}$  in einem Stolzsehen Winkelraum  $\Delta$ . Ein  $C$  heißt total, wenn seine Komplementärmenge leer ist.  $S(f)$  = Menge der  $e^{i\theta}$ , für die  $C_\theta(f, e^{i\theta})$  total ist.  $I(f)$  = Menge der Plessnerschen Punkte von  $f(z)$  auf  $|z| = 1$  (vgl. E. F. Collingwood and M. L. Cartwright, dies. Zbl. **46**, 84) = Menge der  $e^{i\theta}$ , für die  $C_A(f, e^{i\theta})$  total ist für jedes zu  $e^{i\theta}$  gehörige  $\Delta$ . Theorem 1: Ist  $I(f)$  dicht auf einem Bogen  $\alpha$  von  $|z| = 1$ , so ist  $I(f) \cap \alpha$  eine Restmenge auf  $\alpha$ , d. h. die Komplementärmenge von  $I(f) \cap \alpha$  auf  $\alpha$  ist von erster Kategorie. Theorem 2: Die Differenz zwischen  $S(f)$  und  $I(f)$  ist von erster Kategorie auf  $|z| = 1$ . Theorem 3: Ist eine der Mengen  $S(f)$  oder  $I(f)$  dicht auf einem Bogen  $\alpha$  von  $|z| = 1$ , so ist  $S(f) \cap I(f)$  eine Restmenge auf  $\alpha$ . In den Theoremen 2 und 3 kann  $S = S_p$  ersetzt werden durch  $S_{\theta(q)}$ . Ausführliche Beweise der notwendigen Hilfssätze später.

*W. Meyer-König.*

**Lehto, Olli:** On meromorphic functions of bounded characteristic. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 183—187 (1954).

Bericht einerseits über früher publizierte Ergebnisse des Verf. (vgl. dies. Zbl. **50**, 83; **55**, 307), andererseits über neuere Untersuchungen in bezug auf beschränktartige Funktionen  $w = f(z)$ . Unter diesen sei erwähnt: Es enthalte die abgeschlossene Menge  $F$  alle radialen Grenzwerte bis auf eine harmonische Nullmenge, es sei  $B$  ein solches Komplementargebiet von  $F$ , daß  $f$ -Werte in  $B$  fallen, ferner  $w_0 \in B$  mit  $f(z_0) = w_0$ . Gilt dann  $w_1 \in B$  oder  $w_1 \in F$  mit  $w_1$  von  $B$  aus erreichbar, so läßt sich jeder in  $w_0$  algebraisch-reguläre Zweig von  $f^{-1}$  bis an  $w_1$  (excl.) mit algebraischem Charakter analytisch fortsetzen. Ist  $D \subset B$  und irgendein  $f(z) \in D$ , so nimmt  $f(z)$  alle Werte aus  $D$  bis auf zwei an. Es folgen noch Aussagen über die Relation zwischen Ausnahme- und Randwerten (in bezug auf Beweise für diese vgl. dies. Zbl. **52**, 80).

*G. af. Hällström.*

**Fuchs, W. H. J.:** On the growth of functions of mean type. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **9**, 53—70 (1954).

Let  $f(z) \neq 0$  be regular in  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ , continuous in  $|\arg z| = \frac{1}{2}\pi$ ;  $|f(z)| = e^{Lz}$ ,  $f(iy) = e^{iLy}$  ( $y \geq 0$ ): the sequence  $(\lambda_n)$  satisfy  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c > 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $A(r) = Lr + l(r)$  denote the number of  $\lambda_n \leq r$ ;  $\Phi(r) = \int_1^r u^{-1} dl(u)$  ( $= \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-1} - L \log r = \text{constant}$ ). The following refinement of

Levinson's theorem (this Zbl. 26, 216, Th. 38, p. 108) is proved:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1} \log |f(\lambda_n)| = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \log |f(x)|$$

if and only if (i)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \infty$ , (ii) for given  $\varepsilon > 0$ ,  $\Phi(Y) - \Phi(X) > -\varepsilon$  for

$Y - X \geq X(\varepsilon)$ . — By considering a suitable subsequence of the  $\lambda_n$ , the author is able to appeal to a method due to Boas [Duke math. J. 13, 471—481 (1946)], to prove the sufficiency part of the above theorem, while the necessity part is proved by the construction of counter-examples.

N. A. Bowen.

**Ohtsuka, Makoto:** Note on functions bounded and analytic in the unit circle. Proc. Amer. math. Soc. 5, 533—535 (1954).

Nach W. Gross existieren ganze Funktionen, bei denen jede komplexe Zahl asymptotischer Wert ist. Verf. behandelt das entsprechende Problem für beschränkte analytische Funktionen im Einheitskreis.

H. P. Künzi.

**Kufarev, P. P. und N. V. Semuchina:** Über eine Aufgabe von N. N. Luzin. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4 (62), 183—185 (1954) [Russisch].

N. Luzin (ce Zbl. 36, 181) raised the question of the existence of a function  $f(z)$ , analytic and bounded in  $|z| < 1$ , with the property that almost every point  $\zeta$  of  $|z| = 1$  is an  $L$ -point, a point  $\zeta$  of  $|z| = 1$  being an  $L$ -point if every circle internally tangent to  $|z| = 1$  at  $\zeta$  is mapped by  $f(z)$  onto a region of infinite area. The authors construct, as an example, a function which is analytic and bounded in  $|z| < 1$  with the property that the  $L$ -points of  $f(z)$  form a countable, everywhere dense set on  $|z| = 1$ .

A. J. Lohwater.

**Geronimus, Ja. L.:** Über gewisse Eigenschaften der in einer abgeschlossenen Kreisscheibe stetigen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 889—891 (1954) [Russisch].

Let  $\varphi(z) = \varphi(re^{i\theta})$  be continuous for  $r \leq 1$ , and let  $\omega(\delta; q)$  denote the modulus of continuity of  $\varphi(z)$  for  $r = 1$ , i. e.  $\omega(\delta; q) = \sup \{q(e^{i\theta_1}) - q(e^{i\theta_2})\}$ ,  $|\theta_1 - \theta_2| \leq \delta$ .

Let  $\mathcal{A}$  denote the class of functions  $q(z)$  for which the integral  $\int_0^1 \frac{\omega(x; q)}{x} dx$  exists,

and let  $D_\alpha$  be the class for which  $\omega(\delta; q) \leq C_1 (\log(c/\delta))^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $c > \pi$ ; clearly,  $D_\alpha \subset \mathcal{A}$  for  $\alpha > 1$ . The author obtains several theorems for a function  $f(z)$  analytic in  $|z| < 1$ , which relate the distortion of  $f(z)$  to the modulus of continuity. For example, if  $f(z)$  is regular in  $|z| < 1$ , continuous for  $|z| \leq 1$ , and has modulus of continuity  $\omega(\delta)$  on  $|z| = 1$ , then  $|f'(z)| \leq C_1 \omega[(1-r) \log(c/(1-r))]/(1-r)$  for  $|z| = r < 1$ . This result was obtained by Hardy and Littlewood for  $f(e^{i\theta}) \in \text{Lip } \alpha$ , ( $\alpha \leq 1$ ). For the case  $f(e^{i\theta}) \in D_\alpha$ , the inequality implies the result of M. B. Gagua (this Zbl. 41, 52):  $|f'(z)| \leq C_1/(1-r) |\log(c/(1-r))|^\alpha$ . These results are further extended to show that the inequality  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq C_1 \omega(|z_1 - z_2|) (\log c/|z_1 - z_2|)^\alpha$  holds in the closed disc.

A. J. Lohwater.

**Montel, Paul:** Sur un critère principal de normalité. J. Analyse math. 3, 209—224 (1954).

Ein Normalitätskriterium heißt „principal“, wenn es notwendig und hinreichend, „secondaire“, wenn es nur hinreichend ist. Hier wird als ein neues „principales“ Kriterium aufgezeigt: Zu vier vorgegebenen Werten  $a, b, c, d$  sind die Distanzen zwischen den Punkten der entsprechenden Stellensorten innerhalb des (Normalitäts-)Gebietes  $G$  für alle Scharfunktionen gleichmäßig nach unten beschränkt, d. h. ausführlicher: Zu jedem abgeschlossenen Teilbereich  $B \subset G$  gibt es eine Zahl  $\delta = \delta(B) > 0$ , derart daß für alle  $f(z)$  der Schar aus  $f(\alpha) = a$ ,  $f(\beta) = b$ ,  $\alpha, \beta \in B$ , schon  $|\alpha - \beta| \geq \delta(B)$  folgt (und analog für beliebige Paare aus  $a, b, c, d$ ). — Das bekannte principale Kriterium von Marty — Beschränktheit der Kugableitung — wird fortgeführt zu folgender Aussage: Die Schar  $\{f(z)\}$  ist dann und nur dann



normal in  $G$ , wenn innerhalb  $G$  aus  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq p$  stets  $|z_1 - z_2| \leq P(p, B \cap G)$  folgt, d. h. aus einem Kugelabstand zweier Funktionswerte  $\leq p$  für alle zugeordneten Argumentwerte  $z_1, z_2$  ein nach unten positiv beschränkter Kugelabstand; die Schranken hängen natürlich vom Teilbereich  $B \cap G$  ab. Mehrere Ausführungen.

E. Ullrich.

Gelf'fer, S. A.: Die Variation mehrwertiger Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 885—888 (1954) [Russisch].

Variation formulas are derived for functions  $z = f(\zeta)$  belonging to the class  $F_p^v(a_1, \dots, a_m)$  of functions regular in  $|\zeta| < 1$  with  $f(0) = 0$ , which map  $|\zeta| < 1$  one-to-one conformally onto a region  $D$  lying on some  $p$ -sheeted algebraic Riemann surface  $R$  whose genus  $\gamma$  does not exceed a fixed number  $g$ , which take  $\zeta = 0$  into the same point of the surface lying over  $z = 0$ , and which omit in  $|\zeta| < 1$  a given set of points  $a_1, \dots, a_m$ . Let  $z = \Phi(Z)$ ,  $\Phi(0) = 0$ , denote the inverse of the function mapping the universal covering surface of  $R$  onto the extended plane, the punctured plane, or the exterior of the unit circle, depending on the genus  $\gamma$ . For the case  $\gamma = 0$ , let  $Z = A_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ;  $N \leq p(m-1)$  correspond to  $z = a_1, \dots, a_m$ , with  $z = \infty$  corresponding to  $Z = \infty$ . The function  $Z(\zeta) = \Phi^{-1}(f(\zeta))$  is regular

in  $|\zeta| < 1$ , and the function  $Z^*(\zeta) = Z(\zeta) + h Z(\zeta) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z_k}$  for an arbitrary complex  $h$  of sufficiently small modulus maps  $|\zeta| < 1$  onto a domain containing  $Z^* = 0$  and none of the points  $Z^* = A_k$  or  $\infty$ , where  $Z_k = Z(\zeta_k)$ ,  $|\zeta_k| < 1$ . The variation formula obtained for the class  $F_p^v(a_1, \dots, a_m)$  is then that

$$f^*(\zeta) = \Phi(Z^*(\zeta)) = f(\zeta) + h \Phi'(Z(\zeta)) Z(\zeta) \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z_k} \\ - h \zeta f'(\zeta) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k}{\zeta - \zeta_k} + h \zeta^2 f'(\zeta) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k}{1 - \zeta_k - \zeta} + O(|h|^2),$$

where the  $x_k$  are the residues of the function  $\frac{Z(\zeta)}{\zeta Z'(\zeta)} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{Z(\zeta) - A_k}{Z(\zeta) - Z_k}$  at the simple poles  $\zeta_k$ . Analogous formulas are obtained for the case that  $\gamma > 0$ .

A. J. Lohwater.

Reade, Maxwell: Sur une classe de fonctions univalentes. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1758—1759 (1954).

Die Bieberbachsche Vermutung  $a_n \leq n$  wird für die Funktionen  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  bewiesen, welche für  $|z| = 1$  regulär analytisch und beinahe konvex (close-to-convex) im Sinne von W. Kaplan (dies. Zbl. 48, 311) sind. In dieser Funktionenklasse sind u. a. die konvexen und sternartigen Funktionen enthalten.

V. Paatero.

Nehari, Zeev and Binyamin Schwarz: On the coefficients of univalent Laurent series. Proc. Amer. math. Soc. 5, 212—217 (1954).

Die Frage nach Bedingungen für die Laurent-Koeffizienten  $a_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) bei schlichter (bzw.  $k$ -wertiger) konformer Abbildung eines Kreistrings scheint zum ersten Male vom Ref. im Zusammenhang mit Umkehrfragen bei periodischen und fast-periodischen Funktionen aufgeworfen worden zu sein (dies. Zbl. 20, 310). Die Verff. behandeln (für  $k = 1$ ) die beiden Fälle a) reeller  $a_n$ , b) einer Abbildung auf ein (den Nullpunkt nicht enthaltendes) Sterngebiet bezüglich des Nullpunktes. Im Falle a) muß, falls der Ring durch  $0 < q < |z| < 1$  gegeben ist, gelten

$$(1 - q^{2n}) |a_n| \leq n(a_1(1 - q^{n+1}) - a_{-1}(1 - q^{n-1})), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

und diese Schranken sind insofern scharf, als sie bei der speziellen Abbildung  $w = \varphi(\lg z; i\pi, \lg q)$  erreicht werden, wo  $\varphi$  die Weierstraßsche Funktion mit den Halbperioden  $i\pi, \lg q$  bedeutet. Diese bildet den Kreisring auf eine mit zwei

getrennten, auf der reellen Achse gelegenen Schlitzzen verschiebene Vollebene schlicht ab. Ähnliche Bedingungen gelten auch im Falle b), doch bleibt dahingestellt, ob sie scharf sind.

*Hermann Schmidt.*

**Kufarev, P. P.:** Über eine Eigenschaft der Extremalgebiete des Koeffizientenproblems. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 391–393 (1954) [Russisch].

Man weiß, nach Goluzin [Akad. Nauk SSSR, Trudy Inst. Steklov **27** (1949)], daß die Funktion  $f(z)$ , für welche das Funktional  $L(q) = \operatorname{Re} q^{(n)}(0):n!$  in der Klasse  $(S)$  der normierten schlichten Abbildungen  $w = \varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  von  $|z| < 1$  sein Maximum erreicht, den Einheitskreis in ein Gebiet  $G$  abbildet, das aus der  $w$ -Ebene erhalten wird, indem man Schnitte längs einer endlichen Zahl analytischer Bögen ohne mehrfache Punkte zieht. Der Beweis ruht darauf, daß ein solches  $f(z)$  einer bestimmten Differentialgleichung der Gestalt genügt:

$$\left(z \frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{B(z)}{A(f)}.$$

Hier wird allgemeiner gezeigt: Ist  $\Gamma$  der Rand des obigen Extremalgebiets  $G$  und  $C = C(w_0, w_1)$  ein Teilbogen von  $\Gamma$  mit den Endpunkten  $w_0, w_1$ ; dann  $G(w_0, w_1)$  das Gebiet der  $w$ -Ebene, welches durch den Schlitz  $C$  erzeugt wird; so genügt die normierte Abbildungsfunktion  $z = F(w, w_1) = e^{w_1} \cdot w + \dots$  welche  $G(w_0, w_1)$  in  $|z| < 1$  überführt, wieder einer Differentialgleichung der Form

$$\left(w \frac{F'}{F}\right)^2 = \frac{A(w)}{B(F, w_1)},$$

wo über  $A, B$  genaue Angaben gemacht werden können.

*E. Ullrich.*

**Rachmanov, B. N.:** Zur Theorie der schlichten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 973–976 (1954) [Russisch].

Es werden mehrere Klassen schlichter Gebiete  $G_k$  von besonderer Art betrachtet, welche als Verwandte von Sterngebieten gelten dürfen: Es wird dazu jeweils eine gewisse Kurvenschar festgelegt, und gefordert, daß ein bestimmter Bogen derjenigen Kurve, die durch einen Randpunkt von  $G_k$  geht, ganz dem  $G_k$  angehöre. Dann lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, analog den bekannten Konvexitäts- oder Sternigkeitsbedingungen ermitteln, dafür, daß eine Funktion  $f_k(z)$  der schlichten Abbildungsklassen  $(S)$  oder  $(\Sigma)$  den Einheitskreis in ein Gebiet der Klassen  $G_k$  überführe. Beispiele:  $G_1$  enthalte einen festen Kreis  $K_r: w = r; z$  geht durch einen Randpunkt  $\omega$  von  $G_k$ , die Kreistangente  $t(\omega)$  mit dem Berührungspunkt  $z(\omega)$  auf  $K_r$ , so soll  $G_1$  stets die offene Strecke  $(z(\omega), \omega)$  enthalten. Notwendige u. hinreichende Bedingung für die zugehörige Funktionenklasse ist

$$\operatorname{Re} \left( 1 + i r / \sqrt{|f_4(z)|^2 - r^2} \right) z f_4'(z) / f_4(z) \geq 0;$$

$r > 0$  entspricht gewöhnlichen Sterngebieten. Ähnliches für Auslotung von  $G_k$  mittels Bögen einer Schar kongruenter Parabeln, die entweder den Scheitel  $w = 0$  gemein haben, oder aber die Achse, oder die Scheiteltangente; endlich mit Tangentenstücken einer festen Parabel  $P \subset G$ , an Stelle des obigen Kreises, u. a. m. *E. Ullrich.*

**Keogh, F. R.:** Some inequalities for convex and star-shaped domains. J. London math. Soc. **29**, 121–123 (1954).

Verf. beweist nach einem interessanten Grundgedanken scharfe obere Abschätzungen für den Krümmungsradius  $\varrho$  und die Länge  $L$  der Niveaulinien von konvexen Gebieten, nämlich:  $\varrho \leq r/(1-r^2)$ ,  $L \leq 2\pi r/(1-r^2)$ , falls die Funktion, die auf den Einheitskreis abbildet, in 0 normiert ist und die dem Kreis mit Radius  $r$  entsprechende Kurve betrachtet wird. Das Gleichheitszeichen wird in beiden Fällen für die Halbebene erreicht. Ähnliche, wenn auch geometrisch minder interessante Sätze werden für Sterngebiete bewiesen.

*H. Grunsky.*

• **Markušević, A. I.:** Komplexe Zahlen und konforme Abbildung. (Populäre Vorlesungen über Mathematik. Nr. 13.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 52 S. R. 0,80 [Russisch].

Elementare Einführung mit Ausblick auf Landkarten, einige spezielle Kurven, Tragflügel nach Žukovskij. *E. Ullrich.*

Hällström, Gunnar af: Über einige Einschnittgebiete allgemeiner Art. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1954, 95—100 (1954).

Die früheren Untersuchungen des Verf. über die konforme Abbildung solcher Einschnittgebiete, die aus dem Kreis durch Anbringen von abzählbar vielen radialen Einschnitten entstehen [Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 15, Nr. 1 (1944) dies. Zbl. 46, 307; 48, 58; 52, 304] werden auf allgemeinere Einschnittgebiete ausgedehnt. Diese entstehen aus einem Jordangebiet durch das Anbringen von abzählbar vielen Einschnitten längs (fremden) Jordanbogen. Es werden ihre Randelemente sowie verschiedene Typen von solchen Einschnittgebieten (strikte, gestreifte) diskutiert. Quasiradial heißt ein Einschnittgebiet, falls es quasikonform auf ein radiales Einschnittgebiet abgebildet werden kann. Frühere Resultate (loc. cit.) lassen sich auf quasiradiale Einschnittgebiete und solche, die strikt und gestreift sind, übertragen. *A. Pfluger.*

Tsuji, Masatsugu: The boundary distortion on conformal mapping. J. math. Soc. Japan 6, 235—261 (1954).

Sei  $D$  ein Jordangebiet der  $w = \xi + i\eta$ -Ebene, dessen Randkurve  $C$  die reelle Achse im Nullpunkt 0 berührt, und zwar so, daß die innere Normale in 0 mit der positiven  $\eta$ -Achse zusammenfällt. Die obere  $z$ -Halbebene soll auf  $D$  durch  $w(z)$  mit  $w(0) = 0$  konform abgebildet werden. Gesucht werden Kriterien für die Existenz von  $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = \gamma$ . Eine hinreichende Bedingung von Carathéodory [S.-Ber.

Preuß. Akad. Wiss., Berlin, math.-naturw. Kl. 1929, 39—54 (1929)] wird durch folgenden Satz wesentlich verallgemeinert: Gibt es eine Umgebung des Nullpunktes, in der  $C$  zwischen den beiden Kurven  $H: \eta = h(\xi)$  und  $\bar{H}: \eta = -h(\xi)$  liegt,

mit  $h =$  monoton zunehmende stetige Funktion,  $h(0) = 0$  und  $\int_0^\delta \frac{h(t)}{t^2} dt < \infty$ ,

dann existiert die Winkelderivierte  $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = \lim_{z \rightarrow 0} w'(z) = \gamma$  als gleichmäßiger

Grenzwert bei Winkelannäherung  $z \rightarrow 0$ . Dieser Satz steht mit einer Arbeit von G. Valiron (dies. Zbl. 5, 169) in enger Verbindung. Wird  $C$  selber in einer Umgebung des Nullpunktes entweder (a) durch  $\eta = h(\xi)$  oder (b) durch  $\eta = -h(\xi)$  dargestellt mit  $h(t) > 0$  in  $0 < t \leq \delta$ ,  $h(t)$  stetig, monoton abnehmend für  $t > 0$ , zunehmend für  $t \rightarrow 0$ , dann existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = \gamma$ , wobei

(a)  $0 < \gamma < \infty$ , bzw. (b)  $0 < \gamma < \infty$  ist. Notwendig und hinreichend für

$0 < \gamma < \infty$  ist die Bedingung  $\int_0^\delta \frac{h(t)}{t^2} dt < \infty$ . Die Beweise beruhen auf der

Integraldarstellung der harmonischen Funktion  $\eta(z)$  durch ihre Randwerte auf der reellen Achse, benötigen aber mehrere (z. T. bekannte, z. T. neue) Hilfssätze. Bemerkung des Ref.: Am übersichtlichsten erscheint letztere Bedingung, wenn man den Durchschnitt  $Q_\epsilon$  von  $D$  mit dem Kreisring  $\epsilon < |w| < \delta$  und sein Bildgebiet  $Q_\epsilon$  betrachtet.  $Q_1$  und  $Q_2$  sind „Vierecke“, ihre Moduln seien  $\mu_1$ , bzw.  $\mu_2$ ; beim Grenz-

übergang  $\epsilon \rightarrow 0$  wird der Hauptteil von  $\mu_1$  gleich  $\frac{1}{\pi} \log \frac{\delta}{\epsilon} + \frac{1}{\pi^2} \int_\epsilon^\delta \frac{h(t) + h(-t)}{t^2} dt$ ;

derjenige von  $\mu_2$  ist im Falle  $0 < \gamma < \infty$  gleich  $(1/\pi) \log(\delta/\epsilon)$ . Diese Interpretation bezieht sich auch auf den als Anwendung eines Satzes von Kellogg angegebenen Satz 8 (Fall, wo  $C$  im Nullpunkt eine Ecke hat). An einigen Stellen schließt dieser Artikel an Arbeiten von S. Warschawski an (dies. Zbl. 4, 404; 5, 361).

*J. Hersch.*



● **Lehmann, R. Sherman:** Development of the mapping function at an analytic corner. Technical Report No. 21. Stanford University California: Applied Mathematics and Statistics Laboratory. 1954. 17 p.

Soit  $w = F(z)$  la fonction qui représente conformément le demi-plan  $\Im z > 0$ , sur un domaine  $D$  du plan  $w$  dont la frontière au voisinage de 0 est formée de deux arcs analytiques réguliers en 0 et se coupant sous un angle  $\pi \alpha$ : les origines se correspondent. Etendant un résultat démontré par H. Lewy pour  $\alpha = 1$  (ce Zbl. 49, 62), l'A. démontre qu'au voisinage de  $z = 0$ ,  $F(z)$  admet un développement asymptotique qui, si  $\alpha$  est irrationnel, est de la forme  $\sum A_{kl} z^{k+l\alpha}$ , (avec  $k, l$  entiers,  $k \geq 0$ ,  $l \geq 1$ ,  $A_{01} \neq 0$ ), et qui, si  $\alpha = p/q$  (irréductible), est de la forme  $\sum A_{klm} z^{k+l\alpha} (\log z)^m$ , ( $k, l, m$  entiers,  $k \geq 0$ ,  $1 \leq l \leq q$ ,  $0 \leq m \leq k/p$ ,  $A_{010} \neq 0$ ). Les dérivées successives de  $F$  admettent des développements asymptotiques qui se déduisent des précédents en dérivant terme-à-terme. La fonction inverse de  $F(z)$  admet aussi un développement analogue au voisinage de  $w = 0$ . — Au cours de la démonstration, l'A. fait appel à des résultats de W. Gross [Math. Z. 3, 43—64 (1919)], de W. D. Kellogg [Trans. Amer. mat. Soc. 13, 109—132 (1912)], et de R. S. Lehmann [Techn. Rep. Nr. 2, Office of Naval Research Contract Nr. 225 (11) (1952)]. *R. de Possel.*

**Garnier, Réné:** Sur la variation de la représentation conforme d'un domaine variable. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 258—267 (1954).

Seien  $C$  eine in der komplexen  $z$ -Ebene liegende Jordankurve von gleichmäßig beschränkter „mittlerer“ Krümmung:  $Z = f(z)$  die Abbildung des von  $C$  berandeten Jordangebietes  $D$  auf den Einheitskreis  $|Z| = 1$  mit  $f(z_0) = 0$  und  $f'(z_0)$  reell  $> 0$  ( $z_0$  fest  $\in D$ ). Geht bei einer genau bekannten infinitesimalen Deformation  $C$  in  $C_1$  über, wobei  $C_1$  denselben Bedingungen genügt, so kann man die Veränderung  $\delta f(z) = f_1(z) - f(z)$  der Abbildungsfunktion explizit durch ein Integral über die Deformation angeben. — Diese Formel wurde (im Anschluß an die Arbeiten von Hadamard über die Veränderung der Greenschen Funktion) von G. Julia [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 39, 1—28 (1922)] für analytische  $C$  bewiesen, wird also hier verallgemeinert. Der Beweis ist elementar und beruht (a) auf einer feinen Untersuchung der Veränderung von  $f$  am Rande, bei wesentlicher Benützung eines Satzes von W. Seidel (dies. Zbl. 1, 19), und (b) auf einer Betrachtung (im Fall  $C_1 \subset D$ ) der zusammengesetzten Selbstabbildung  $f(f_1^{-1}(Z))$  des Einheitskreises in sich, bei Gebrauch der Poissonschen Integraldarstellung. *J. Hersch.*

**Strebel, Kurt:** A remark on the extremal distance of two boundary components. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 842—844 (1954).

Verf. betrachtet das Gebiet  $G_z$  mit den zwei ausgezeichneten Randkomponenten  $I_z^0$  und  $I_z^1$  von extremaler Länge  $\lambda = \infty$ . Unter allen konformen Abbildungen von  $G_z$  auf das radiale Schlitzgebiet  $G_w$  ( $r_0 < |w| < r_1$ ), bei denen die Bilder  $I_w^0$  und  $I_w^1$  von  $I_z^0$  bzw.  $I_z^1$  die Kreise  $|w| = r_0$  bzw.  $|w| = r_1$  enthalten, existiert eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Abbildung mit kleinstem Radiusverhältnis  $r_1/r_0$ . Damit erweitert Verf. eines seiner früheren Theoreme [vgl. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 179 (1955)]. *H. P. Künzi.*

**Walsh, Joseph L.:** Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1572—1574 (1954).

Zum Zwecke der Verwendung bei Fragen der Interpolation und Approximation einer Funktion  $f(z)$  beweist Verf. den folgenden Abbildungssatz: Ist  $D$  ein Gebiet der komplexen  $z$ -Ebene von endlicher Zusammenhangszahl, dessen Berandung aus den paarweise punktfremden Jordankurven  $B_1, B_2, \dots, B_p$  und  $C_1, C_2, \dots, C_q$  besteht, so gibt es eine umkehrbar eindeutige, konforme Abbildung von  $D$  auf ein Gebiet  $\Delta$  der  $Z$ -Ebene, das durch

$1 < |A(Z - a_1)^{M_1} (Z - a_2)^{M_2} \dots (Z - a_\mu)^{M_\mu} / (Z - b_1)^{N_1} (Z - b_2)^{N_2} \dots (Z - b_\nu)^{N_\nu}| < e^{1/\tau}, \tau > 0$ ,  
bestimmt ist, wobei die positiven Zahlen  $M_i, N_i$  auch irrational sein können. Die

Bilder der Kurven  $B_i$  und  $C_i$  trennen hierbei die Punkte  $a_i$  bzw.  $b_i$  von 1. Der Beweis beruht darauf, daß die Integraldarstellung der in  $D$  harmonischen, in  $D$  stetigen Funktion  $u(z)$ , die auf den  $B_i$  den Wert 0, auf den  $C_i$  den Wert 1 annimmt, in passender Form durch eine endliche Summe  $u_n(z)$  ersetzt wird. P. Heuser.

**Walsh, Joseph L.:** Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1756—1758 (1954).

Verf. beweist einen Grenzfall seines kürzlich (vgl. vorhergeh. Referat) aufgestellten Abbildungssatzes. Ist  $D$  ein Gebiet der komplexen  $z$ -Ebene, dessen Rand aus den endlich vielen, paarweise punktfremden Jordankurven  $C_1, \dots, C_\nu$  besteht, sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$  voneinander verschiedene Punkte von  $D$ , sind ferner  $M_1, M_2, \dots, M_\mu$  irgendwelche positive Zahlen mit  $\sum M_i = 1$ , so gibt es eine in  $D$  und 1 umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung, bei der 1 der  $Z$ -Ebene definiert ist durch  $|A(Z - a_1)^{M_1} (Z - a_2)^{M_2} \dots (Z - a_\mu)^{M_\mu} / (Z - b_1)^{N_1} (Z - b_2)^{N_2} \dots (Z - b_\nu)^{N_\nu}| < 1$ ,  $\sum N_i = 1$ . Hierbei sind die  $a_i$  die Bilder der  $\lambda_i$ , und die Bilder der Kurven  $C_i$  trennen die entsprechenden Punkte  $b_i$  von 1. Der Satz ist verwendbar, wenn eine in  $D$  gegebene Funktion  $f(z)$  dort interpoliert werden soll, die  $\lambda_i$  als Interpolationsstellen verwendet werden, und man das Verhalten der Interpolationsfolge untersuchen will. P. Heuser.

**Goldberg, A. A.:** Über den Einfluß der Näherung der algebraischen Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche auf die Wachstumsordnung der abbildenden meromorphen Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 709—711 (1954) [Russisch].

Unter den Randstellen der Riemannschen Flächen vom parabolischen Typ wird eine Klasse hervorgehoben, die Verf. „ $K$ -Punkte“ nennt, die die unmittelbaren Randstellen als Spezialfall enthält und auf die der Satz von Denjoy-Ahlfors wörtlich übertragen werden kann. Bildet  $g(z)$  ein schlichtes Gebiet  $D$  konform auf die  $\varepsilon$ -Umgebung einer über  $a$  gelegenen Randstelle ab, so ist diese ein  $K$ -Punkt, wenn  $\log \left| \frac{g(z) - a}{g(z) - p_n} \right| = \frac{\varepsilon}{1} G(z, p_n) \rightarrow 0$  ( $G(z, p_n)$ : Greensche Funktion von  $D$ ;  $p_n$ :  $a$ -Stellen von  $g(z)$ ). Ist  $D$  der Einheitskreis, so liegt genau dann ein  $K$ -Punkt vor, wenn  $(g(z) - a) \varepsilon$  kein Blaschke-Produkt ist. Sind außerdem alle  $a$ -Stellen von  $g(z)$  reell, so ist hierfür hinreichend, daß die algebraischen Verzweigungspunkte sich dem Wert  $a$  mindestens so stark nähern wie  $\varepsilon \cdot e^{1/\varepsilon} - a$  ( $\varepsilon > 0$ ), was unter etwas anderen Voraussetzungen auch vom Ref. gefunden wurde (Proc. Internat. Math. Congr. 1954, II, 171—172). Weitere Kriterien betreffen den Fall mehrfach-zusammenhängender  $\varepsilon$ -Umgebungen. Beweise werden nicht gegeben, sind jedoch z. T. leicht zu rekonstruieren. P. Seibert.

**Finn, Robert:** On a problem of type, with application to elliptic partial differential equations. J. rat. Mech. Analysis **3**, 789—799 (1954).

Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß eine Riemannsche Fläche der Form  $z = z(x, y)$ ,  $(x^2 + y^2 = \infty)$  vom parabolischen Typus ist. Zugleich wird der bekannte Bernsteinsche Satz über Minimalflächen auf eine allgemeinere Klasse quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen übertragen, indem folgendes Theorem bewiesen wird: Es sei  $q(x, y)$  eine für  $x^2 + y^2 = \infty$  zweimal stetig differenzierbare Lösung des Variationsproblems  $\delta \iint F(p^2 + q^2) dx dy = 0$ . Außerdem seien die folgenden Bedingungen erfüllt: (1)  $F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 > 0$  für  $p^2 + q^2 = \infty$  (Elliptizität), (2)  $1/K \leq F[F - 2\Omega^2 dF/d(\Omega^2)] \leq K$  mit  $\Omega^2 = p^2 + q^2$  und  $1 \leq K < \infty$  für  $p = q_r$ ,  $q = q_r$ , (3)  $a\gamma + cx - 2b\beta > 2\varepsilon$ ,  $1 \leq \varepsilon < \infty$  mit

$$\alpha = (1 + q^2)/W, \quad \beta = -p q/W, \quad \gamma = (1 + p^2)/W \quad (W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}),$$

$$a = F_{pp}/\Delta, \quad b = F_{pq}/\Delta, \quad c = F_{qq}/\Delta \quad (\Delta = (F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2)^{1/2}),$$

für  $p = q_x$ ,  $q = q_y$ . Dann gilt  $\varphi(x, y) = Ax + By + C$ .

E. Heinz.

**Jenkins, James A.:** On the local structure of the trajectories of a quadratic differential. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 357—362 (1954).

Teichmüller hat als erster Extremalenprobleme in der Funktionentheorie für bestimmte Kurven im Zusammenhang mit quadratischen Differentialen  $Q(z) dz^2$  auf Riemannschen Flächen untersucht (vgl. dies. Zbl. **21**, 335). Weitere Betrachtungen in dieser Richtung führten später A. C. Schaeffer und D. C. Spencer (Coefficient regions for schlicht functions, New York 1950). Verf. bestimmt die Kurven, auf denen  $Q(z) dz^2 > 0$ . Unter Trajektorien versteht man die extremalen Elemente der obigen Kurvenschar. Der Verlauf der Trajektorien wird in der Umgebung irgendeines Punktes der Riemannschen Fläche untersucht. Hier verdienen die singulären Punkte von  $Q(z) dz^2$  besondere Beachtung. Nullstellen und einfache Pole von  $Q(z) dz^2$  haben Schaeffer und Spencer im erwähnten Zusammenhang behandelt. Verf. interessiert sich für den Fall von mehrfachen Polen des quadratischen Differentials und gibt den möglichen Verlauf der Trajektorien in solchen Umgebungen, speziell für zweifache Pole an.

H. P. Künzi.

**Agmon, Shmuel:** A property of quasi-conformal mappings. J. rat. Mech. Analysis **3**, 763—765 (1954).

Quasikonform heißt eine topologische und mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Abbildung  $\zeta(z)$  von beschränktem Dilatationsquotienten. Satz 1: Für jede quasikonforme Abbildung des Kreises  $|z| = 1$  existiert der radiale Limes  $\zeta(e^{i\omega}) = \lim_{r \rightarrow 1} \zeta(r e^{i\omega})$  für fast alle  $\omega$ . Der elementare Beweis beruht auf einer Betrachtung der Längen der Radienbilder.

Satz 2: Die Funktion  $\zeta(e^{i\omega})$  ist auf keiner Menge von positivem linearem Maß konstant. Indirekter Beweis: Sonst könnte man im Bildgebiet eine schlichte analytische Funktion  $f(\zeta)$  konstruieren, deren „Urbild“  $g(z) = f(\zeta(z))$  Satz 1 widerspräche. — Eine schärfere Form von Satz 2 folgt als Korollar aus den Sätzen 2 und 4 einer kürzlich erschienenen Arbeit von A. Pfluger [Commentarii math. Helvet. **29**, 120—131 (1955)], dessen Beweise wesentlich auf der Methode der Extremallängen beruhen; insbesondere darf  $\zeta(e^{i\omega})$  sogar auf keiner Menge von positiver Kapazität konstant sein. Zu der vom Verf. aufgeworfenen Frage, ob Satz 2 für beschränkte, aber nicht schlichte  $\zeta(z)$  gültig bleibt, vgl. A. Pfluger, loc. cit. (insbesondere § 9), wo eine hinreichende zusätzliche Bedingung aufgestellt wird, die sich vom analytischen Fall auf den Fall beschränkter Exzentrizität (ableitbare pseudo-analytische Funktionen) übertragen ließe.

J. Hersch.

**Položij, G. N.:** Der Satz von der Gebietsinvarianz für einige elliptische Systeme von Differentialgleichungen und seine Anwendungen. Mat. Sbornik, n. Ser. **32** (74), 485—492 (1953) [Russisch].

Es werden Seitenstücke einiger klassischer Sätze aus der Funktionentheorie für quasikonforme Abbildungen begründet, welche aus Lösungen allgemeinerer Systeme von elliptischen partiellen Differentialgleichungen, als die Cauchy-Riemannschen, entspringen: der Satz von der Gebietstreue, eine Art von Verzerrungssatz, lokale Rückführung des elliptischen Systems auf den Cauchy-Riemannschen Fall, Schlichtheit einer solchen Abbildung; schließlich eine Anwendung auf Strömungen im nicht-homogenen Mittel. Das System hat hier die Gestalt

$$a u_x + b u_y + c u = 0, \quad du_x + e u_y + f = 0; \quad \delta = ac - (b + d)^2 > 0,$$

bei  $a, b, c, d$  als Funktionen in  $x, y$  mit Hölderbedingung.

E. Ullrich.

**Položij, G. N.:** Ein Satz über die Ränderzuordnung und Variationssätze für gewisse elliptische Differentialgleichungssysteme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 927—930 (1954) [Russisch].

Für die quasikonforme Abbildung als Lösung desselben Systems elliptischer partieller Differentialgleichungen (wie vorsteh. Referat) wird der funktionentheoretische Satz über Ränderzuordnung bei Jordangebieten übertragen; auch die Methode



gestattet die sinngemäße Erweiterung (Übergang von Bogenlängen zu Flächeninhalten durch Schwarzsche Ungleichung), wenn in natürlicher Weise Dilatationen an Stelle der Ableitungen treten. Endlich einige umfangreiche Sätze in Richtung auf das Prinzip von der Gebietserweiterung. *E. Ullrich.*

**Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi: On the Schwarzian lemma in the matrix space.** Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **4**, 309–316 (1954).

Let  $R$  be the totality of all matrices of type  $(m, n)$  with complex numbers as coefficients and  $\|A\|$  the norm of a matrix  $A$  (i. e. the square root of the greatest characteristic root of  $A^*A$ ). The authors discuss linear fractional transformations, Schwarz's lemma and Poincaré's differential invariant for the domain  $\|Z\| \leq 1$  in  $R$ . The results obtained here are parts of the known theorems or their direct consequences [M. Sugawara, Proc. Imp. Acad. Tokyo **17**, 483–488 (1941); K. Morita, *ibid.*, 489–494; Japanese J. Math. **19**, 45–56 (1944)]. *K. Morita.*

**Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi: On extension of Schwarzian lemma in matrix space.** Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **4**, 317–318 (1954).

Let  $R$  and  $A$  have the same meaning as in the preceding review. The authors prove the following theorem: Let  $F(Z)$  be an analytic mapping of the domain  $\|Z\| \leq 1$  (which lies in  $R$ ) into  $R$ . Suppose that  $F(tZ) = t^k G(t, Z)$  with a non-negative integer  $k$ , where  $G(t, Z)$  is regular for a complex number variable  $t$  with  $|tZ| \leq 1$  and  $G(t, Z)$  vanishes on  $t = 0$ . Then  $\|F(Z)\| \leq \|Z\|^{k+1} \max_{\|Z\|=1} \|F(Z)\|$  for every  $Z$  satisfying  $\|Z\| \leq 1$ . In case  $n = 1$  this is a theorem of S. Aikawa (this Zbl. **49**, 65). *K. Morita.*

**Carafa, Mario: Sulle funzioni analitiche di  $n$  variabili complesse.** Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **12**, 267–284 (1954).

Verf. dehnt einen Eindeutigkeitssatz für holomorphe Funktionen von F. Severi (dies. Zbl. **3**, 214) von 2 auf  $n$  komplexe Veränderliche aus. Sei  $\Gamma$  eine  $2n$ -Zelle des Raumes  $S_{2n}$  der Real- und Imaginärteile der  $n$  Variablen. Verf. beweist die Existenz einer auf dem Rande von  $\Gamma$  gelegenen Mannigfaltigkeit der reellen Dimension  $k$  für jedes  $k$  mit  $1 \leq k \leq 2n - 1$  mit der Eigenschaft, daß eine beliebige in  $\Gamma$  holomorphe Funktion bereits durch ihre Werte auf der Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt ist. (Das Resultat ist insbesondere bemerkenswert für  $k = 1$ .) Verf. untersucht dann den Fall des  $2n$ -dimensionalen Polyzylinders und einer speziellen Klasse 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an, wann der Eindeutigkeitssatz für den Polyzylinder und eine Mannigfaltigkeit der Klasse gültig ist. Ferner gibt Verf. eine Serienentwicklung für Polyzylinder an, die zu den auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit vorgegebenen Werten die zugehörige Funktion liefert. *H. J. Bremermann.*

• **Hedtfeld, Karlheinz: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Starre einfach zusammenhängende Holomorphiegebiete.** (Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster. Heft 8.) Münster: Buch- und Steindruckerei Max Kramer 1954. 72 S. Dissertation.

Dans l'espace rapporté à 2 variables complexes  $w, z$ , les domaines

$$(G_1) \quad |w| < 1, \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re}(a_k w + b_k z + c_k) < 0$$

et

$$(G_2) \quad |w| < 1, \quad |z| < 1, \quad |a_k w + b_k z + c_k| < 1,$$

(où  $k = 1, 2, \dots, s$ ;  $s \geq 1$ ), qui sont des domaines d'holomorphie simplement connexes (i. e. homéomorphes à la boule), n'admettent, moyennant des conditions d'inégalité sur les nombres  $a_k, b_k, c_k$ , d'autre automorphisme que la transformation identique. D'après les théorèmes sur les domaines normaux dûs à Rothstein, 2 domaines  $G_1, G'_1$  ou  $G_2, G'_2$  ne peuvent être mis en correspondance analytique bi-

univoque que si les hypersurfaces  $\operatorname{Re}(a_k w + b_k z + c_k) = 0$  ou  $|a_k w + b_k z + c_k| = 1$  qui les limitent effectivement sont en nombre égal pour les 2 domaines; l'auteur montre en outre que, même si elles sont en nombre égal, moyennant des conditions d'inégalité sur les nombres  $a_k, b_k, c_k$  et  $a'_k, b'_k, c'_k$ , les 2 domaines ne peuvent être mis en correspondance analytique biunivoque. Les démonstrations reposent sur les théorèmes de Rothstein; une généralisation à  $n$  variables est donnée; l'A. signale que les conditions écrites sont seulement suffisantes, et que la méthode ne saurait fournir tous les domaines d'holomorphie simplement connexes sans autre automorphisme que la transformation identique. *M. Hervé.*

**Fuks, B. A.:** Über die Längen- und Richtungsänderungen bei pseudokonformer Abbildung. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 193—200 (1954) [Russisch].

Für die behandelten Fragen genügt es an Stelle von pseudokonformen Transformationen nicht ausgeartete lineare Abbildungen  $W = a w + b z$ ,  $Z = c w + d z$  zu untersuchen. Diese Untersuchung erstreckt sich (a) auf den „Koeffizienten der linearen Verzerrung“  $\kappa^2 = (|W|^2 + |Z|^2)/(|w|^2 + |z|^2)$ , (b) auf den „ersten Drehwinkel“  $\theta$ , d. i. der Winkel zwischen den Ebenen  $E_1: u = W \cdot v Z$  und  $E_2: u = w \cdot v z$  (d. h.  $\theta$  ist der kleinste Winkel zwischen zwei Vektoren, von denen einer zu  $E_1$  und der andere zu  $E_2$  gehört), (c) auf den „zweiten Drehwinkel“  $\varphi$ , den man als Winkel zwischen dem Vektor  $(W, Z)$  und demjenigen Vektor erhält, der in  $E_1$  liegt und mit dem Vektor  $(w, z)$  den Winkel  $\theta$  bildet. Es werden Sätze über die Werteverteilung dieser Größen berechnet, z. B. u. a. obere und untere Schranken. *W. Thimm.*

**Fuks, B. A.:** Über die Bedingungen für die Pseudokonformität einer Abbildung des vierdimensionalen Raumes. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61) 201—204 (1954) [Russisch].

Es werden Abbildungen (\*)  $W = W(w, z)$ ,  $Z = Z(w, z)$  untersucht, wenn  $w$  und  $z$  komplexe Variablen und  $W$  und  $Z$  nach  $w, \bar{w}, z, \bar{z}$  in  $P_0$  stetig differenzierbar sind. Diese Abbildung heiße „monogen“ in  $P_0$ , wenn die Ableitungen von  $W$  und  $Z$  nach  $\bar{w}$  und  $\bar{z}$  in  $P_0$  verschwinden. Die Abbildung (\*) erhalte den „analytischen Charakter“ einer den Punkt  $P_0$  enthaltenden analytischen Ebene, wenn die (lineare) „Differentialabbildung“ von (\*) diese Ebene in eine analytische Ebene überführt. Es wird bewiesen, daß die Anzahl der analytischen Ebenen, deren analytischer Charakter erhalten bleibt, gleich 2, 1, 0 oder  $\infty$  ist, je nachdem für die 1. Ableitungen von  $W$  und  $Z$  in  $P_0$  bestimmte Ungleichungen erfüllt sind. Da monogene Abbildungen den analytischen Charakter aller analytischen Ebenen (durch  $P_0$ ) erhalten, bekommt man eine geometrische Charakterisierung derartiger Abbildungen, nämlich: Es muß 3 analytische Ebenen durch  $P_0$  mit invariantem analytischem Charakter geben. Diese Bedingung allein ist jedoch nicht hinreichend; es kommt noch eine weitere hinzu, die sich auf den „zweiten Drehwinkel“ oder den „Koeffizienten der linearen Verzerrung“ bezieht, vgl. vorstehendes Referat. *W. Thimm.*

**Thimm, Walter:** Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 128, 1—48 (1954).

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, ferner  $f_1, \dots, f_k, f_{k+1}$  ein System von auf  $M$  analytisch abhängigen meromorphen Funktionen. Es gehört zu den klassischen Ergebnissen der Analysis, daß unter bestimmten Voraussetzungen über  $M$  und die  $f_x$  auf die algebraische Abhängigkeit der  $f_x$  geschlossen werden kann. In der vorliegenden Arbeit gelangt Verf. zu folgendem allgemeinen Resultat: Ist  $M$  kompakt, so sind in  $M$  analytisch voneinander abhängige meromorphe Funktionen stets algebraisch voneinander abhängig. Sind insbesondere  $f_1, \dots, f_k$  analytisch unabhängig,  $f_1, \dots, f_k, f_{k+1}$  aber analytisch abhängig, so gibt es eine nur von  $f_1, \dots, f_k$  abhängende natürliche Zahl  $m$ , derart daß eine algebraische Relation zwischen  $f_1, \dots, f_k, f_{k+1}$  besteht, deren Grad in  $f_{k+1}$  nicht größer als  $m$  ist. [Anmerkung des Ref.: Aus dieser Aussage folgt unmittelbar der von W. L. Chow angekündigte Satz (Chow und Kodaira, dies. Zbl. 46, 309), daß der Körper der meromorphen Funk-



tionen in einer kompakten zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension  $n$  zu einem endlich-algebraischen Funktionenkörper höchstens vom Transzendenzgrade  $n$  isomorph ist.] — Der vom Verf. gegebene Beweis ist nicht einfach. Es handelt sich vor allem um das Studium der durch die  $f_*$  bestimmten meromorphen Abbildung von  $M$  und ihrer „Fasergesamtheit“. Hierbei werden Methoden und Ergebnisse aus früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 48, 62; 55, 75) wesentlich benutzt.

K. Stein.

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Witt, Ernst: Über die Konstruktion von Fundamentalbereichen. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 36, 215—221 (1954).

Es handelt sich um eine Ergänzung zu dem Buch von F. Conforto (dies. Zbl. 45, 109). Verf. geht von Folgendem aus: I.  $Z$  sei ein Riemannscher Raum, in dem zwischen je zwei Punkten stets genau eine Geodätische vorhanden ist,  $Z$  sei ferner lokal euklidisch. II.  $Z$  gestatte eine topologische Gruppe von symplektischen Bewegungen. III. für jeden festen Punkt  $z \in Z$  habe die symplektische Abbildung  $a \rightarrow az$  in  $Z$  eine kompakte Umgebung. Sind I—III erfüllt, so beweist Verf., daß jede diskrete Untergruppe  $H$  der symplektischen Gruppe in  $Z$  einen Fundamentalbereich besitzt, welcher spezielle geometrische Eigenschaften hat. Wird unter  $Z$  der Siegelsche Halbraum  $S$  verstanden, so zeigt Verf., daß dafür I—III erfüllt sind. Er erhält damit Resultate, die von C. L. Siegel [Amer. J. Math. 65, 1—86 (1943)] bewiesen, allerdings nicht so ausführlich als Satz formuliert wurden (l. c. Theorem 6). — Methodisch gehen die Beweise beider Autoren auf Poincaré und Klein zurück, sie unterscheiden sich dadurch, daß Verf. I—III in den Vordergrund stellt und bei der Konstruktion des speziellen Fundamentalbereiches von einem beliebigen Punkt von  $Z$  ausgeht, während Siegel von vornherein  $S$  nimmt und von einem Punkt ausgeht, welcher bei  $H$  nicht Fixpunkt ist. — Man vergleiche auch L. K. Hua [Ann. of Math., II. Ser. 47, 167—191 (1946)]. Dort wird die entsprechende Konstruktion für diskrete Untergruppen transitiver Gruppen ausgeführt. H. Braun.

Tsuiji, Masatsugu: A metrical theorem on the singular set of a linear group of Schottky type. J. math. Soc. Japan 6, 115—121 (1954).

Let  $G$  be a linear Schottky-group whose fundamental domain is bounded by  $p - 2$  pairs of analytic Jordan curves  $C_i, C'_i, i = 1, 2, \dots, p$ , where  $C_i$  and  $C'_i$  are equivalent by  $G$ . P. J. Myrberg (this Zbl. 27, 217) proved that  $\text{cap } E > 0$ , where  $E$  is the singular set of  $G$ . The author proves that if  $E_1$  is a subset of  $E, E_1 \subset C_1$ , and every point of  $E_1$  is contained in infinitely many equivalents of  $C_1$ , then  $\text{cap } E_1 > 0$ .

J. Górski.

Rosen, David: A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups. Duke math. J. 21, 549—563 (1954).

Unter  $\Gamma(\lambda)$  versteht Verf. die Gruppe der linearen Bruchtransformationen der komplexen Ebene auf sich selbst  $z' = V(z) = (az + b)/(cz + d)$ ,  $ad - bc = 1$ , mit reellen Koeffizienten und erzeugt durch die Transformationen  $S = S(z) = z + \lambda$ ;  $T = T(z) = 1/z$ ;  $I = I(z) = \bar{z}$ , wo  $\lambda$  eine feste reelle Zahl ist. Für  $\lambda$  werden nur Werte zugelassen, für die  $\Gamma(\lambda)$  eine Fuchsische Gruppe ist. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Koeffizienten einer zu  $\Gamma(\lambda)$  gehörigen Substitution arithmetisch zu charakterisieren. Dies führt zu einer Lösung des Wort-Problems, die von der allgemeinen Methode von Reidemeister verschieden ist. Schließlich wird eine allgemeine Charakterisierung der Grenzpunkte von  $\Gamma(\lambda)$  auf dem Hauptkreis gewonnen. Die angewandte Methode beruht auf der Entwicklung der mit den Gruppen  $\Gamma(\lambda)$  zusammenhängenden Kettenbrüche  $r_0\lambda + \varepsilon_1 r_1\lambda + \varepsilon_2 r_2\lambda + \dots$ , wo  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $r_0$  rational und ganz ist,  $r_i$  eine positive rationale ganze Zahl für  $i \geq 1$  ist und  $\lambda$  eine feste positive Zahl ist, die für den zu  $\Gamma(\lambda)$  gehörigen Kettenbruch charakteristisch ist. Verf. beweist unter anderem, daß  $V(z)$  dann und nur dann  $\Gamma(\lambda)$  angehört, wenn  $a/c = r_0\lambda - 1/r_1\lambda - \dots - 1/r_n\lambda$  ist, wobei  $a/c$  ein endlicher  $\lambda$ -Kettenbruch ist. Der Punkt  $z = -d/c$  ist ein parabolischer Punkt, wenn und nur wenn  $-d/c$  sich durch einen endlichen  $\lambda$ -Kettenbruch darstellen läßt. Nach Einführung der reduzierten Worte und  $\lambda$ -Ketten-



brüche wird bewiesen, daß 2 Worte in den Symbolen  $S$  und  $T$  dieselbe Substitution definieren, wenn ihre reduzierten Formen identisch sind. Ferner wird gezeigt, daß die Näherungsnenner eines  $\lambda$ -Kettenbruches monoton nicht abnehmen und daß endlich für ein gegebenes  $\lambda$  ( $\lambda = 2 \cos(\pi/q)$ ,  $q \geq 4$  oder  $\lambda > 2$ ) eine reelle Zahl  $\alpha$  in eindeutiger Weise durch einen reduzierten  $\lambda$ -Kettenbruch dargestellt werden kann. Schließlich wird noch ein Verfahren für die Entwicklung einer reellen Zahl in einen  $\lambda$ -Kettenbruch angegeben und die Approximation abgeschätzt.  
J. Mall.

**Hörmander, Lars:** A new proof and a generalization of an inequality of Bohr. Math. Scandinav. **2**, 33—45 (1954).

For  $M_1, M_2 \geq 0$  put  $a = 1/2(M_1 + M_2)$  and  $h_0(x) = h_0(x; M_1, M_2) = -M_1$  if  $-a M_2 < x < a M_2$ ,  $h_0(x) = M_2$  if  $a M_2 < x < -a M_2 + 1$ . Let  $h_n(x) = h_n(x; M_1, M_2)$  be the  $n^{\text{th}}$  periodic integral of  $h_0(x)$  with vanishing mean value. Put further  $-\mu_1^{(n)} = -\mu_1^{(n)}(M_1, M_2) = \min_x h_n(x)$ ,  $\mu_2^{(n)} = \mu_2^{(n)}(M_1, M_2) = \max_x h_n(x)$ . — I. If  $f^{(n-1)}(x)$  is absolutely continuous,  $-M_1 \leq f^{(n)}(x) \leq M_2$  almost everywhere and if the spectrum (in the sense of Laurent Schwartz) of  $f(x)$  is situated outside the open interval  $(-1, 1)$ , then  $-1^n \mu_1^{(n)} \leq f(x) \leq 1^n \mu_2^{(n)}$  and this is the best possible result. If  $M_1 = M_2$  we obtain a theorem of Lewitan (this Zbl. **16**, 298) which in turn generalizes a result obtained for almost periodic  $f(x)$  by Favard (this Zbl. **16**, 58). — Let  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) have  $n$  continuous and bounded derivatives and put  $M_1^{(k)} = -\inf_x f^{(n-k)}(x)$ ,  $M_2^{(k)} = \sup_x f^{(n-k)}(x)$  then, putting  $\mu_i^{(k)} = \mu_i^{(k)}(M_1^{(0)}, M_2^{(0)})$  ( $i = 1, 2$ ;  $k = 0, \dots, n$ ),  $(M_1^{(k)} \mu_1^{(k)})^{1/k} \leq [(M_1^{(m)} - M_2^{(m)}) (\mu_1^{(m)} - \mu_2^{(m)})]^{1/n}$ . For  $M_1 = M_2$  we obtain a result of Kolmogoroff [Moskovsk. gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski, Mat. **30**, 3—16 (1939); cf. also Amer. math. Soc. Transl. **4** (1949) and Bang, this Zbl. **25**, 174].  
J. Horváth.

**Doss, Raouf:** Sur une nouvelle classe de fonctions presque-périodiques. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 317—318 (1954).

Im Anklang an einem klassischen Satz von H. Weyl über die Annäherung des Integralmittels reinperiodischer R-integrierbarer Funktionen durch das Mittel gleichverteilter Funktionswerte wird behauptet: Die mit  $2\pi$  periodische Funktion  $f(x)$  ist genau dann R-integrierbar, wenn es  $\xi$  und  $M$  so gibt, daß sich zu jedem  $\varepsilon$  ein  $n$  und ein  $\delta$  finden derart, daß  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_j + i\xi) - M \leq \varepsilon$  ausfällt, falls  $x_j - x_k \leq \delta \pmod{2\pi}$  ( $j, k = 0, 1, \dots, n-1$ ) ist. — Eine in  $(-\infty, +\infty)$  definierte reelle Funktion wird R-fastperiodisch (R-fp.) genannt, wenn es  $\xi$  und  $M$  so gibt, daß sich zu jedem  $\varepsilon$  ein  $n$ , ein  $\delta$  und Zahlen  $\pi_1, \dots, \pi_m$  finden derart, daß die obige Ungleichung gilt, falls  $|x_j - x_k| \leq \delta \pmod{\pi_r}$  ( $j, k = 0, \dots, n-1$ ;  $r = 1, \dots, m$ ) ist. Als Approximationssatz wird angekündigt:  $f(x)$  ist genau dann R-fp., wenn es zu jedem  $\varepsilon$  zwei trigonometrische Polynome gibt, für die  $p(x) \leq f(x) \leq q(x)$  und  $M\{q(x) - p(x)\} \leq \varepsilon$  gilt.  
Th. Kaluza jr.

**Tornehave, Hans:** On the Fourier series of Stepanov almost periodic functions. Math. Scandinav. **2**, 237—242 (1954).

Wiener [Math. Z. **24**, 575—616 (1926)] proved the following theorem: Every series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$ , where  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m \leq \lambda_n < m+1} |a_n|^2 \right\}$  converges, is the Fourier series of an  $S^2$ -almost periodic ( $S^2$ -a. p.) function  $f(t)$ . A special case of this theorem was proved by Stepanov (this Zbl. **37**, 340) by a different method. By using Stepanov's method the author proves Wiener's theorem in the general case. Moreover it is proved that when all  $a_n = 0$  the converse of Wiener's theorem is also true. Følner pointed out that in this converse theorem it is enough to assume that  $f(t)$  is  $W^2$ -a. p. Thus a  $W^2$ -a. p. point with positive Fourier coefficients contains an  $S^2$ -a. p. point.  
E. Følner.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Chakrabarti, S. C.: On higher differences. I. II. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 23, 255—269, 270—276 (1954).

Formale Eigenschaften der durch  $A^r u_x = A^{r-1} u_{x+1} - a^{r-1} A^{r-1} u_x$  bzw.  $A_r u_x = A_{r-1} u_{x+1} - a^{r-1} A_{r-1} u_x$  definierten linearen Operatoren und ihre Zusammenhänge mit  $du/dx$ . Der Operator  $A_r$  steht in enger Beziehung zu dem in der Theorie der Heineschen (basisch-hypergeometrischen) Reihen verwandten Operator. Die Literatur über diesen Gegenstand, insbesondere die zahlreichen Arbeiten von F. H. Jackson (Verzeichnis bei N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin 1924) scheinen dem Verf. nicht bekannt zu sein.

W. Hahn.

Azbelev, N. V.: Über eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der Čaplygin'schen Methode auf Gleichungen höherer Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 493—494 (1954) [Russisch].

In der Differentialgleichung  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  mit den Anfangsbedingungen  $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) sei  $f$  stetig und genüge Lipschitzbedingungen mit einer Konstanten  $K$  in einem Gebiet  $G$  des Raumes  $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , der durch die Ungleichungen  $x_0 \leq x \leq X$ ,  $a_k \leq y^{(k)} \leq b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) definiert sei, wobei  $a_k < y_0^{(k)} < b_k$  gelte. Wenn  $z = z(x)$  eine obere Vergleichsfunktion im Gebiete  $G$  für die Differentialgleichung ist, dann sind in einem gewissen Intervall  $(x_0, x^*)$  mit  $x^* \leq X$  die Ungleichungen  $z^{(k)} > y^{(k)}$  erfüllt. Folgender Satz liefert eine Klasse von Vergleichsfunktionen, für die diese Ungleichungen im ganzen Intervall  $(x_0, X)$  bestehen. Es sei  $z = z(x)$  eine Vergleichsfunktion und  $u = z - \xi$ , wobei  $\xi$  der linearen Gleichung

$$\xi^{(n)} = K \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{(k)} + z^{(k)} - f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

mit den Anfangsbedingungen  $\xi^{(k)}(x_0) = z^{(k)}(x_0) - y_0^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) genügt. Weiter sei  $a_k < u^{(k)} < b_k$ . Dann ist dafür, daß im Intervall  $(x_0, X)$  die Ungleichungen  $z^{(k)} > y^{(k)}$  bestehen, hinreichend, daß dort  $|z^{(n)} - f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})| \geq |u^{(n)} - f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})|$  gilt.

W. Schulz.

Popov, Blagoj S.: Formations des critères de réductibilité des équations différentielles linéaires ayant des formes données à l'avance. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. natur., Annuaire 5 (1952), Nr. 2, 3—55 und französ. Zusammenfassung, 56—66 (1954) [Macedonisch].

L'A. décompose une équation linéaire différentielle, par analogie avec une équation algébrique, en facteurs symboliques, dont la somme des ordres égale à celui de l'équation considérée. Appliquant la dite méthode à l'équation

$$(1) \quad y'' + (\alpha f + \beta) y' + (A f^2 + B f + C) y = 0,$$

$f$  désignant une fonction de la variable indépendante  $x$  et (2)  $\alpha, \beta, A, B, C$  des constantes arbitraires, sont étudiées, au même temps, les conditions d'intégrabilité de l'équation (1). Pour les différents expressions de  $f$ :  $x$ ,  $1/x$ ,  $e^x$ ,  $\tanh x$ , sont données quatre conditions que doivent vérifier respectivement les coefficients (2) pour que l'équation (1) soit intégrable. Etudiant les différents cas particuliers qui s'y présentent, l'A. retrouve maintes équations classiques dont les solutions sont des fonctions spéciales, telles que les équations: de Bessel, hypergéométrique confluyente, de Hermite, de Weber, de Laplace, de Darboux. Ainsi sont complétés les résultats connus relatifs aux cas particuliers de dites équations. Les conditions obtenues d'intégrabilité sont vérifiées, ensuite, sur les nombreuses équations dont les solutions sont bien connues.

N. Saltykow.

Sarantopoulos, Spyridon: Sur l'existence des intégrales holomorphes des équations différentielles du premier ordre dans le cas singulier. Bull. Soc. math. Grèce 28, 128—166 (1954).

L'A. considera l'equazione differenziale (\*)  $x^2 dy/dx = x(x)y + x\varphi(x) + xy\sigma(x)$  dove  $\varphi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_v x^v$ ,  $\sigma(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \delta_{v-1} x^{v-1}$  sono olomorfe nell'intorno dell'origine, e supposto che (\*\*)  $y = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{v-1} x^{v-1}$  sia una soluzione formale della (\*), nel caso che  $\delta_1$  non sia intero positivo o nullo, esprime i coefficienti  $\gamma_{v+1}$  con dei determinanti di cui studia in questa prima parte alcune proprietà che gli occorreranno per dare le condizioni perchè la (\*\*) rappresenti una funzione olomorfa. *G. Sansone.*

**Hong, Imsik: On exceptional values of a solution of a differential equation.** Kōdai math. Sem. Reports 1954, 63—64 (1954).

Ein Satz von W. Gross wird verschärft zu der Aussage: In  $p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = p_3(x)$  seien die Koeffizienten  $p_j(x)$  Polynome. Die Menge der Werte, die eine beliebige, nichtkonstante Lösung  $y(x)$  ausläßt, kann nicht von positiver Kapazität sein. Zum Beweis werden die Ansätze von W. Gross kombiniert mit einem Satz von Tsuji über das Verhalten meromorpher Funktionen in der Umgebung ihrer singulären Stellen  $\zeta$ , wenn die Menge  $M = M(\zeta)$  dieser Singularitäten die Kapazität Null hat. *H. Wittich.*

**Švec, Marko: Über einige neue Eigenschaften der (oscillatorischen) Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung.** Czechosl. math. J. 4 (79), 75—90 und russische Zusammenfassg. 91—94 (1954).

Several elementary separation properties of the roots of solutions of fourth order linear homogeneous equations are discussed. The proofs are unnecessarily long and cumbersome. For instance, Theorem 3 says that the solutions having a prescribed root of multiplicity 3 are proportional to each other and have therefore all other roots in common, which is an immediate and trivial consequence of the uniqueness theorem; however, the proof of the author covers a whole page chock full of formulas. *J. L. Massera.*

**Suyama, Yukio: On the zeros of solutions of second order linear differential equation.** Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 8, 201—205 (1954).

$q(t)$  sei für  $0 \leq t < \infty$  stetig differenzierbar und monoton wachsend,  $q(0) = 0$ ,  $q(\infty) = \infty$ .  $N(\lambda)$  sei die Nullstellenanzahl einer Lösung  $y(t, \lambda) \equiv 0$  von  $y'' + (\lambda - q(t))y = 0$ ,  $q(\varphi(\lambda)) = \lambda$ . Dann gilt für  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varphi(\lambda)} [\lambda - q(t)]^{1/2} dt + O(1). —$$

Hiermit wird ein entsprechendes Resultat von P. Hartman erweitert, der  $q(t)$  als konvex annahm. *F. W. Schäfke.*

**Suyama, Yukio: On the non-oscillatory solution of second order linear differential equation.** Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A 8, 207—212 (1954).

Ist  $q(t)$  reell und stetig in  $0 \leq t < \infty$  und existiert der endliche Grenzwert  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \int_0^t q(s) ds \right) dt$ , so ist jede Lösung von  $y'' + q(t)y = 0$  nicht-oscillatorisch. *F. W. Schäfke.*

**Trevisan, Giorgio: Su l'equazione differenziale  $y''(x) + A(x)y(x) = 0$ .** Rend. sem. mat. Univ. Padova 23, 340—342 (1954).

L'A. fornisce due dimostrazioni estremamente rapide dei seguenti teoremi relativi all'equazione (\*)  $y''(x) + A(x)y(x) = 0$ . I. Se  $A(x)$  è a variazione limitata in  $x_0, \infty$  e compresa tra due numeri positivi, allora ogni soluzione della (\*) è limitata in  $x_0, \infty$  insieme alla sua derivata prima (R. Caccioppoli). II. Se  $A(x)$  è non decrescente in  $x_0, \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \infty$ , allora almeno una soluzione non identicamente nulla della (\*) tende a zero per  $x \rightarrow \infty$  (H. Milloux). *G. Sansone.*



**Reissig, Rolf:** Über die Differentialgleichung  $\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D \cdot \frac{dx}{d\tau} + \mu \cdot \operatorname{sgn} \frac{dx}{d\tau} + x = \Phi(\eta\tau)$ , wo  $\Phi(\eta\tau + 2\pi) = \Phi(\eta\tau)$  ist. Das Verhalten der Lösungen für  $\tau \rightarrow \infty$ . Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, math.-naturw. Kl. 1953, Nr. 1, 33 S. (1954).

Von den Lösungen der Differentialgleichung (DG)  $x'' + 2Dx' + \mu \operatorname{sgn} x' + x = \Phi(\eta\tau)$  mit  $\Phi(\eta\tau + 2\pi) = \Phi(\eta\tau)$  — erzwungene Schwingung mit Dämpfung und Coulombscher Reibung und periodischer Erregung — werden nach einem Überblick über die Gesamtheit der möglichen Lösungen  $x(\tau)$  diejenigen ohne Stillstand von endlicher Dauer (ohne Stop) betrachtet, also solche, die im Gesamtintervall  $-\infty < \tau < +\infty$  existieren. Von ihnen wird gezeigt: 1. Gibt es außer einer Lösung  $x(\tau)$  noch eine zweite  $\tilde{x}(\tau)$ , so gilt  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [x(\tau) - \tilde{x}(\tau)] = 0$ . 2. Besitzt die DG eine periodische Lösung  $\xi(\tau)$ , so muß sie von der Periode  $T = 2\pi/\eta$  der Erregung  $\Phi(\eta\tau)$  sein. 3. Es gibt höchstens eine periodische Lösung. 4. Alle Lösungen der DG, die für  $-\infty < \tau < +\infty$  existieren, nähern sich asymptotisch ein und derselben stetig differenzierbaren periodischen Lösung  $\xi(\tau)$ . R. Zurmühl.

**Najmark, M. A.:** Untersuchung des Spektrums und Entwicklung nach Eigenfunktionen eines nicht selbstadjungierten Differentialoperators zweiter Ordnung auf einer Halbachse. Trudy Moskovsk. mat. Obsc. 3, 181–270 (1954) [Russisch].

Der Verf. gibt ausführliche Beweise seiner früher angekündigten Ergebnisse (dies. Zbl. 48, 327; 51, 322). Es wird im Raume  $L^2[0, \infty)$  derjenige Operator betrachtet, der für die der Randbedingung  $y'(0) - \theta y(0) = 0$  genügenden und in jedem endlichen Intervall absolut stetige Ableitung besitzenden Funktion  $y(x)$  durch  $-y'' - p(x)y$  definiert wird, wobei  $p(x)$  eine im allgemeinen komplexwertige Funktion, und  $\theta$  eine beliebige komplexe Zahl sind. Es wird u. a. folgendes

gezeigt: unter der Voraussetzung  $\int_0^\infty p(x) dx < \infty$  besteht das kontinuierliche Spektrum aus der positiven reellen Halbachse, die Eigenwerte liegen außer dieser Halbachse und bilden eine (höchstens) abzählbare beschränkte Menge. Setzt man noch  $\int_0^\infty p(x) e^{\varepsilon x} dx < \infty$  für irgendein  $\varepsilon > 0$  voraus, so ist die Anzahl der Eigen-

werte endlich. Unter der Voraussetzung  $\int_0^\infty x^2 p(x) dx < \infty$  wird der Satz über die Entwicklung von Funktionen und das Analogon der Parsevalschen Gleichung mit den in der vorangehenden Mitteilungen skizzierten Methoden bewiesen (dies. Zbl. 51, 322). Die Sätze werden hier ganz allgemein formuliert: Einfachheit der Pole der Resolvente wird nicht verlangt, und es wird auch auf die Voraussetzungen der vorangehenden Mitteilung über die Nullstellen gewisser Funktionen verzichtet.

B. Sz.-Nagy-A. Korányi.

**Lefschetz, Solomon:** Complete families of periodic solutions of differential equations. Commentarii math. Helvet. 28, 341–345 (1954).

Consider a differential system  $\dot{y} = Y(y, \mu, t)$ ,  $Y$  analytic in  $(y, \mu)$ , continuous and periodic in  $t$ . If for  $\mu = 0$  there is a periodic solution  $\xi(t)$ , a classical problem is to find periodic solutions in the neighborhood of  $\xi$  for small  $\mu \neq 0$ . This leads to an analytic system in the initial conditions, which must be defined as implicit functions of  $\mu$ . The problem may be solved entirely in a finite number of steps applying Weierstrass preparation theorem and Kronecker's method of elimination. As an example the system  $\dot{x} = ix + \mu g(x, e^{it}, e^{-it}, \mu)$ ,  $g$  polynomial,  $x$  complex variable, is discussed. J. L. Massera.

**Castro, Antonio de:** Sopra l'equazione differenziale di risposta di un circuito elettrico. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 167–169 (1954).

L'A. prova che se nell'equazione (1)  $\ddot{x} + g'(x)\dot{x} + f(x) = e(t)$  oltre le condi-

zioni di S. Lefschetz: i)  $e(t)$  è periodica di periodo  $T$ ; ii)  $f(x)/x \rightarrow \infty$  con  $|x|$ ; iii) esistono due costanti positive  $b$  e  $B$  tali che  $|g(x) - b f(x)| \leq B |x|$ , è soddisfatta l'altra condizione: iv)  $f(x)$  e  $g(x)$  siano crescenti, allora la (1) ha una ed una sola soluzione periodica di periodo  $T$ , cui sono asintotiche tutte le altre soluzioni.

G. Sansone.

**Zlámál, Miloš:** Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen. Czechosl. math. J. 4 (79), 95–102 und russische Zusammenfassg. 102–103 (1954).

Theorem 1:  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t)$ ,  $p$  periodic, has a stable harmonic oscillation if constants  $\omega > c > 0$ ,  $L_1, L_2$  exist such that  $\omega L_1 + L_2 < c\sqrt{\omega^2 - c^2}$ ,  $|f(x) - 2c| \leq L_1$ ,  $|g(x_1) - g(x_2) - \omega(x_1 - x_2)| \leq L_2|x_1 - x_2|$ . Theorem 2: the same conclusion holds if  $f = \text{const.}$  and  $m(x_1 - x_2) \leq g(x_1) - g(x_2) \leq M(x_1 - x_2)$ ,  $0 < m \leq M < f^2/2$ .

J. L. Massera.

**Furuya, Shigeru:** Van der Pol's equation with harmonic disturbance. Commentarii math. Univ. St. Pauli 3, 7–13 (1954).

L'A. examine la nature des solutions stationnaires de (\*)  $x'' + \varepsilon(-1 + x^2)x' + x = E \cos \omega t$  avec  $\omega = sr^{-1}(1 + \varepsilon\sigma)$ ,  $s$  et  $r$  entiers premiers entre eux et tels qu'il y a résonnance (éventuellement d'ordre fractionnaire). Il utilise pour cela la méthode de Kryloff-Bogoliuboff en cherchant une solution de la forme  $x = \chi \cos \omega t + \varrho \cos rs^{-1}\omega t + \varphi$  où  $\varrho$  et  $\varphi$  sont deux fonctions inconnues de  $t$ . Il obtient ainsi, pour le cas particulier  $\omega = 3(1 + \varepsilon\sigma)$ , un grand nombre de résultats sur l'existence et la stabilité de solutions du type cherché.

Ch. Blanc.

**Minozzi, Luisa:** Sulle soluzioni sottoarmoniche dell'equazione di Liénard. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 196–198 (1954).

Die van der Polsche Gleichung hat bekanntlich bei gewissen Werten der Konstanten eine sinusförmige subharmonische Schwingung als Lösung. Diese Erscheinung kann auch bei der allgemeineren Liénardschen Gleichung  $\ddot{y} - \psi(y)\dot{y} + \omega_0^2 y = C \cos(\omega_1 t + \gamma)$ , wobei  $\psi(y) = a_1 + a_3 y^2 + a_5 y^4 + \dots + a_{2k-1} y^{2k}$  ist, bei passender Wahl der  $a_v$  und  $C$  für  $\gamma = 0$  und  $\omega_1 = (2k + 1)\omega_0$  eintreten.

L. Collatz.

**Plis, A.:** On a topological method for studying the behaviour of the integrals of ordinary differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 415–418 (1954).

L'A. généralise le théorème fondamental de T. Ważewski (ce Zbl. 32, 350) en utilisant la notion de „quasi-isotopie deformation retract“. Ceci le conduit à plusieurs applications à l'étude du comportement asymptotique des trajectoires. Par exemple si dans une couronne circulaire on définit un champ de vecteurs  $E$ , dont tous les points de sortie sont des points de sortie stricte et si chaque bord de la couronne contient des points autres que des points de sortie, il existe une demi-trajectoire positive de  $E$  qui ne sort pas de la couronne.

G. Reeb.

**Cooke, K. L.:** The rate of increase of real continuous solutions of algebraic differential-difference equations of the first order. Pacific J. Math. 4, 483–501 (1954).

Bei jeder algebraischen Differentialgleichung  $P(t, u(t), u'(t)) = 0$  kann man bekanntlich Funktionen  $f(t)$  angeben, derart, daß jedes Integral für hinreichend große  $t$  der Ungleichung  $|u(t)| \leq f(t)$  genügt; z. B. ist  $f(t) = \exp(ct^k)$  bei geeigneter Wahl von  $c$  und  $k$  eine solche Funktion. Die Vermutung, daß bei jeder algebraischen Differenzen-Differentialgleichung  $P(t, u(t), u'(t), u(t+1), u'(t+1)) = 0$  etwas Ähnliches gilt, wird zunächst durch das Beispiel  $u'(t) \times u'(t+1) = 0$  widerlegt, da diese Gleichung offenbar durch jede Funktion  $u(t)$  befriedigt wird, die unendlich viele Konstanzintervalle der Länge 1 (oder größer) aufweist und dazwischen kürzere Intervalle, in denen sie beliebig stark wächst. Eine Wachstumsbeschränkung ist also nur bei speziellen Klassen zu erwarten. Verf. betrachtet die Typen  $P(t, u(t), u'(t+1)) = 0$  und  $P(t, u'(t), u(t+1)) = 0$  und beweist für beide die Existenz einer (von  $P$  abhängigen) Konstanten  $c$ , derart,

daß für jede Lösung  $u(t)$  eine Folge  $t_n$  mit  $t_n \rightarrow \infty$  esiste, für die  $|u(t)| \cdot \exp(\exp ct)$  ist. Beim ersten Typus gilt, wenn man ihn noch weiter einschränkt, diese Ungleichung sogar für alle hinreichend großen  $t$ . *O. Perron.*

● **Murray, F. J. and K. S. Miller:** Existence theorems for ordinary differential equations. New York: New York University Press 1954. X, 154 p. \$ 5.00.

È un volume diviso in sei brevi capitoli di cui i primi cinque sono dedicati ai classici teoremi d'esistenza, di unicità, degli integrali dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie  $dy_i/dx = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n; x)$  con i dati di Cauchy, e alla dipendenza degli integrali dai valori iniziali e dei parametri, nell'ipotesi che le  $f_i$  siano funzioni continue dei loro argomenti. Il sesto capitolo, dedicato ai sistemi di equazioni differenziali lineari, contiene un cenno del caso analitico. *G. Sansone.*

**Stampacchia, Guido:** Sopra una generalizzazione dei problemi ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. *Ricerche Mat.* 3, 76–94 (1954).

Trattasi di una Memoria particolarmente importante per lo studio da un punto di vista unitario dei più generali problemi sui sistemi di equazioni differenziali  $(1) y'_i = f_i(x; y_1, \dots, y_n)$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , che nella striscia  $C: a \leq x \leq b, |y_i| < \infty$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ , soddisfano le condizioni di Carathéodory nell'ipotesi che alle  $f_i(x; y_1, \dots, y_n)$  possano associarsi delle funzioni  $\psi_{ij}(x)$ ,  $q_i(x)$ ,  $(i, j = 1, \dots, n)$ , sommabili in  $(a, b)$ ,  $\varphi_i(x) \geq 0$ , tali che risulti in  $C$

$$|f_i(x; y_1, \dots, y_n) - \sum_{j=1}^n \psi_{ij}(x) y_j| \leq \varphi_i(x), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Con considerazioni topologiche fondate su una generalizzazione del teorema di Brouwer il problema di costruire una curva integrale  $\{x = x, y_i = y_i(x)\}$ ,  $a \leq x \leq b$   $(i = 1, \dots, n)$  di  $S_{n-1} = (x, y_1, \dots, y_n)$  che si appoggi ad  $n$  varietà assegnate  $V_1, V_2, \dots, V_n$  relativo al sistema (1) viene trasportato per una trasformazione omotopica al sistema lineare  $y'_i = \sum_{j=1}^n \psi_{ij}(x) y_j$ ,  $(i = 1, \dots, n)$ . Si ritrovano così come casi particolari il problema di Nicoletti, il problema di Satô, i problemi provenienti dallo studio delle estremali nel calcolo delle variazioni, i problemi ai limiti relativi ad equazioni differenziali di ordine superiore dipendenti da un parametro. Il caso che le varietà  $V_1, V_2, \dots, V_n$  fossero contenute in iperpiani  $x = \alpha_i$  era stato già trattato dall'A. (questo Zbl. 29, 261); il caso che le  $V_1, V_2, \dots, V_n$  fossero lineari ed il caso  $n = 2$  con una sola varietà lineare erano stati trattati da R. Conti (questo Zbl. 50, 316; 51, 324). *G. Sansone.*

**Ljaščenko, N. Ja.:** Über einen Zerlegungssatz für ein System von linearen Differentialgleichungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 97, 965–967 (1954) [Russisch].

Consider (1):

$$\dot{z}_1 = A_1(t) z_1 + L_{11}(t) \dot{z}_1 + L_{12}(t) z_2, \quad \dot{z}_2 = A_2(t) z_2 + L_{21}(t) z_1 + L_{22}(t) z_2,$$

where  $z_1$  is an  $r$ -vector,  $z_2$  an  $(n-r)$ -vector,  $A_i, L_{ij}$  matrices. Assume that the real parts of the characteristic roots of  $A_1$  are strictly less than those of  $A_2$  (the difference being  $\geq 2\gamma > 0$ ). Then, if the matrices  $A_i$  satisfy a (uniform) Lipschitz condition being  $\geq 2\gamma > 0$ . Then, if the matrices  $A_i$  satisfy a (uniform) Lipschitz condition with a sufficiently small (relative to  $\gamma$ ) Lipschitz constant and if the  $L_{ij}$  are sufficiently small (relative to  $\gamma$ ), there is a change of variables  $z_1 = \eta_1 + B_2(t) \eta_2$ ,  $z_2 = B_1(t) \eta_1 + \eta_2$ ,  $B_i$  bounded continuously differentiable matrices, which transforms (1) into the system  $\dot{\eta}_1 = (A_1 + L_{11} + L_{12} B_1) \eta_1$ ,  $\dot{\eta}_2 = (A_2 + L_{21} B_2 + L_{22}) \eta_2$ , where each equation contains just one variable. The precise bounds for the Lipschitz constant and for the norm of  $L_{ij}$  are explicitly given but very complicated. The proof is based on previous results of the author (this Zbl. 56, 87).

*J. L. Massera.*



**Yoshizawa, Taro:** On the non-linear differential equation. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 133—141 (1954).

**Yoshizawa, Taro:** On the convergence of solutions of the non-linear differential equation. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 143—151 (1954).

**Yoshizawa, Taro:** Note on the existence theorem of a periodic solution of the non-linear differential equation. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. 28, 153—159 (1954).

**Yoshizawa, Taro:** Note on the boundedness of solutions of a system of differential equations. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 28, 293—298 (1954).

In these four papers the idea of Ljapunov's functions is generalized and fruitfully applied to problems on boundedness, stability and the existence of periodic solutions. The following are some of the main results: 1. Let  $\dot{x} = f(t, x)$  be a system of differential equations defined in  $E_1^+ \times E_n$  ( $E_1^+$  is the interval  $0 \leq t < +\infty$ ); let  $V(t, x)$  be a function defined for  $t \in E_1^+$ ,  $|x| \geq R_0 > 0$ , such that (i)  $V \rightarrow 0$  uniformly when  $|x| \rightarrow \infty$ , (ii)  $V$  is positive definite, (iii)  $V$  satisfies a local Lipschitz condition and (iv)  $\liminf_{h \rightarrow 0} [V(t+h, x+hf) - V(t, x)]/h \geq 0$ , then for any

$\alpha > 0$  there is a  $\beta(\alpha) > 0$  such that any solution  $x(t)$ ,  $\|x(t_0)\| < \alpha$ , satisfies  $\|x(t)\| < \beta(\alpha)$  for  $t \geq t_0$ . 2. If the  $\liminf$  in (iv) is  $\geq \varepsilon > 0$ , the solutions are ultimately bounded in the following sense: there is a constant  $A > 0$  such that for any solution  $x(t)$  we have  $|x(t)| < A$  for  $t \geq T \geq 0$  (where  $T$  depends on the solution considered). 3. If the system is periodic (in  $t$ ) and of the second order, the existence of a  $V$  having the properties stated in theorem 1 ensures the existence of a harmonic vibration (under additional assumptions, uniqueness and stability in the large of this solution are proved).

*J. L. Massera.*

**Minorsky, N.:** On the stroboscopic method. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 192—199 (1954).

Anschließend an frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 42, 99, 100 usw.) wird ein zusammenfassender Bericht gegeben. Das System  $dx/dt = P(x, y, t)$ ;  $dy/dt = Q(x, y, t)$  wird durch  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $\varrho = r^2$  in  $d\varrho/dt = F(\varrho, \varphi, t) = \mu f(\varrho, \varphi, t)$ ,  $d\varphi/dt = G(\varrho, \varphi, t) = -1 + \mu g(\varrho, \varphi, t)$  umgeschrieben, eine Störungsrechnung nach dem als klein angesehenen Parameter  $\mu$  angesetzt und das neue System  $d\varrho/d\tau =$

$K(\varrho, \varphi) = \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi - t, t) dt$ ,  $d\varphi/d\tau = L(\varrho, \varphi) = \int_0^{2\pi} g(\varrho, \varphi - t, t) dt$  aufgestellt. Die

Existenz eines stabilen singulären Punktes in der „stroboskopischen“  $\varrho, \varphi$ -Ebene ist dann ein Kriterium für das Vorhandensein einer stabilen periodischen Bewegung in den  $\varrho, \varphi$ -Ebene. Einige Schwierigkeiten bei der stroboskopischen Methode (z. B. Auftreten mehrerer stabiler singulärer Punkte in der  $\varrho, \varphi$ -Ebene) werden besprochen. Als Beispiele werden die Gleichungen  $\ddot{x} + b\dot{x} + [1 + (a - c x^2) \cos 2t] x + c x^3 = 0$  und  $\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + [1 + (a - c x^2) \cos 2t] x = 0$  nach der stroboskopischen Methode behandelt und an einer großen Zahl von Spezialfällen verschiedene Erseheinungen erläutert.

*L. Collatz.*

**Massera, José L.:** Total stability and approximately periodic vibrations. Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadíst. 2, 135—143 und engl. Zusammenfassg. 145 (1954) [Spanisch].

Consider the differential system (1)  $dx/dt = X(x, t)$  where  $x$  stands for an  $n$ -dimensional vector and  $X(0, t) = 0$ . The solution  $x = 0$  is said to be totally stable if given  $\varepsilon > 0$  we can find  $\delta > 0$  such that the relations  $\|x_0\| \leq \delta$  and  $\|X(x, t) - X_1(x, t)\| \leq \delta$  (whenever  $\|x\| \leq \varepsilon$ ,  $t \geq 0$ ) imply that the solution  $x(t)$  of (2)  $dx/dt = X_1(x, t)$  for which  $x(0) = x_0$  satisfies  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  for  $t \geq 0$ . Several sufficient conditions for total stability are given. For instance, if (1) is autonomous or periodic with respect to  $t$  and if the solution  $x = 0$  is asymptotically stable then it is also totally stable. Given  $\varepsilon > 0$  a function  $q(t)$  is said to be  $\varepsilon$ -

periodic of period  $T$  if we can find a sequence  $t_n, t_0 = 0, 0 < T - \varepsilon < t_{n+1} - t_n < T + \varepsilon$  such that  $0 < \tau \leq t_{n+1} - t_n$  implies that  $q(t_n + \tau) - q(\tau) < \varepsilon$ . Under certain conditions it is shown that if (1) has a periodic solution of period  $T$  then given  $\varepsilon > 0$  we can find  $\delta > 0$  such that (2) has an  $\varepsilon$ -periodic solution of period  $T$ .

M. M. Peixoto.

Miroslavlev, E. N.: Nichtlineare Systeme mit Korrekturvorrichtung. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6), 33—40 (1954) [Russisch].

The equations  $(T^2 D^2 + U D + K) \varphi + \eta = 0, (V^2 D^2 + W D) \eta = F(\sigma), (T_2 D + 1) \sigma = l(T_1 D + 1) q = m(T_2 D + 1) \eta, D = d/dt$ , govern the motion of a regulating mechanism having a „correcting device“ represented by a four-terminal with a transfer function  $Y(D) = l(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)$ ; the author assumes  $T, U, V, W, K, T_1, T_2, m$  constants,  $l = 1, F(\sigma)$  nonlinear characteristic. By means of suitable changes of variables and the introduction of a „coefficient of linearization“  $h$  and a „small parameter“  $\mu$ , the system is reduced to  $F_1(D)q + \eta = 0, F_2(D)\eta + h\sigma = \mu[F(\sigma) - h\sigma], F_3(D)\sigma = F_4(D)\eta + m F_3(D)q, F_i$  linear operators with constant coefficients. For  $\mu = 0$  this is a fifth order linear system with constant coefficients whose periodic solutions and stability region may be studied in their dependence of the various parameters. For  $\mu \neq 0$  periodic solutions in the form of power series in  $\mu$  and their stability properties are studied by means of more or less standard nonlinear mechanics techniques. The purpose of all this is to find methods for the synthesis of such systems.

J. L. Massera.

Kolmogorov, A. N.: Über die Erhaltung von bedingt periodischen Bewegungen bei kleiner Änderung der Hamiltonschen Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 527—530 (1954) [Russisch].

Let  $G = T \times S$ , where  $T$  is an  $s$ -dimensional torus with coordinates  $q_1, \dots, q_s \bmod 2\pi$  and  $S$  a domain with coordinates  $p_1, \dots, p_s$ ; it is assumed that the origin belongs to  $S$ . Let  $\dot{q}_s = \partial H / \partial p_s, \dot{p}_s = -\partial H / \partial q_s$  be the equations of a dynamical system,  $H = H(p, q, \theta)$  analytic in  $G \times (-c, c), H(p, q, 0) = m + \sum \lambda_s p_s + (1/2) \sum \Phi_{ss}(q) p_s p_s + O(|p|^3), m, \lambda_s$  constants. Assume constants  $c > 0, \eta > 0$  exist such that the inner product  $(n, \hat{\lambda}) \geq c \|n\|^\eta$ , where  $n$  is any vector with integer components. Let  $q_{ss}$  be the mean value of  $\Phi_{ss}$  in  $T$  and assume  $\text{Det}(q_{ss}) \neq 0$ . Then there is an analytic contact transformation  $q = Q + \theta F(Q, P, \theta), p = P + \theta G(Q, P, \theta)$  defined in a neighbourhood of  $T \times \{0\}$  transforming  $H(p, q, \theta)$  into  $H = M(\theta) + \sum \lambda_s P_s + O(\|P\|^2)$ . As a consequence, the „conditionally periodic“ motions  $q = \hat{\lambda} t + q^0, p = 0$ , which exist for  $\theta = 0$  do not disappear for small  $\theta \neq 0$  but are displaced to the torus  $P = 0$  retaining the same frequencies  $\lambda$ . Moreover, assume that  $H(p, q, 0) = W(p)$  and that the Hessian of  $W$  is  $\neq 0$  in  $S$ ; if  $M_\theta$  is the set of initial points in  $G$  whose trajectories belong to  $G$  for  $-\infty < t < +\infty$  and which are conditionally periodic, the measure of  $M_\theta$  tends, when  $\theta \rightarrow 0$ , to the measure of  $S$ . Only a sketchy indication of the proofs is given; there are a few misprints.

J. L. Massera.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Flanders, Harley: An extension theorem for solutions of  $d\omega = \Omega$ . Proc. Amer. math. Soc. 5, 509—510 (1954).

Es seien  $U, V$  zwei offene Punktmengen im  $n$ -dimensionalen Raum  $E_n$  und die durch  $V$  bestimmte abgeschlossene Menge  $\bar{V}$  in  $U$  enthalten und  $U$  zusammenhängend und vom Homologietyp einer Zelle. Sind  $\alpha, \Omega$  zwei Differentialformen für die  $d\alpha = \Omega$  in  $U$  gilt, während  $\Omega$  in  $E_n$  existiert, so gibt es eine Form  $\beta$  in  $E_n$  mit  $d\beta = \Omega$ , welche in  $V$  mit  $\alpha$  übereinstimmt.

K. Reidemeister.

Rham, Georges de: Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire. *Commentarii math. Helvet.* **28**, 346—352 (1954).

Soit  $\omega = \sum_{i=1}^n y_i X_i$  une forme linéaire en les  $n$  indéterminées  $X_i$ , les  $y_i$  appartenant à un anneau commutatif  $A$ . Soit  $\alpha$  une forme extérieure de degré  $q < n$  en les  $X_i$ , à coefficients appartenant à un  $A$ -module  $M$ . La forme  $\omega$  divise  $\alpha$  si  $\alpha = \omega \wedge \beta$ ,  $\beta$  étant une forme à coefficients dans  $M$ . On a alors  $\omega \wedge \alpha = 0$ . L'A. montre que cette condition est également suffisante lorsque  $(y_1, \dots, y_k)$ ,  $0 \leq k < n$ , désignant le sous- $A$ -module de  $M$  formé de toutes les combinaisons linéaires de  $y_1, \dots, y_k$ , à coefficients dans  $M$ , on a  $y_{k+1} \cdot a \in (y_1, \dots, y_k)$  entraîne  $a \in (y_1, \dots, y_k)$ ,  $a$  étant un élément quelconque de  $M$ . Lorsqu'il est possible d'associer à tout  $a \in (y_1, \dots, y_k)$ , un système déterminé d'éléments  $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ , tel que  $a = \sum_{i=1}^k y_i a_i$ , l'A. donne un procédé  $P^*$  permettant de construire, pour toute forme  $\alpha$  divisible par  $\omega$ , une forme déterminée  $\beta$  telle que  $\alpha = \omega \wedge \beta$ . Application de ce critère au cas des formes différentielles dans  $R^n$ , où les  $y_i$  constituent un système de coordonnées de  $R^n$ , ne s'annulant simultanément qu'au seul point  $O$ .  $A$  est l'ensemble des fonctions  $C_\infty$ ,  $M$  est l'ensemble des fonctions  $C_\infty$  à support compact dans  $R^n$ . L'opération  $P^*$  est alors définie pour toutes les formes; elle est une application linéaire continue de l'espace de toutes les formes  $C_\infty$  à support compact, dans lui-même. Par dualité on déduit que les distributions  $T$  telles que  $T \wedge \omega = 0$  sont les multiples de la distribution de Dirac  $\delta$ , et que tout courant  $T$ , de degré positif, tel que  $T \wedge \omega = 0$  est divisible par  $\omega$ . Applications aux formes  $C_\infty$  d'une variété  $C_\infty$  à  $n$  dimensions  $F$  et à la détermination de toutes les distributions invariantes relativement au plus grand groupe linéaire connexe laissant invariante la forme quadratique  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$  Th. Lepage.

● Bers, L., S. Bochner and F. John, edited by: Contributions to the theory of partial differential equations. (*Ann. Math. Studies*, Vol. 33.) Princeton: Princeton University Press, 1954. 257 p.; \$ 4,00.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln besprochen.

Hornich, Hans: Das Problem der linearen Differentialoperatoren. *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **23**, 333—339 (1954).

In der Differentialgleichung endlicher Ordnung  $\sum g_{i_1, \dots, i_n} \partial^{i_1} u / \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n} = f$  ( $i = i_1 + \dots + i_n$ ) seien die  $g_{i_1, \dots, i_n}$  in einer Umgebung eines Punktes  $P$  stetig. Gefragt wird, ob die Gleichung bei jeder stetigen Funktion  $f$  eine Lösung in einer Umgebung von  $P$  hat.  $g_{j_1, \dots, j_n}$  heißt ein Nachfolger von  $g_{i_1, \dots, i_n}$  wenn  $j_r \geq i_r$  für alle  $r$  und für wenigstens ein  $r$  sogar  $j_r = i_r + 1$  ist. Der Nachfolger heißt von erster Ordnung, wenn  $j_r = i_r$  für ein  $r$  gleich 1 und für die  $n - 1$  anderen  $r$  gleich 0 ist. Mit dieser Terminologie werden zwei Theoreme bewiesen: 1. ein Nichtexistenztheorem: Wenn jedes  $g_{i_1, \dots, i_n}$  von dem wenigstens ein Nachfolger erster Ordnung samt seinen sämtlichen weiteren Nachfolgern in einer Umgebung von  $P$  identisch verschwindet, selbst im Punkt  $P$  verschwindet, dann ist die Gleichung nicht für jedes stetige  $f$  lösbar; 2. ein Existenztheorem: Wenn ein  $g_{i_1, \dots, i_n}$  Nachfolger von allen andern ist und in  $P$  nicht verschwindet, dann existiert bei jedem stetigen  $f$  eine Lösung in einer gewissen Umgebung von  $P$ . O. Perron.

Kostjučenko, A. G. und G. E. Šilov: Über die Lösung des Cauchyschen Problems für reguläre Systeme linearer partieller Differentialgleichungen. *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 3 (61), 141—148 (1954) [Russisch].

This paper and the following five generalize and apply results of Gelfand and Šilov (this Zbl. **52**, 116). We use the notations of that review. Consider the Cauchy problem

$$(1) \quad \partial u / \partial t = P((2\pi i)^{-1} \partial / \partial x) u, \quad u(x, t_0) = u_0(x),$$

where  $u = (u_1, \dots, u_m)$  is a vector function of  $x = (x_1, \dots, x_N)$  and  $t$ , and  $P$  is a square matrix of differential operators with coefficients depending continuously on  $t$ . The order of the entire matrix function  $Q(s, t_0, t) = \exp \left( \int_{t_0}^t P(s, t) dt \right)$  of  $s = (s_1, \dots, s_N)$  is called the reduced order of the system, and the system is



called regular, if for every matrix element  $Q_{ij}(s, t_0, t) \in C(1 + |s|^q) \exp(C' |\operatorname{Im} s|^{p_0})$ . Using the Fourier transform Gelfand and Šilov proved that, for regular systems, the solution of Cauchy's problem is unique in the class of functions such that, for every  $\varepsilon > 0$ ,  $|u(x, t)| < B_\varepsilon \exp(\varepsilon |x|^{p_0})$ ,  $(p_0^{-1} + p_0^{-1} = 1)$ , and also proved the existence of solutions in a distribution sense. In the present paper it is proved that there is a sufficiently differentiable solution in the classical sense, if  $|u_0(x)| < C_\varepsilon \exp(\varepsilon |x|^{p_0})$  for every  $\varepsilon > 0$ , and  $u_0$  has a sufficient number of derivatives with the same estimate.

L. Hörmander.

**Borok, V. M.:** Lösung des Cauchyschen Problems für gewisse Typen von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 97, 949—952 (1954) [Russisch].

Let  $\Phi$  be a basic set of functions as considered by Gelfand and Šilov (cf. the above review). A function  $f(x)$  is called multiplicative on  $\Phi$ , if the multiplication  $\Phi \ni q \rightarrow f q$  is a continuous mapping from  $\Phi$  to  $\Phi$ , and a linear functional  $T$  on  $\Phi$  is called convolutive, if  $g(h) = T_x(q(x-h)) \in \Phi$  when  $q \in \Phi$ . The inverse Fourier transform of a multiplicative function on  $\Phi$  is a convolutive linear functional on  $\Phi$ , and the convolution  $T_1 * T_2$  has a sense, if  $T_1$  and  $T_2$  are linear functionals on  $\Phi$  and one of them is convolutive. [These notions and results are due to L. Schwartz (this Zbl. 30, 126) when  $\Phi = S$ .] Gelfand and Šilov proved that, if  $Q(s, t_0, t)$  is a multiplicative function on  $\Phi$  for  $t = t_0$ , there exists for any  $u_0 \in T(\Phi)$  one and only one solution of (1) such that  $u(\cdot, t) \in T(\Phi)$  for  $t = t_0$ . In the present paper it is remarked, that the inverse Fourier transform  $\dot{Q}_{t_0, t}$  is then a convolutive distribution on  $\Phi$ , and the solution of (1) is  $u(\cdot, t) = u_0 * \dot{Q}_{t_0, t}$ . If  $|Q_{ij}(\sigma, t_0, t)| < C \exp(-C' |\sigma|^{p_0})$  for real  $\sigma$ , which is the case for systems parabolic in Petrowsky's sense,  $\dot{Q}_{t_0, t}$  is defined by a function  $\dot{Q}(x, t_0, t)$ . This gives essentially the results of the preceding paper. — Cauchy's problem is correctly posed in the sense of Gårding (this Zbl. 45, 202), if and only if  $Q_{ij}(s, t_0, t) < C_1 e^{C' |s|}$  and  $|Q_{ij}(\sigma, t_0, t)| < C_2(1 + |\sigma|)$  for real  $\sigma$ . (No proofs.) An explicit construction of the solution is indicated for some systems of physical interest.

L. Hörmander.

**Kostjučenko, A. G.:** Über das Cauchysche Problem für ein lineares System von partiellen Differentialgleichungen mit Sturm-Liouvilleschen Differentialoperatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 17—20 (1954) [Russisch].

The author replaces the operator  $\partial/\partial x_i$  in the system (1) by a Sturm-Liouville operator in the variable  $x_i$ . Replacing the Fourier transform by the Fourier-Sturm-Liouville transform, the author announces results generalizing those of Gelfand-Šilov and Borok (see the two reviews above). The statements are, however, somewhat diffuse.

L. Hörmander.

**Žitomirskij, Ja. I.:** Das Cauchysche Problem für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen mit Differentialoperatoren vom Besselschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 9—12 (1954) [Russisch].

This is a more elaborate version of the previous paper in the special case where  $x$  is a one-dimensional variable and the Sturm-Liouville operator is the Bessel operator  $Bu = \partial^2 u / \partial x^2 + (2p+1)x^{-1} \partial u / \partial x$  ( $0 < x < \infty$ ) with the boundary condition  $\partial u / \partial x = 0$ ,  $x = 0$ . When  $2p+1$  is a non-negative integer, the results are also special cases of those of Schwartz, this Zbl. 42, 331.

L. Hörmander.

**Gurevič, B. L.:** Neue Typen von Räumen von Fundamental- und verallgemeinerten Funktionen und das Cauchysche Problem für Differenzengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 893—895 (1954) [Russisch].

Let  $M(\xi)$  and  $Q(\tau)$  be two even, positive, conjugate convex functions of one variable, tending to infinity with their arguments. Let  $K_M$  be the set of infinitely differentiable functions  $q(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , such that all derivatives are

$O(e^{-M(C|x|)})$  for some  $C$ , and let  $Z^\Omega$  be the set of entire functions  $\psi(s)$  of  $s = (s_1, \dots, s_N)$  such that, for every polynomial  $P(s)$ ,  $\int |P(\sigma + i\tau) \psi(\sigma + i\tau)|^2 d\sigma < A_1 e^{\Omega(A|\tau|)}$ . Then  $Z^\Omega$  is the set of Fourier transforms of functions in  $K_M$ . This generalizes part of the results of Gelfand-Šilov (see the above reviews). [More general results were announced independently by the reviewer, *C. r. Acad. Sci., Paris* **240**, 392–395 (1955)]. As an application it is proved that the differential-difference system  $\partial u_\mu(x, t)/\partial t = \sum_{\nu=1}^m \sum_{k=1}^{K_{\mu\nu}} a_{k\mu\nu}(t) u_\nu(x + h_{k\mu\nu}, t)$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , when  $h_{k\mu\nu}$  are vectors, has no solution  $\neq 0$  which vanishes when  $t = 0$  and satisfies the inequality  $|u(x, t)| < C_\varepsilon e^{\varepsilon|x| \log|x|}$  for every  $\varepsilon > 0$ . Also the existence of solutions of Cauchy's problem is established. *L. Hörmander.*

**Bass, G. I.: Formeln zur Lösung des Cauchyschen Problems für einige Differenzen-Differentialgleichungen.** *Doklady Akad. Nauk SSSR* **100**, 613–616 (1955) [Russisch].

The author gives an infinite series for the solution of the Cauchy problem for the differential-difference equation  $\partial u/\partial t = \lambda(t) \Delta^h u(x, t)$ , where  $x$  is a one-dimensional variable,  $u$  a scalar function and  $\Delta^h q(x) = q(x + h/2) - q(x - h/2)$ ; this problem is of the form studied in the paper reviewed above. *L. Hörmander.*

**Olejnik, O. A.: Über das Cauchysche Problem für nicht-lineare Gleichungen in der Klasse der unstetigen Funktionen.** *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 3 (61), 231–233 (1954) [Russisch].

The author defines a class of discontinuous solutions of the equation  $\partial u/\partial t + \partial \varphi(t, x, u)/\partial x + f(t, x) = 0$  in terms of the characteristics of the equation. A unique solution of the Cauchy problem with discontinuous initial data exists in the large in this sense. The solution can also be obtained as the limit of the solution of a mixed boundary problem for the parabolic equation

$$\varepsilon \partial^2 u / \partial x^2 = \partial u / \partial t + \partial \varphi(t, x, u) / \partial x + f(t, x)$$

when  $\varepsilon \rightarrow +0$ . No proofs.

*L. Hörmander.*

**Rachajsky, B.: Sur les transformations de contact.** *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **40**, 896–909 (1954).

L'A. généralise les résultats obtenus dans son mémoire [Bull. Soc. math. phys. Serbie **5**, Nr. 3, 79–90 (1953)], dans le cas des deux variables indépendantes, sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à un nombre quelconque des variables indépendantes, considérant une seule équation ou un système d'équations en involution. L'A. établit le lien intime entre la théorie des transformations de contact, la nouvelle méthode d'intégration de Jacobi et de celle de Korkine et démontre le passage de l'une de ces méthodes à l'autre, pour atténuer les difficultés qui peuvent se présenter pour l'intégration: 1° Si le nombre d'intégrales en involution connues est insuffisant pour l'application de la méthode de Jacobi, il peut arriver que les mêmes intégrales sont suffisantes pour transformer les équations données en les fonctionnelles; alors l'intégration s'achève par des opérations algébriques. 2° Le nombre insuffisant d'intégrales connues des caractéristiques permet d'introduire les transformations restreintes de contact pour achever l'intégration [v. N. Saltykow, *Akad. Roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 4<sup>e</sup>, II. Sér.* **4**, Nr. 113 (1925)]. 3° Les difficultés de résolution algébrique des intégrales en involution des caractéristiques peuvent être évitées, en les résolvant par rapport aux variables canoniques d'une autre classe. Les errata d'impression (pp. 903, 904) dans les exemples sont aisément corrigées, en les lisant:

$$(p/q) (q - x)^2 = \lg(z - p q) + \sqrt{q/p} \cdot 1/(q - x),$$

$$(p_1 - p_3)^4 [x_2 p_2 + p_1 (x_1 + x_3) - z] = [p_1 (x_1 + 2 x_3) - x_3 p_3]^3 (x_1 + x_3).$$

*N. Saltykow.*

**Bouligand, Georges:** Cas limites d'équations  $f(x, y, z, p, q; m) = 0$ . C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2209—2211 (1954).

Verf. hatte in zwei früheren Arbeiten die partielle Differentialgleichung erster Ordnung  $f(x, y, z, p, q; m) = 0$  in dem Falle untersucht, daß  $f$  für kleine Werte des Parameters  $m$  in den Ausdruck  $(y - p)^2 + q^2$  übergeht (vgl. G. Bouligand, dies. Zbl. **17**, 16: 31, 309). Diese Untersuchungen werden nunmehr wieder aufgenommen, wobei Verf. jetzt die Konstruktion einer Lösung in einem sehr allgemeinen Falle gelingt. Damit werden auch Resultate auf direktem Wege bestätigt, die in einer der früheren Arbeiten nur indirekt bewiesen worden waren. *M. Pinl.*

**Pliš, A.:** Characteristics of non-linear partial differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 419—422 (1954).

Soit  $z(x, y)$  une fonction de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $(0, 0)$  et solution de (1)  $z_x = f(x, y, z, z_x)$  (au voisinage de  $(0, 0)$ ) où  $f(x, y, z, q)$  est fonction de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $(0, 0, z(0, 0), z_x(0, 0))$ . Alors il existe une solution  $\eta, \zeta, \gamma$  des équations caractéristiques de (1), qui vérifient  $\eta(0) = 0$ ,  $\zeta(0) = z(0, 0)$ ,  $\gamma(0) = z_{y_x}(0, 0)$  et dans un voisinage convenable de  $x = 0$ , les identités  $\zeta(x) = z(x, \eta(x))$ ,  $\gamma(x) = z_x(x, \eta(x))$ . Ce théorème généralise un résultat de Ważewski (ce Zbl. **17**, 399), où l'on suppose que les dérivées du premier ordre de  $f$  et  $z$  vérifient des conditions de Lipschitz. Pour le montrer, l'A. construit une famille équicontinue de solutions approchées, et déduit le résultat par utilisation du théorème d'Ascoli. Généralisation à l'équation  $z_x = f(x, y_1, \dots, y_n, z, z_{y_1}, \dots, z_{y_n})$ . *J. L. Lions.*

**Ciliberto, Carlo:** Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili. Ricerche Mat. **3**, 40—75 (1954).

L'A. applique la méthode de l'inversion de l'opération linéaire pour démontrer l'existence d'une solution (unique) de l'équation linéaire du type parabolique

$$(1) \quad u''_{xx} + a_1(x, y) u'_y + a_2(x, y) u'_x + a_3(x, y) u = f(x, y)$$

(avec  $a_1 = 0$ ). Cette méthode est basée sur les limitations a priori des solutions de l'équation de la chaleur  $u''_{xx} = u'_y = f(x, y)$ , de leurs dérivées et des coefficients hölderiens. Ces limitations constituent le sujet de la plupart du travail. La méthode analogue a été appliquée par J. Schauder et R. Caccioppoli pour résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation elliptique. *M. Krzyżański.*

**Morawetz, Cathleen S.:** A uniqueness theorem for Frankl's problem. Commun. pure appl. Math. **7**, 697—703 (1954).

Sia data l'equazione di tipo misto ellittico-iperbolica (1)  $K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0$  con  $K(y) \geq 0$  per  $y \geq 0$ ,  $K(0) = 0$ ; sia  $D$  il campo limitato nel semipiano  $y \geq 0$  da un arco semplice  $C_0$ , che taglia l'asse  $x$  in due punti  $A$  e  $B$  (tali che l'origine  $O$  appartenga ad  $AB$ ), e nel semipiano  $y \leq 0$  dalle due caratteristiche  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  per l'origine e da due archi  $C_1$  e  $C_2$ , uscenti rispettivamente da  $A$  e da  $B$ . Sotto opportune ipotesi per la funzione  $K(y)$  e gli archi  $C_0, C_1, C_2$ , si dimostra l'unicità della soluzione  $u(x, y)$  della (1), che è definita in  $D$  e assume valori assegnati su  $C_0, C_1, C_2$ , supponendo che  $u_x, u_y$  siano continue sul contorno di  $D$  (condizione, che viene poi sostituita da altra più generale nei punti  $O, A, B$ ). *M. Cinquini-Cibrario.*

**Ladyženskaja, O. A.:** Über ein Verfahren zur angenäherten Lösung einer Aufgabe von Lavrent'ev-Bicadze. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 4 (62), 187—189 (1954) [Russisch].

Problème: On cherche  $u$ , solution de (1)  $\partial^2 u / \partial x^2 + \theta(y) \partial^2 u / \partial y^2 = 0$  ( $\theta(y) = 1$  si  $y > 0$ ,  $-1$  si  $y < 0$ ), dans le domaine  $D$  limité dans le demi plan  $y > 0$ , par une courbe  $L$  régulière, joignant  $A = (0, 0)$  à  $B = (1, 0)$ , et dans le demi plan  $y < 0$  par les deux caractéristiques  $L_1$  et  $L_2$  issues de  $A$  et  $B$ , avec les conditions aux limites (2)  $u_L = \varphi$ , (3)  $u_{L_i} = \psi$ . (Ce problème est un problème du type Tricomi.) Si les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont suffisamment régulières, ce problème admet une solution unique: cf. par ex. Bicadze, ce Zbl. **52**, 96). L'A. donne le



procédé suivant d'approximation de la solution: 1. Les équations (1) et (3) déterminent aussitôt dans la partie  $y < 0$  de  $D$  la fonction  $\partial u / \partial y - \partial u / \partial x$ , donc (4)  $(1/\sqrt{2})(\partial u / \partial y - \partial u / \partial x)|_{AB} = \chi(x)$  est connu. 2. Reste à trouver  $u$  solution de (1) dans  $y < 0$ , avec les conditions aux limites (2) et (4): problème de dérivée oblique (la détermination de  $u$  dans  $y > 0$  est ensuite immédiate). Soit  $u_h$  la solution de l'équation aux différences finies correspondante, sur un réseau parallèle aux axes de coordonnées, de côté  $h$ . L'A. montre qu'il existe une constante  $C$  telle que  $|u - u_h| \leq C h$ .  
J. L. Lions.

**Maurin, K.:** Der Fundamentalsatz über schwache Lösungen der allgemeinen linearen Systeme der elliptischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 457—461 (1954).

Let  $A$  be an elliptic differential operator of order  $\sigma$  in  $n$  variables operating on functions with values in a complex space of finite dimension and let the coefficients of  $A$  of the derivatives of order  $t$  be in  $C^{\sigma-t}$  when  $t < \sigma$  and in  $C^{\max(\sigma-2, 2\sigma)}$  when  $t = \sigma$ . Using results of Lopatinskij (this Zbl. 45, 371), the author proves that a weak solution  $u$  of  $Au = f$  is a. e. in  $C^k$ , ( $k \leq \sigma - n/2$ ), if  $f$  is square integrable and a. e. of class  $C^\sigma$  when  $f$  satisfies a Hölder condition. This result improves one announced by Browder (this Zbl. 55, 343) who requires the corresponding coefficients to be in  $C^{t+\sigma+2}$ .  
L. Gårding.

**Garabedian, P. R.:** Applications of analytic continuation to the solution of boundary value problems. J. rat. Mech. Analysis 3, 383—393 (1954) — Techn. Report No. 16; Stanford Univ. Calif.: Appl. Math. and Statist. Labor. 1953. 14 p.

Durch Einführung unabhängiger komplexer Veränderlichen  $z = x + iy$  und  $z^* = x - iy$  und analytische Fortsetzung der Lösung einer Differentialgleichung  $\Delta \psi = p(x, y) \psi$  in der  $(x, y)$ -Ebene ins Komplexe werden Formeln abgeleitet, die eine beliebige Lösung der transformierten Gleichung  $\partial^2 \Phi / \partial z \partial z^* = P(z, z^*) \Phi$  durch eine Fundamentallösung ausdrücken. Mit Hilfe dieser Formeln wird die erste Randwertaufgabe in einem Winkelraum  $\alpha < \arg z < \beta$  auf ein Dirichletproblem für die harmonische Funktion  $\operatorname{Re}(\Phi(z, 0))$  im selben Gebiet reduziert. Dieselben Methoden liefern außerdem die Fortsetzung einer Lösung in der  $(x, y)$ -Ebene durch Spiegelung an einem ananalytischen Rand. Dabei wird der analytische Rand in der Form  $\bar{z} = G(z)$  geschrieben und die (analytische) Funktion  $G(z)$  ausgenutzt. Es folgt eine Anwendung auf die Oseen-Gleichung  $(1/\eta) \psi_{xx} = 2/\eta \psi_x$  und das Randwertproblem  $\psi = \partial \psi / \partial n = 0$ . Die Methode wird weiter auf  $(1/\eta) \psi_{xx} = 2/\eta \psi$  angewendet und vereinfacht sich besonders bei  $(1/\eta) \psi_{xx} = 0$ . Sie wird um so einfacher, je einfacher die Funktion  $G(z)$  ist. Verf. gibt einen expliziten Ausdruck für die biharmonische Greensche Funktion für das Äußere einer Ellipse, eines Schlitzes und eines von zwei Kreisbogen berandeten Linsengebietes. Verf. deutet an, wie die Methoden auf weitere partielle Differentialgleichungen angewendet werden können.

H. J. Bremermann.

**Bergman, Stefan and M. M. Schiffer:** Properties of solutions of a system of partial differential equations. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 79—87 (1954).

Die Verf. dehnen Methoden, die sie beim Studium einer partiellen Differentialgleichung angewendet haben (s. z. B. S. Bergman, Trans. Amer. math. Soc. 53, 130—155 (1943)) auf ein System  $\partial^2 \psi / \partial z \partial z^* = F(z, z^*) \psi$  und  $\partial^2 \psi / \partial w \partial w^* = G(w, w^*) \psi$ ,  $\psi = \psi(z, z^*, w, w^*)$  aus,  $z, z^*, w, w^*$  sind komplexe Veränderliche und  $F, G$  holomorphe Funktionen in Gebieten  $D_z \times D_{z^*}$ , bzw.  $D_w \times D_{w^*}$ . Die Methode der sukzessiven Approximation liefert, daß das System in dem 8-dimensionalen Produktgebiet  $D_z \times D_{z^*} \times D_w \times D_{w^*}$  eindeutig eine holomorphe Lösung hat, falls die Werte auf der 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\{(z, z^*, w, w^*) | z = w = 0 \vee z = w^* = 0 \vee z^* = w = 0 \vee z^* = w^* = 0\}$  vorgegeben sind. Beschränkt man das System auf die Teilmannigfaltigkeit  $z^* = \bar{z}$ ,  $w^* = \bar{w}$  und transformiert

$x = (z + \bar{z})/2$ ,  $y = (z - \bar{z})/2i$ ,  $u = (w + \bar{w})/2$ ,  $v = (w - \bar{w})/2i$ , so erhält man das reelle System  $A_{x,y} q = f(x, y) q$ ,  $A_{u,v} q = g(u, v) q$  ( $A_{x,y} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ). Ist  $q$  Lösung dieses reellen Systems im konvexen Gebiet  $B^4$  des reellen  $(x, y, u, v)$ -Raumes, so läßt sich  $q$  in die 8-dimensionale „komplexe Hülle“

$$H(B^4) = \{(z, z^*, w, w^*) | (z, w) \in B^4 \wedge (z^*, w) \in B^4 \wedge (z, w^*) \in B^4 \wedge (z^*, w^*) \in B^4\}$$

hinein holomorph fortsetzen, falls  $g(x, y)$  und  $f(x, y)$  in die Hülle holomorph fortsetzbar sind. [Anm. Das ist beachtenswert, da die komplexe Hülle  $H(B^4)$  nicht identisch ist mit der Holomorphiehülle von  $B^4$  in der komplexen Erweiterung des  $(x, y, u, v)$ -Raumes]. Der Bergmansche Integraloperator, der eindeutig die Menge der in einem Gebiet holomorphen Funktionen einer Variablen auf die Menge der Lösungen einer Gleichung  $Aq = f(x, y) q$  transformiert, wird auf das System ausgedehnt. Statt der holomorphen Funktionen einer Variablen treten Paare holomorpher Funktion  $h_1(z, w)$  und  $h_2(z, w)$  auf. Der Operator gibt die Möglichkeit zur Approximation der Lösungen durch ein vollständiges System spezieller Lösungen.

H. J. Bremermann.

**Bers, Lipman:** Non-linear elliptic equations without non-linear entire solutions. J. rat. Mech. Analysis **3**, 767—787 (1954).

Es sei  $ds^2 = A_{11}(u, v) du^2 - 2 A_{12}(u, v) du dv + A_{22}(u, v) dv^2$  mit  $A_{11} A_{22} - A_{12}^2 > 0$ ,  $A_{11} > 0$  eine für  $u^2 + v^2 < \infty$  erklärte Riemannsche Metrik und  $u^* = u^*(w) = u^*(u, v) - i v^*(u, v)$  die durch die Bedingungen  $u^* = v^* = 0$ ,  $u_0^* = 1$ ,  $u_0^* = 0$  (für  $w = 0$ ) festgelegte Transformation, welche die endliche Ebene  $w < \infty$  in bezug auf die Metrik  $ds^2$  konform auf die Kreisscheibe  $|w^*| < R \leq \infty$  abbildet. Man setze

$$T_1(u^*, v^*) = A_{12}(u, v) A_{22}(u, v), S_1(u^*, v^*) = [A_{11}(u, v) A_{22}(u, v) - A_{12}(u, v)^2]^{1/2} / A_{22}(u, v), \\ T_0 = T_1 (S_1^2 + T_1^2), S_0 = -S_1 (S_1^2 + T_1^2),$$

ferner

$$\alpha_j(u^*, v^*) = (1/S_j)(\partial S_j/\partial u^* - \partial T_j/\partial v^*), \beta_j(u^*, v^*) = (1/S_j)(\partial S_j/\partial v^* + \partial T_j/\partial u^*), j = 0, 1.$$

Dann wird der Ausdruck  $\chi(r) = \text{Max}_{u^*, v^* \leq r} [\alpha_j(u^*, v^*)^2 + \beta_j(u^*, v^*)^2]$ ,  $0 \leq r < R$ ,

als Charakteristik von  $ds^2$  bezeichnet. Es wird u. a. gezeigt: Jede für  $x^2 + y^2 < \infty$  zweimal stetig differenzierbare Lösung  $z = z(x, y)$  der Gleichung

$$A_{11}(z_x, z_y) z_{xx} + 2 A_{12}(z_x, z_y) z_{xy} + A_{22}(z_x, z_y) z_{yy} = 0$$

für die  $R < \infty$  und  $\chi(r) = O(R - r^{\varepsilon-1})$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  und  $r > R$  gilt, ist eine lineare Funktion. Der klassische Satz von S. Bernstein über Minimalflächen ist darin als Spezialfall enthalten.

E. Heinz.

**Mocilla, Silvio:** Sulla soluzione fondamentale di una classe di equazioni alle derivate parziali di second'ordine e di tipo ellittico. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. **88**, 211—224 (1954).

On donne dans un voisinage de l'origine dans  $R^2$  (coordonnées:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ), l'opérateur différentiel  $u \rightarrow L(u) = \text{div}(\rho \text{ grad } u)$ , où  $\rho$  est une fonction analytique de  $r$ . On cherche une solution fondamentale (ou élémentaire) de cet opérateur, avec pour singularité le point  $P' = (x' = r' \cos \theta', y' = r' \sin \theta')$  [on pose  $P = (x, y)$ ], sous la forme  $w(P, P') = u(P, P') \log |P - P'| + v(P, P')$ ,  $u$  et  $v$  étant des fonctions analytiques au voisinage de l'origine ( $P$  et  $P'$  sont dans un voisinage de l'origine). Les fonctions  $u$  et  $v$  doivent alors vérifier (1)  $L(u) = 0$ , (2)  $L(v) + F(P, P') = 0$ , la fonction  $F$  s'exprimant simplement à l'aide de  $u$  (et  $\rho$ ). L'A. résout ces équations en cherchant d'abord  $u$  sous forme de série de Fourier:  $u(P, P') = 1 + \sum_{n \geq 1} K_n(r') R_n(r) \cos(n(\theta - \theta'))$ ; les  $R_n$  sont alors solutions d'équations de type Fuchs à l'origine, avec une seule solution régulière à l'origine, d'où  $R_n$  à un facteur constant près; on détermine ensuite les  $K_n$  de sorte que  $F$  soit régulière au voisinage de l'origine. Reste ensuite à trouver  $v$  avec (2).

J. L. Lions.

Müller, Claus: On the behavior of the solutions of the differential equation  $\Delta U = F(x, U)$  in the neighborhood of a point. Commun. pure appl. Math. 7, 505—515 (1954).

Let  $(x)$  be the position vector in a Euclidean space of  $p$  dimensions, let  $|x|$  be the length of  $(x)$ , and let  $\Omega_R$  denote the  $p$ -dimensional sphere  $|x| = R$ . The principal result is that if  $U(x)$  possesses continuous second derivatives (i. e.,  $U$  is of class  $C''$ ) for  $|x| \leq \alpha$ , if  $\int_{\Omega_R} |\Delta U|^2 ds \leq c \int_{\Omega_R} |U|^2 ds$  uniformly for  $0 < R \leq \alpha$ , and if  $\int_{\Omega_R} |U|^2 ds = o(R^n)$  for all  $n$  as  $R \rightarrow 0$ , then  $U(x)$  vanishes identically. This result has interesting applications to the study of the local behavior of solutions of the differential equations (1):  $\Delta U = F(x, U)$  and (2):  $\Delta U + k^2(x) U = 0$ , where  $\Delta U$  is the  $p$ -dimensional Laplacian of  $U$ . It follows immediately from the main theorem that if  $U$  is a solution of (2) of class  $C''$  for  $|x| \leq \alpha$ , if  $k^2(x)$  is uniformly bounded, and if  $\int_{\Omega_R} |U|^2 ds = o(R^n)$  for all  $n$  as  $R \rightarrow 0$ , then  $U \equiv 0$ . An analogous result for  $p = 2$  was proved by T. Carleman (this. Zbl. 7, 162), but the present result in  $p$  dimensions drops the requirement that  $k^2(x)$  be analytic. A similar uniqueness theorem is obtained for solutions of (1) if  $F(x, U)$  satisfies a Lipschitz condition. A. J. Lohwater.

Mysovskich, I. P.: Anwendung der Čaplygin'schen Methode auf die Lösung des Dirichletschen Problems für einen speziellen Typus elliptischer Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 13—15 (1954) [Russisch].

Es sei  $D$  ein einfach zusammenhängendes endliches Gebiet mit genügend glattem Rand  $S$ . Betrachtet wird die Aufgabe  $\Delta u = f(x, y, u)$  in  $D$ ,  $u = 0$  auf  $S$ , wobei  $f_u > 0$  und  $f_{u^2} \geq 0$  (oder  $f_{u^2} \leq 0$ ) vorausgesetzt werden. Die Folge  $u_n(x, y)$ , die für  $n = 1, 2, \dots$  definiert ist durch

$$\Delta(u_n - u_{n-1}) = f_u(x, y, u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) + f(x, y, u_{n-1}) - \Delta u_{n-1},$$

$u_0 = 0$ ,  $u_n - u_{n-1} = 0$  auf  $S$ , konvergiert gegen die Lösung der Aufgabe. Zum Beweis wird die Differentialungleichung  $\Delta V = f(x, y, V) - \Delta V \leq 0$  mit der Randbedingung  $V = 0$  auf  $S$  herangezogen, wobei für  $V$  eine Lösung der Gleichung  $\Delta V = P$  mit konstantem  $P \geq \text{Max } |f(x, y, 0)|$  in  $D$  genommen werden kann. Es wird ferner der Fall betrachtet, daß  $f_{u^2}$  sein Vorzeichen wechselt. Die Resultate lassen sich auf mehr als zwei unabhängige Veränderliche verallgemeinern. W. Schulz.

Komatu, Yûsaku: Eine Bemerkung über Neumannsche Randwertaufgabe. Kodai math. Sem. Reports 1954, 38—42 (1954).

Let  $N(\zeta, z)$  be the Neumann function for a region  $D$  of the  $\zeta$ -plane bounded by a smooth curve  $C$ ; the singularity of  $N(\zeta, z)$  is at the point  $\zeta = z$ . It is remarked that  $N(\zeta, z)$  is not generally a conformal invariant. In order to form a function  $n(\zeta, z)$  which is a conformal invariant and which has properties similar to those of  $N(\zeta, z)$ , the author defines two functions  $a(\zeta)$ ,  $\zeta \in C$ , and  $b(z)$ ,  $z \in D$ , with  $n(\zeta, z) = N(\zeta, z) + a(\zeta) + b(z)$ , and gives the solution of the Neumann problem in terms of  $n(\zeta, z)$ . A. J. Lohwater.

Komatu, Yûsaku and Hisao Mizumoto: On transference between boundary value problems for a sphere. Kodai math. Sem. Reports 1954, 115—120 (1954).

Für das Dirichletsche und das Neumannsche Randwertproblem der  $n$ -dimensionalen Kugel, die ja aufeinander zurückzuführen sind, werden die Lösungsformeln angeschrieben. H. Hornich.

Hitotumatu, Sin: On the Neumann function of a sphere. Commentarii math. Univ. St. Pauli 3, 1—5 (1954).

Aufstellung der Greenschen Funktion für die zweite (Neumannsche) Randwertaufgabe der Potentialtheorie beim Kreis bzw. bei der  $n$ -dimensionalen Kugel. H. Hornich.



**Hong, Imsik:** On some boundary value problem in an annulus. Kodai math. Sem. Reports 1954, 4—6 (1954).

L. Myrberg löste die gemischte Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Einheitskreis  $|z| = 1$ , wenn Funktionswert und Normalableitung auf einer abzählbaren Menge punktfremder offener Bögen des Kreises  $|z| = 1$  vorgeschrieben sind (dies. Zbl. 43, 316). In enger Anlehnung an diese Arbeit betrachtet Verf. die entsprechende Randwertaufgabe für das Gebiet  $1 > |z| > R$ . *H. Wittich.*

**Mann, W. Robert and Jacob F. Blackburn:** A nonlinear steady state temperature problem. Proc. Amer. math. Soc. 5, 979—986 (1954).

Il s'agit de trouver une fonction bornée  $U(x, y)$  avec

(\*)  $U_{xx} + U_{yy} = 0, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y < \infty;$   
 $U(0, y) = U(\pi, y) = 0, 0 \leq y < \infty; \quad U_y(x, 0) = -G[U(x, 0)], 0 < x < \pi,$   
 où  $G$  est une fonction continue, décroissante,  $G(1) = 0$ . Les AA. ramènent (\*) à l'équation intégrale non-linéaire

(\*\*)  $f(x) = \int_0^\infty K(x, \lambda) G[f(\lambda)] d\lambda$  où  $K(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1 - \cos(x + \lambda)}{1 - \cos(x - \lambda)}$ ;

ils montrent que (\*\*) a une solution continue, unique, sur  $[0, \pi]$ , avec  $0 \leq f(x) \leq 1$ . Il en résulte une solution de (\*) par

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log \frac{1 - 2e^{-y} \cos(x + \lambda) + e^{-2y}}{1 - 2e^{-y} \cos(x - \lambda) + e^{-2y}} G[f(\lambda)] d\lambda.$$

*Ch. Blanc.*

**Ehrling, Gunnar:** Asymptotische Relationen für Eigenwerte und Eigenfunktionen beim einfachen Schwingungsproblem. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 26—33 (1954) [Schwedisch].

**Ehrling, Gunnar:** On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators. Math. Skandinav. 2, 267—285 (1954).

Let  $D$  be an open bounded subset of real  $n$ -space and consider the quadratic forms

$$N^k(j, f) = \int \sum_{|\mu|=k} D^\mu f^2 dx, \quad (f, f) = \int_D f^2 dx \quad \text{and} \quad N_t^k(f, f) = N^k(f, f) + t(f, f)$$

where  $D^\mu = (\partial/\partial x_1)^{\mu_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\mu_n}$ ,  $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$  and  $t \geq 0$ . It is shown that inequalities of the type  $N^k(j, f) = O(t^{-(n-k)/2}) N_t^m(f, f)$  ( $k \leq m$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,  $O$  independent of  $f$ ), are true for all sufficiently differentiable functions in  $D$ , provided the boundary of  $D$  is a suitable Lipschitz manifold. Similar estimates in terms of  $N_t^m(j, f)$  and a negative power of  $t$  are also derived for  $|D^r f(x)|^2$  and  $\int |D^r f(x)|^2 dS_j$  where  $S_j$  is a Lipschitz manifold of dimension  $j$  in  $D$ , provided  $|r|$  and  $n - j$  are sufficiently small. These inequalities without the dependence on  $t$  are due to Friedrichs [Math. Ann. 98, 206—247 (1928)]. Applications of these inequalities are made to a certain vibration problem, i. e. finding the eigenvalues and eigenfunctions of a certain quadratic form  $V = V + R$  with respect to the unit form  $E(f, f) = (f, f)$  and a class of functions  $H$ . The form  $V$  is supposed to be given by

$$\int_D \sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu}(x) D^\mu f D^\nu f dx$$

where the coefficients are bounded and the integrand is uniformly positive definite.  $R(f, f)$  is supposed to be uniformly small with respect to  $N_t^m(f, f)$  as  $t \rightarrow \infty$  (examples of such forms founded on the previous inequalities are given), and  $H$  is a class of functions which is closed with respect to the metric  $N_1^m(f, f)^{1/2}$  and includes all functions vanishing outside compact subsets of  $D$ , (or compact subsets of an open subset of  $D$  whose measure equals the measure of  $D$ ). It is shown that if  $t$  is large

enough, the equality

$$(f, g) = U_t(G_t f, g), \quad (U_t = U + tE, f \in L^2(D), G_t f \in H),$$

defines a completely continuous operator  $G_t$  from  $L^2(D)$  to  $HL^2(D)$ . Its eigenfunctions and eigenvalues are  $\{\varphi\}$  and  $\{(\lambda + t)^{-1}\}$  respectively if  $\{\varphi\}$  and  $\{\lambda\}$  are those of the vibration problem. Finally, when  $2m > n$  and the coefficients  $a_{\mu\nu}$  of  $V$  satisfy a Lipschitz condition and  $R$  is symmetric (so that  $G_t$  is self-adjoint) the asymptotic formulas

$$\sum_{\lambda_i < t} 1 = t^{n/2m} (2\pi)^{-n} \int_D V_y dy (1 + o(1)) \text{ and } \sum_{\lambda_i < t} q_i(x) \bar{q}_i(y) = t^{n/2m} (2\pi)^{-n} V_u(\delta_{xy} + o(1))$$

are deduced by Carleman's wellknown method. Here the set  $\{q_i\}$  is supposed to be orthonormalized and complete,  $\delta_{xy} = 0$  when  $x \neq y$  and 1 otherwise and

$$V_y = \int_{p=1} d\xi, \quad (p = \sum a_{\mu\nu}(y) \xi^{\mu_1+\nu_1} \dots \xi^{\mu_n+\nu_n}). \quad L. Gårding.$$

**Pólya, G.:** Estimates for eigenvalues. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 200—207 (1954).

Bei der Eigenwertaufgabe  $\Delta u + \lambda u = 0$  in einem ebenen Gebiet  $D$  und  $u = 0$  am Rande erhält man bei einem  $n$ -gliedrigen Ritz-Ansatz mit voneinander linear unabhängigen Funktionen  $g_\nu$  bekanntlich obere Schranken  $\lambda'_\nu$  für die  $n$  ersten Eigenwerte  $\lambda_\nu$ , und die  $\lambda_\nu$  sind die Minima von  $\lambda'_\nu$  bei Variation der  $g_\nu$ ; dieses Prinzip wird mit dem Courantschen Maximum-Minimum-Prinzip verglichen. Sind die Eigenwerte für einen Bereich  $D$  bekannt, aber für einen zu  $D$  affinen Bereich  $D^*$  gesucht, so empfiehlt Verf., bei  $D^*$  als Ritzsche Funktionen  $g_\nu$  die aus den Eigenfunktionen von  $D$  durch affine Abbildung hervorgehenden Funktionen zu verwenden. Besteht  $D$  in einem quadratischen Gitter aus endlich vielen Gitterquadraten und verwendet man als  $g_\nu$  Funktionen, die in jedem Gitterquadrat bilinear in den Koordinaten  $x, y$  sind, so führt das Ritzsche Verfahren auf die Differenzengleichungen (in der üblichen Gitterpunktsbezeichnung)

$$(u_{i+1,j} + \dots + u_{i+1,j+1} + \dots - 8u_{i,j})/(3h^2) + (A/36)(16u_{i,j} + 4u_{i+1,j} + \dots + u_{i+1,j+1} + \dots) = 0,$$

wobei die Punkte jeweils die  $u$ -Werte in den drei symmetrisch gelegenen Gitterpunkten bezeichnen. Die hierbei erhaltenen Näherungswerte  $\lambda_\nu$  sind somit obere Schranken für die Eigenwerte  $\lambda_\nu$  (während man beim gewöhnlichen Differenzenverfahren bekanntlich nicht allgemein aussagen kann, ob die Näherungswerte zu groß oder zu klein sind). L. Collatz.

**Dnestrovskij, Ju. N.:** Über die Änderung der Eigenwerte bei Änderung der Gebietsgrenzen. Vestnik Moskovsk. Univ. 9, Nr. 9 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 6), 61—74 (1954) [Russisch].

$\tau$  sei ein ebenes Gebiet mit stückweise glattem Rand  $I'$ . Als bekannt wird die Lösung folgender Aufgabe I vorausgesetzt:  $\Delta u + \lambda u = 0$  in  $\tau$ ,  $u = 0$  auf  $I'$ ,  $\int_\tau u^2 d\tau = 1$ . Von  $\tau$  werde ein Gebiet  $g_n$  abgetrennt ( $\tau - g_n = \tau_n$ ), dessen Rand einen mit  $I'$  gemeinsamen Teil  $\gamma_n$  hat. Es soll die Aufgabe II gelöst werden:  $\Delta u + \lambda u = 0$  in  $\tau_n$ ,  $\bar{u} = 0$  auf  $I'$  und im Gebiet  $g_n$ ,  $\int_{\tau_n} \bar{u}^2 d\tau = 1$ . Es sei weiter  $\Gamma_n$  der Teil des Randes von  $\tau_n$ , der mit  $I'$  zusammenfällt, und  $\sigma_n$  der Teil des Randes von  $g_n$ , der im Innern von  $\tau$  liegt. Dann wird die Aufgabe betrachtet:  $\Delta S_n = 0$  in  $\tau_n$ ,  $S_n = 0$  auf  $\Gamma_n$ ,  $S_n = u^{(1)}$  auf  $\sigma_n$ , wo  $u^{(1)}$  die erste Eigenfunktion der Aufgabe I ist. Für die Differenz  $\Delta \lambda_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)} - \lambda^{(1)}$  der ersten Eigenwerte der Aufgabe II und der Aufgabe I kommt man zu einer Abschätzung der Form

$$\Delta \lambda_n^{(1)} \leq a_n^2 \left\{ \lambda^{(1)} \int_{\tau_n} u^{(1)} S_n d\tau - \lambda^{(1)} \int_{\tau_n} S_n^2 d\tau \right\},$$

wobei man noch feststellen kann, daß das letzte Glied der rechten Seite von höherer Ordnung klein wird als das erste. Die Arbeit enthält weiter Anwendungen

für die Fälle, daß  $\gamma_n$  ein glattes Randstück ist und daß  $\gamma_n$  aus der Umgebung eines Eckpunktes besteht. W. Schulz.

**Martin, A. I.:** The extension of two-dimensional eigenfunction expansions to higher dimensions. Proc. London math. Soc., III, Ser. 4, 437–455 (1954).

Die Theorie der Eigenfunktionsentwicklungen für die partielle Differentialgleichung  $\sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n^2} + \{\lambda - q(x_1, x_2, \dots, x_N)\} \Phi = 0$  läßt sich für  $N = 3$  Veränderliche unmittelbar aus der von E. C. Titchmarsh (dies. Zbl. 43, 101) für 2 Veränderliche aufgestellten Theorie entwickeln. Dagegen sind bei mehr als 3 Veränderlichen gewisse Modifikationen des von Titchmarsh angegebenen Verfahrens notwendig, da die Greensche Funktion für  $N \geq 4$  in einem Bereich, der die Singularität dieser Funktion enthält, nicht mehr  $L^2$ -integrierbar ist. Diese Schwierigkeit wird mittels iterierter Kerne überwunden, wobei die Greensche Funktion als Ausgangskern gewählt wird. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst einige im weiteren Verlauf benötigte Eigenschaften iterierter Kerne betrachtet. Wie in der Theorie der uneigentlichen singulären Integralgleichungen findet man, daß der iterierte Kern von hinreichend hoher Ordnung in einem Bereich, der die Singularität enthält,  $L^2$ -integrierbar ist. Der weitere Gedankengang entspricht genau dem der genannten Arbeit von Titchmarsh, wobei nur die jeweils notwendigen Abänderungen formuliert werden. Der Entwicklungssatz wird zunächst für einen beschränkten Bereich bewiesen und dann die Untersuchung auf den ganzen Raum ausgedehnt. Dabei zeigt sich, daß die zu entwickelnde Funktion im Falle  $N \geq 4$  größeren Einschränkungen als im Fall  $N = 2, 3$  unterliegt. E. Kreyszig.

**Saul'ev, V. K.:** Beweis für die Konvergenz der Eigenfunktionen, die sich mit der Methode der Netze ergeben. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4 (62), 217–224 (1954) [Russisch].

Das Eigenwertproblem  $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda u = 0$  in  $Q$ ,  $u = 0$  auf  $I'$  wird durch Differenzenausdrücke approximiert, indem  $Q$  mit einem Parallelepipedgitter umgeben wird, dessen Maschenweiten genügend klein und untereinander von gleicher Größenordnung sind. Für die Eigenfunktionen der Differenzenaufgabe werden Konvergenzbetrachtungen durchgeführt (vgl. auch L. A. Ljusternik, dies. Zbl. 55, 328). W. Schulz.

**Trjitzinsky, W. J.:** Les problèmes de totalisation se rattachant aux Laplaciens non sommables. Mém. Sci. math. 125, 93 S. (1954).

The author considers the equation (1)  $I^0 F(x, y) = f(x, y)$  where  $f(x, y)$  is a real finite function defined on a domain  $D$ , and where  $I^0$  is a suitably defined Laplace operator. The problem the author considers is that of reconstructing the function  $F(x, y)$  given  $f(x, y)$ . In the present work the author partially solves his problem under the hypothesis that  $F$  is continuous with its partial derivatives of the first order. His work is based upon a thorough study of elementary potential theory and upon the works of Denjoy (this Zbl. 36, 319, 41, 386), Brelot (this Zbl. 13, 17) and Trjitzinsky (this Zbl. 41, 26). The author promises further results in another publication. M. Rade.

**Brelot, M.:** Majorantes harmoniques et principe du maximum. Arch. der Math. 5, 429–440 (1954).

Développement d'une note récente (M. Brelot, ce Zbl. 47, 344) concernant les fonctions harmoniques et sousharmoniques dans un espace de Green  $E$  (voir M. Brelot et G. Choquet, ce Zbl. 46, 327). Résultat essentiel: si  $u$  sousharmonique dans  $E$ , majorée par une fonction harmonique „indifférente“, admet 0 pour majorante radiale, alors  $u \leq 0$  (principe du maximum); d'où l'unicité de la fonction harmonique indifférente  $h$  admettant une radiale  $q$ . Mais l'existence d'une telle  $h$  n'est pas assurée,



même pour une donnée  $q$  continue, comme l'A. le montre par divers exemples très simples. J. Deny.

**Huckemann, Friedrich:** On the „one-circle“ problem for harmonic functions. J. London math. Soc. **29**, 491—497 (1954).

A function  $u(z)$  defined in a plane domain  $D$  is called „one-circle“ in  $D$  if, for each point  $z_0$  in  $D$ , there exists at least one circle  $|z - z_0| \leq \varrho$  lying in  $D$  such that

$$(a) \quad \int \int_{|z-z_0| \leq \varrho} u(z_0 + r e^{i\theta}) r dr d\theta = u(z_0), \text{ or } (c): \quad \int_{|z-z_0|=\varrho} u(z_0 + \varrho e^{i\theta}) d\theta = u(z_0);$$

condition (a) implies (c). The author raises the question whether a function which is continuous and one-circle in  $D$  is necessarily harmonic in  $D$ . In the case that  $u(z)$  is continuous in the closure of  $D$ , Kellogg (this Zbl. **9**, 112) gave an affirmative answer, assuming the weaker hypothesis (c). In an effort to weaken the assumption that  $u(z)$  be continuous in the closure of  $D$ , the author studies the one-dimensional analogue of the problem and shows that if  $u(x)$  is continuous and one-circle (condition (a)) in  $-1 < x < 1$ , then the existence of  $U(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} U(x)$  and  $U(1) =$

$\lim_{x \rightarrow 1} U(x)$ , where  $U(x) = \int_0^x u(x) dx$ , implies that  $u(x)$  is harmonic (i. e. linear).

A counterexample is provided in the one-dimensional case for the condition (c).

A. J. Lohwater.

**Sheffer, I. M.:** A class of functions related to harmonic functions. Duke math. J. **21**, 479—489 (1954).

Let  $C: (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = a^2$  be a fixed circle in the plane,  $K$  its interior and  $\bar{K} = K \cup C$ . A function  $u(x, y)$  belongs to class  $P$  if it is analytic in  $K$  and all series

$$u_{p,q}(x, y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} u_{p+r,q+s}(x - \xi)^r (y - \eta)^s,$$

$p, q = 0, 1, \dots$  where  $u_{i,j}(x) = \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$ ,  $u_{i,j} = u_{i,j}(\xi, \eta)$  converge uniformly on  $\bar{K}$ ;  $u$  belongs to  $Q$  if  $u \in P$  and

$$u_{p,q}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{p,q}(\xi + a \cos t, \eta + a \sin t) dt, \quad p, q = 1, 0, \dots$$

Of course every function harmonic in  $K$  is in  $Q$ , but  $Q$  contains also non-harmonic functions. Let  $u \in P$  and put

$$x_n^{r,s} = \left(\frac{a^2}{4}\right)^n \sum_{k+l=n} \binom{n}{k} u_{r+2k, n+2l},$$

then  $u \in Q$  if and only if  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k!)^2} x_{n+k-1}^{r,s} = 0$ . — Let

$$\Omega[u] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{a^2}{4}\right)^k \Delta^k u(x, y).$$

Under slightly more restrictive conditions on the regularity of  $u$  than to belong to  $P$ , we have  $u \in Q$  if and only if  $\Omega[u] = 0$  in some neighbourhood of  $(\xi, \eta)$ . — Let  $u \in P$  with  $u \neq 0$  and suppose it satisfies  $\Delta u + c u = 0$ . Then  $u \in Q$  if and

only if  $c = -\frac{4\lambda}{a^2}$  where  $\lambda = \mu + i\nu$  is any zero of  $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} t^{n-1}$ . A

generalization of this theorem is also given. — Let  $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  be non-singular and let  $A(x, y)$  and  $B(x, y)$  be two linearly independent functions which belong to  $P$  and satisfy  $\Delta A = \gamma A + \beta B$ ,  $\Delta B = \gamma A + \delta B$ . Then  $A$  and  $B$  belong to  $Q$  if and only if  $(a^2/4)\theta F((a^2/4)\theta) = 0$ .

J. Horváth.

Pólya, G. and M. Schiffer: *Convexity of functionals by transplantation*. J. Analyse math. **3**, 245—345 (1954).

Complétant l'ouvrage de Pólya-Szegő (*Isoperimetric inequalities*, ce Zbl. **44**, 383) qui rassemble beaucoup de méthodes et résultats sur diverses fonctionnelles de domaines, les A.A. étudient systématiquement la variation de ces fonctionnelles quand le domaine varie en dépendant d'un paramètre. Le but est encore d'obtenir ainsi des inégalités permettant une évaluation plus ou moins approchée de ces fonctionnelles lorsqu'aucun calcul direct ne paraît abordable. Les variations considérées du domaine sont surtout, dans le plan des transformations conformes, ou en général une dilatation parallèle à un axe  $I$  avec coefficient  $t$  proportionnel à la distance à un plan fixe orthogonal à  $I$ . Les fonctionnelles sont considérées comme solutions de problèmes d'extremum. Ainsi considérons pour un domaine plan borné simplement connexe la rigidité à la torsion  $P(t)$  du domaine variable  $D(t)$ , qui vaut la borne inférieure de  $(2 \iint_D F dx dy)^2 / \iint_D \text{grad}^2 F dx dy$ , où  $F$  est une fonction quelconque continûment différentiable dans  $D$ , s'annulant à la frontière. On montre que  $t/P$  est croissante concave de  $t^2$  et  $Pt$  croissante concave de  $t^2$ . Des résultats analogues sont donnés pour la masse virtuelle utile en hydrodynamique, pour le „rayon extérieur“ du domaine plan extérieur à une courbe de Jordan, pour la capacité électrostatique dans l'espace. Puis on reprend un théorème de Poincaré sur les valeurs propres d'un problème général et on les étudie en fonction d'une variation du domaine. Une étude particulière concerne le cas où le domaine de base possède des symétries, car on peut alors préciser souvent la dérivée en  $t$ , pour  $t = 1$ , de la fonctionnelle. Enfin la transformation conforme donne divers résultats grâce à l'usage et à l'invariance de la fonction de Green. Ainsi pour une transformation  $Z = z + t f(z)$  ( $f$  holomorphe dans  $D_0$ ) la rigidité  $P(t)$  est fonction convexe de  $t$ . Un appendice de H. Helfenstein donne des applications numériques au sujet de  $P$  pour les triangles isocèles et les rectangles.

M. Brelot.

Schiffer, M.: *Variation of domain functionals*. Bull. Amer. math. Soc. **60**, 303—328 (1954).

Exposé général réunissant de nombreux résultats dont quelques-uns nouveaux. 1. La formule classique de J. Hadamard donnant la variation de la fonction de Green  $G$  quand le domaine  $D$  varie [Acad. Sci., Paris, mém. savants étrangers, II. Sér. **33**, Nr. 4 (1908)] est à la base de nombreux travaux. On peut y rattacher, par exemple, les résultats de Löwner [Math. Ann. **89**, 103—121 (1923)] sur les coefficients de l'inverse d'une fonction univalente dans le cercle-unité, et sur l'équation différentielle en  $t$  à laquelle satisfont les représentations conformes de  $z = 1$  sur des domaines dépendant d'un paramètre  $t$  d'une façon particulière, comme l'a montré M. Biernacki (ce Zbl. **14**, 24). Cependant, d'autres travaux procèdent d'un principe différent, par exemple ceux de R. de Possel (ce Zbl. **3**, 314) ainsi que ceux qui leur ont fait suite. 2. Mais la formule de J. Hadamard présente de graves inconvénients:  $D$  varie par déplacement sur la normale, ce qui suppose une frontière  $C$  assez régulière. Une déformation plus générale de  $D$  s'obtient par la transformation (1)  $x^* = x + t S(x)$ ,  $S(x)$  étant choisi à volonté. Cette méthode dite de „variation intérieure“ a été appliquée avec succès pour les fonctions analytiques par O. Teichmüller (ce Zbl. **21**, 335), G. Golusin [Mat. Sbornik n. Sér. **19**, 203—236 (1946); ce Zbl. **44**, 395], A. C. Schaeffer and D. C. Spencer [Amer. math. Soc. Colloq. Publ., **35**, (1930)], l'A. (ce Zbl. **49**, 60), l'A. and D. C. Spencer (Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton 1954). C'est ainsi qu'ont été obtenus les résultats les plus simples et les plus importants relatifs aux fonctions univalentes. 3. L'A. applique (1) au cas de la fonction de Green (3 dim.) Il obtient une formule assez compliquée faisant intervenir un „tenseur de Maxwell“ dépendant de la fonction de Green elle-même, et se réduisant à celle d'Hadamard quand la frontière est assez régulière. (P. R. Garabedian et l'A., ce Zbl. **52**, 332.) La méthode conduit à des résultats pour le problème de Rayleigh, qui consiste à rendre minimum le produit  $A \lambda_1$  de l'aire de  $D$  par la première valeur propre de l'équation (2)  $\Delta^2 u - \lambda u = 0$  avec  $u = 0$  sur  $C$ . L'A. indique alors que la méthode de variation suivant la normale a permis de démontrer l'existence de la solution du problème du sillage d'Helmholtz dans le cas plan (méthode très différente de celle de Leray) (l'A. et G. Szegő, ce Zbl. **35**, 118; P. R. Garabedian and D. C. Spencer, ce Zbl. **46**, 185), et aussi dans le cas de révolution (P. R. Garabedian, H. Levy et l'A., ce Zbl. **47**, 182). — 4. La transformation (1) permet d'obtenir les variations successives, par exemple la variation seconde de  $G$  quand  $D$  varie suivant la normale, dont le calcul avait présenté des diffi-

cultés considérables (Garabedian et l'A., loc. cit.). On obtient ainsi: a) un théorème très général de convexité relatif aux fonctions harmoniques, b) une inégalité différentielle sur la capacité d'une famille de corps dont les frontières sont les surfaces de niveau d'une même fonction harmonique, c) des théorèmes de convexité en représentation conforme. 5. et 6. L'A. applique (1) au cas où la fonctionnelle  $\Phi[D]$  est le minimum d'une intégrale  $Q[u]$  étendue à  $D$  ou à  $C$  pour une famille  $\tilde{\gamma}_D$  de fonctions  $u$ . (1) transforme  $D = D(0)$  en  $D(\varepsilon)$ . On admet qu'il y a „transplantation“, c'est à dire que  $\tilde{\gamma}_D$  se transforme en  $\tilde{\gamma}_{D(\varepsilon)}$ . Si  $u^* \in \tilde{\gamma}_{D(\varepsilon)}$ ,  $Q[u^*]$  peut s'écrire comme une intégrale étendue à  $D(0)$ , soit  $Q[u; \varepsilon]$ . Si  $u(x; \varepsilon)$  est la fonction qui la rend minimum on a  $[D(\varepsilon)] = Q[u(x; \varepsilon); \varepsilon] \leq Q[u_0; \varepsilon]$  quelle que soit  $u_0 \in \tilde{\gamma}$ . L'A. démontre dans des cas étendus la différentiabilité de  $\Phi$ . Il obtient des inégalités relatives aux valeurs propres de l'équation (2). Il signale des résultats relatifs aux modules conformes d'un domaine et à d'autres problèmes (G. Polya et l'A., v. récession précédente). Limitant (1) à une simple dilatation dans la direction de l'un des axes l'A. traite en détails l'exemple de la capacité  $K$  d'un corps  $B$  considérée comme fonction du domaine extérieur;  $K$  est la valeur minima (ou maxima) de trois intégrales différentes (principes de Dirichlet, de Thomson et de Gauss). Il trouve dans chaque cas des inégalités sur  $K'$ . Il signale des résultats relatifs aux valeurs propres de (2) avec la condition  $\partial u / \partial n + ku = 0$  sur  $C$ , avec application aux triangles isocèles (G. C. Nooney, Techn. Report No. 35, Office of Naval Research Contract N 60 ri -106 Task Order V, Stanford University). Le procédé s'applique à  $\nabla^4 u = \lambda u$ ,  $u = \partial u / \partial n = 0$  sur  $C$ . R. de Possel.

### Variationsrechnung:

**Bullen, K. E.:** Conversion of variation problems into isoperimetric problems. *Math. Gaz.* **38**, 249—252 (1954).

Résolution de quelques problèmes très élémentaires en utilisant des variables autres que les coordonnées classiques (voir la récession suivante). J. Dufresnoy.

**Bullen, K. E.:** Euler's equation and  $(p, r)$  coordinates. *Math. Gaz.* **38**, 172—174 (1954).

Etude d'un problème particulier de calcul des variations en utilisant, au lieu des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ , les coordonnées  $r$  et  $p = r^2(r^2 - r'^2)^{-1/2}$ . J. Dufresnoy.

**Wilkins jr., J. Ernest:** A variational problem in reactor theory. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 345—348 (1954).

Verf. betrachtet die nichtnegativen Funktionen  $u(x)$ , die eine Integralgleichung  $v(x) = \int_C H(x, y) u(y) v(y) dy$  [ $H(x, y)$  symmetrisch,  $v(x)$  nicht-negativ und nicht fast überall null] erfüllen. Wenn unter ihnen eine,  $u_0(x)$ , existiert, für die

$$\lambda_n \int_C H(x, y) u_0(y) v_n(y) dy = v_n(x), \quad \int_C u_0(x) v_m(x) v_n(x) dx = \delta_{mn}$$

mit  $\lambda_n \leq \lambda_1 < \lambda_0 = 1$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) und  $v_0(x) = \text{const}$ , so folgt aus  $u(x) \geq \lambda_1 u_0(x)$  eine Bedingung, die von selbst erfüllt ist, wenn  $\lambda_1 < 0$  —, daß  $\int_C u(x) dx \geq \int_C u_0(x) dx$  ist. M. J. De Schwarz.

**Behrbohm, Hermann:** On a minimum time flight path with regard to stress and heat limitations. *Svenska Aeroplan A. B., Techn. Notes, SAAB TN 26*, 26 S. (1954).

Ein Flugkörper soll im Raume möglichst schnell vom Punkt A zum Punkt B gelangen. Der Flug verlaufe bis zur Höhe  $H^*$  unter konstantem Staudruck (d. h. z. B. gleichbleibender Dehnungsbelastung), darüber bei konstanter Machzahl (z. B. gleichbleibender Temperaturbeanspruchung). Unter der Annahme  $H^* = 11$  km und einer exponentiellen Approximation des Luftdichte-Höhe-Gesetzes lassen sich die Extremalen des Problems geschlossen angeben. Unterhalb  $H^*$  ergeben sich periodische (!) Kurven, oberhalb  $H^*$  Geraden, die ohne Knick anschließen. Diskussion der praktischen Anwendbarkeit, das Problem hat als idealer Grenzfall eine gewisse technische Bedeutung. K. Nickel.

**Emerson, R. C.:** On maximizing an integral with a side condition. *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 291—295 (1954).

Siano:  $E$  un insieme lineare chiuso,  $u(x)$  e  $v(x)$  funzioni continue in  $E$ ,  $F(p, x)$  e  $G(p, x)$  continue per  $x \in E$  e  $u(x) \leq p \leq v(x)$ . Detta  $P$  la classe delle funzioni



$p(x)$  definite in  $E$  tali che:  $u(x) \leq p(x) \leq v(x)$ :  $F(p(x), x)$  e  $G(p(x), x)$  sommabili in  $E$  e detta  $c$  una costante tale che: estr.  $\inf_{p \in P} G(p) < c < \text{estr. sup}_{p \in P} G(p)$ , esiste in  $P$  almeno una funzione che fornisce il massimo assoluto dell'integrale:  $J(p) = \int_E F(p(x), x) dx$  e fa assumere il valore  $c$  all'integrale:  $G(p) = \int_E G(p(x), x) dx$ . Estensioni al caso che  $u(x)$  e  $v(x)$  non siano continue sono considerati.

*G. Stampacchia.*

**Vidav, Ivan:** Über eine Eigenschaft der Kugel. Math. Z. **60**, 320–327 (1954).

Im Mittelpunkt steht der hier bewiesene Satz:  $F(Y) \geq 0$  für  $Y \geq 0$  sei zweimal stetig differenzierbar,  $F(0) = 0$ ,  $F''(Y) \geq 0$ ;  $Y(y) \geq 0$  sei stetig und  $\int_0^1 Y(y) \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx \geq 1$  für jede in  $0 \leq x \leq 1$  differenzierbare Funktion  $y(x) \geq 0$  mit  $y(0) = 0$ . Dann gilt:  $\int_0^\infty F(Y(y)) dy \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} F(Y) Y^{1/2} (1 - Y^2)^{-1/2} dY$ ; für  $F''(Y) \neq 0$  gilt Gleichheit nur für  $Y = 1 \cosh(\pi y/2)$ . Der Sonderfall  $F(Y) = Y^2$  löst das folgende geometrische Variationsproblem: Gesucht wird eine geschlossene Drehfläche kleinster Oberfläche mit mindestens einem Punkt  $M$  von der Eigenschaft, daß jede von  $M$  ausgehende Flächenkurve nach einem Umlauf um die Fläche bis zum Treffpunkt mit dem Meridian von  $M$  mindestens die Länge  $2\pi$  hat. Lösung ist die Drehfläche konstanter Gauß-Krümmung 1/6, die man aus einem von zwei zueinander senkrechten Meridianen begrenzten Viertel der Kugel vom Radius 4 durch Zusammenbiegen und Verheften der Meridiane miteinander erhält. Wird aber von der Flächenkurve verlangt, daß ihre Länge von  $M$  bis zum Schnitt mit dem senkrechten Meridian mindestens  $\pi/2$  ist, so ist die Einheitskugel die Lösung.

*W. Süss.*

**Blaschke, Wilhelm:** Zur Variationsrechnung. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul. Sér. A **19**, 106–107 (1954).

Falls  $dT = F(x_1, x_2; dx_1, dx_2)$  mit  $F(x_1, x_2; c dx_1, c dx_2) = c F(x_1, x_2; dx_1, dx_2)$  für jedes  $c > 0$ , die Verbreitungszeit einer Störung im Punkte  $x_1, x_2$  zum Punkte  $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2$  ist, so werden die Funktionen  $F(x_1, x_2; dx_1, dx_2)$  gesucht, für welche die Elementarwellen Kreise sind.

*Autoreferat.*

**Stampacchia, Guido:** Problemi variazionali per gli integrali multipli in forma non parametrica. Univ. Politec. Torino. Rend. Sem. mat. **13**, 19–29 (1954).

In questa conferenza l'A. illustra le proprie recenti ricerche (questo Zbl. **41**, 428; **49**, 168, 196).

*S. Cinqini.*

**Sigalov, A. G.:** Zweidimensionale Aufgaben der Variationsrechnung in nicht-parametrischer Form, auf Parameterform transformiert. Mat. Sbornik, n. Ser. **34** (76), 385–406 (1954) [Russisch].

In den Existenztheoremen über das absolute Minimum des Integrals:  $J[f] = \iint_D F(x^1, x^2, f, f'_{x^1}, f'_{x^2}) dx^1 dx^2$  spielt das Wachstum des Integranden relativ zu  $G = 1 + (f'_{x^1})^2 + (f'_{x^2})^2$  eine wichtige Rolle: Ist  $F = m G^{\alpha/2}$ ,  $m = 0$ , so untersucht der Verf. das Problem im Falle  $\alpha > 1$  durch Umformung von  $J[f]$  in die Parameterform:  $J_1(T) = \iint_K F_1(q, Aq) du$ ; dabei ist  $x = \{x_1, x_2, x_3\} = \{q_1(u), q_2(u), q_3(u)\}$ ,  $u = \{u_1, u_2\} \in K = \{0, 1; 0, 1\}$  und  $Aq$  der Vektor, dessen Komponenten die Jacobischen Determinanten des Vektors  $x$  sind. Es wird die sog. direkte Methode der Variationsrechnung benutzt. Nun zeigt sich, daß für  $\alpha > 1$  die Minimalaufgaben für  $J[f]$  und für  $J_1(T)$  gleichwertig sind, weil für die Minimalfläche  $T$  und die zugehörige Funktion  $f$  gilt:  $J[f] = J_1(T)$ . Diese Gleichung braucht für  $\alpha = 1$  nicht richtig zu sein, und zwar liegt das daran, daß die zugelassenen Flächen  $T$  Strecken enthalten können, die parallel zur  $x^3$ -Achse sind. Im Fall  $\alpha > 1$  ist die Menge dieser Strecken jedoch „nicht sehr groß“. Obigens hat schon Hilbert vorgeschlagen, bei der Lösung regulärer Variationsaufgaben Flächen zum Vergleich zuzulassen, die zur  $x^3$ -Achse parallele Teile enthalten [vgl. R. Courant, Math. Ann. **97**, 711–736 (1927)].

*W. Thimm.*

# Integraltransformationen:

**Fox, Charles:** Chain transforms. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 677–688 (1954).  
Bei wiederholter Integralabbildung führte Verf. (dies. Zbl. **37**, 198) Bilderketten

(1)  $g_{p+1}(x) = \int_0^\infty r_p(x/u) g_p(u) du/u$  ( $p = 1, \dots, n$ ),  $g_{n+1}(x) = g_1(x)$  ein. Hier verallgemeinert er diesen Ansatz, indem er außer den vorstehenden Rechtsbildern der Funktionen  $g$  mit Rechtskernen (Rk.)  $r_p$  auch Linksbilder (2)  $g_q(x) = \int_0^\infty l_q(x/u) g_{q+1}(u) du/u$  mit Linkskernen (Lk.)  $l_q$  in Betracht zieht; dabei nehmen  $p$  und  $q$  etwa  $i$  und  $j$  natürliche Werte an, so daß  $i + j = n$ , der Ordnung der Kette. Mit Hilfe bekannter Eigenschaften der Mellinschen Abbildung  $\mathfrak{M}[f(x)] = F(s)$  und ihrer in den Integralgrenzen  $\frac{1}{2} \rightarrow i\infty$ ,  $\frac{1}{2} \rightarrow -i\infty$  gebildeten Umkehrung  $\mathfrak{M}^{-1}[F(s)] = f(x)$  beweist Verf. zuerst einen Satz 1 in  $L(0, \infty)$ : Für die Kerne gelte  $x^{-1/2} l_q(x)$  und  $x^{-1/2} r_p(x) \in L(0, \infty)$  bei allen  $q$  und  $p$ , und es sei (3)  $\prod_q L_q(s) = \prod_p R_p(s)$  [wo die rechte oder linke Seite durch 1 zu ersetzen, wenn alle Kerne Lk. oder Rk. sind]. Von den Kettengliedern mögen  $g_1(x)$  und hinreichend viele  $g_i(x)$  die zum Gebrauch von  $\mathfrak{M}$ , besonders des Faltungssatzes, nötigen (in Beispielen sich oft stark vereinfachenden) Bedingungen erfüllen. Dann schließt sich die Kette (1), (2). — Beispiele für  $n = 3$ : a)  $r_1(x) = x^{-1} e^{-1/x}$ ,  $r_2(x) = e^{-x}$ ,  $l_3(x) = 1/(1+x)$ ;  $R_1(s) = \Gamma(1-s)$ ,  $R_2(s) = \Gamma(s)$ ,  $L_3(s) = \pi/\sin \pi s$ . — b)  $r_1(x) = 2 x^{-\nu} J_\nu(2x)$ ,  $r_2(x) = e^{-1/x} x^{-2\nu-2}$ ,  $\nu \neq 0$ ;  $l_3(x) = \exp(-x^2)$ .  $R_1(s) = \Gamma(\frac{1}{2}s)/\Gamma(\nu - \frac{1}{2}s + 1)$ ,  $R_2(s) = \frac{1}{2} \Gamma(\nu - \frac{1}{2}s + 1)$ ;  $L_3(s) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}s)$ . — Zweitens beweist Verf. eine Aussage über  $L^2(0, \infty)$ , die den von ihm a. a. O. ohne Beweis angegebenen Satz verallgemeinert: Sämtliche  $L_q(s)$ ,  $R_p(s)$  seien für alle  $s$  mit  $\Re s = \frac{1}{2}$  beschränkt, und wieder gelte (3). Dann bildet — Satz 2 — mit  $r_p(x) = \int_0^x r_p(y) dy$  usw. das System

$$g_{p+1}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty r_p\left(\frac{x}{u}\right) g_p(u) du, \quad \frac{d}{dx} \int_0^\infty l_q\left(\frac{x}{u}\right) g_{q+1}(u) du = g_q(x)$$

eine Bilderkette, wenn ihre Glieder  $g$  in bezug auf  $L^2(0, \infty)$  entsprechenden Bedingungen genügen wie im Satze 1 in bezug auf  $L(0, \infty)$ . — Beispiele:  $n = 1$ ; Formel für die Ableitung eines Integrals nach seiner oberen Grenze. — Der Wert  $n = 2$  mit zwei Rk. oder zwei Lk. führt zu Fouriers Cosinus- und Sinusbild; mit einem Rk. und Lk. zu zwei sich gegenseitig wiederholenden Beziehungen. — Zwei neue Beispiele zu  $n = 3$ : a)  $r_1(x) = \cos x$ ,  $r_2(x) = \sin x$ ,  $l_3(x) = \frac{1}{2} \pi J_0(2x^{1/2})$ .  $R_1(s) = \Gamma(s) \cos(\frac{1}{2} \pi s)$ ,  $R_2(s) = \Gamma(s) \sin(\frac{1}{2} \pi s)$ ,  $L_3(s) = \pi \Gamma(s)/[2\Gamma(1-s)]$ . — b)  $r_1(x) = 2 \cos 2\pi x = r_2(x)$ ,  $l_3(x) = 4 K_0(4\pi x^{1/2}) - 2\pi Y_0(4\pi x^{1/2})$ .  $R_1(s) = \zeta(1-s)/\zeta(s) = R_2(s)$ ,  $L_3(s) = [\zeta(1-s)/\zeta(s)]^2$  mit Riemanns Zeta-Funktion.

L. Koschmieder.

**Doetsch, Gustav:** Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la relativa regola di derivazione negli spazzi  $L^p$  e  $U$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 444–449 (1954).

Beweis des folgenden Satzes: Ein distributives Funktional  $T(F)$ , das von einem komplexen Parameter  $s$  abhängt, sei stetig für  $\Re(s) = 0$  in  $L^p$  ( $p \geq 1$ ) oder  $U$  und genüge für die Folge  $q_n(t) = e^{-t^2/2} t^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) der Differentiationsregel  $T(F') = s T(F) + F(0)$ . Zu diesem Fall gilt  $T = L$  in  $L^p$  oder  $U$  ( $L$  = Laplace-Transformation).

W. Saxer.

**Jurkat, W. and A. Peyerimhoff:** Über einen absoluten Fatou-Rieszschen Satz für Laplaceintegrale. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **7**, 61–68 (1954).

Nach M. Riesz [Acta Sci. math. 2, 18–31 (1924)] gilt: Ist  $b(t) = o(1)$  für  $t \rightarrow \infty$  und die für  $\Re s > 0$  konvergente Laplace-Transformierte  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} b(t) dt$  in  $s = 0$  holomorph, so existiert  $\int_0^\infty b(t) dt$ . Verff. zeigen: Wenn  $b(t)$  in jedem endlichen Intervall totalstetig,  $\int_0^\infty |b'(t)| dt < \infty$  und  $f(s)$  in  $s = 0$  holomorph ist, so ist  $\int_0^\infty b(t) dt < \infty$ . — Die Bedingung  $\int_0^\infty |b'(t)| dt < \infty$  ist nicht notwendig für die Richtigkeit der Behauptung. Sie läßt sich durch eine kompliziertere Bedingung ersetzen, die notwendig und hinreichend ist, nämlich  $\int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{-\sigma t} * b(t)] dt < \infty$  für ein  $\sigma > 0$ . Hieraus werden Sätze über die absolute Konvergenz von Dirichlet'schen Reihen abgeleitet. *G. Doetsch.*

**Delange, Hubert:** Généralisation du théorème de Ikehara. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 71, 213–242 (1954).

Die reelle Funktion  $\alpha(t) \geq 0$  sei nichtabnehmend und  $\int_0^\infty e^{-st} \alpha(t) dt = f(s)$  konvergent für  $\Re s > a > 0$ . Der Satz von Ikehara besagt, daß  $\alpha(t) \sim A e^{at}$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt, wenn  $f(s) \rightarrow A (s-a)$  gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, sobald  $s$  aus der Halbebene  $\Re s > a$  heraus gegen  $a + i y$  ( $y$  beliebig reell) strebt. Verff. beweist eine Verallgemeinerung, die als speziellen Fall z. B. folgenden Satz enthält:  $f(s)$  sei holomorph in allen Punkten der Geraden  $\Re s = a$  außer in  $a$ , wo in einer Umgebung gilt:  $f(s) = (s-a)^{-\omega} g(s) + h(s)$  mit einem reellen  $\omega$ , das keine ganze Zahl  $\leq 0$  ist, und Funktionen  $g$  und  $h$ , die in  $a$  holomorph sind ( $g(a) \neq 0$ ). Dann ist  $\alpha(t) \sim g(a) e^{at} t^{\omega-1} \Gamma(\omega)$  für  $t \rightarrow \infty$ . *G. Doetsch.*

**Erdélyi, A.:** On a generalisation of the Laplace transformation. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 10, 53–55 (1954).

Die Meijer-Transformation  $\int_0^\infty e^{-st} W_{k-m}(s t) (s t)^{-k} f(t) dt$  reduziert sich für  $k = m + \frac{1}{2}$  auf die Laplace-Transformation. Im allgemeinen Fall ist der Kern eine Derivierte nichtganzer Ordnung von  $e^{-st}$ , und vermöge einer partiellen Integration nichtganzer Ordnung erweist sich die Transformation als die Laplace-Transformation einer Derivierten nichtganzer Ordnung von  $f$ . Auf diese Weise kann ihre Theorie auf die der Laplace-Transformation zurückgeführt werden. *G. Doetsch.*

**Mayer-Kalkschmidt, Jörg:** Zur Theorie der Laplace-Stieltjes-Integrale. Mitt. math. Sem. Giessen 47, 26 S. (1954).

Für das Integral  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} ds(t)$  wird einerseits die  $(C, k)$ -Transformation 
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_k(s, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^k} \int_0^t (t-\tau)^k e^{-s\tau} ds(\tau) \quad (k \geq 0)$$
(Summierbarkeitsabszisse  $\beta_k$ ), andererseits die  $(I, k)$ -Transformation  $f_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} \chi_k(t) dt$  mit  $\chi_k(t) = \frac{d\sigma_k(0, t)}{dt}$  (Konvergenzabszisse  $\beta^k$ ) definiert. Wenn  $\chi_k(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow 0$  und  $\beta^k > 0$  ist, so wird durch Vergrößerung von  $k$  die Abszisse  $\beta^k$  nicht verkleinert, d. h. das Verfahren wird nicht potenter. Das  $(C, k)$ - und das



$(I, k)$ -Verfahren sind in der rechten Halbebene gleich stark, denn für  $\beta_k \neq 0$ ,  $\beta^k \neq 0$  ist  $\beta_k = \beta^k$ . Das Hauptziel der Arbeit ist, Sätze über die  $(C, k)$ -Transformation aufzustellen, die zu dem bekannten Satz analog sind, daß ein gewöhnliches Laplace-Integral mit positiver Originalfunktion an der Konvergenzabszisse eine Singularität hat. Es werden Sätze von folgendem Typus bewiesen: Es sei  $n \geq 1$  ganz.  $f(s)$  habe bei  $s = \beta_n$  eine Rechtsableitung  $> 0$ .  $\sigma_n(\beta_n, t)$  wachse monoton für  $t \geq T \geq 0$ . Dann ist  $s = \beta_n$  ein singulärer Punkt von  $f(s)$ . *G. Doetsch.*

**Poli, L. et P. Delerue:** Le calcul symbolique à deux variables et ses applications. Mém. Sci. math. **127**, 77 p. (1954).

Das Bändchen gibt eine Übersicht über die zweidimensionale Laplace-Transformation und ihre Anwendungen. Kap. I.: Neu auftretende Schwierigkeiten gegenüber der eindimensionalen Transformation. Eindeutigkeitssatz. Umkehrformeln. Kap. II.: Die Abbildung von Operationen (Differentiation, Integration, Faltung usw.). Kap. III.: Ableitung von zweidimensionalen Korrespondenzen aus eindimensionalen. Kap. IV.: Anwendung der Transformation zur Berechnung von Integralen, zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen und zur Ableitung von Eigenschaften der Originalfunktion aus denen der Bildfunktion. *G. Doetsch.*

**Bojanić, R. et M. Tomić:** Sur l'ordre de la transformée de sinus de Fourier. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **7**, 41–46 (1954).

Die positive Funktion  $f(t)$  strebe für  $x \rightarrow \infty$  gegen 0 und  $F(t) = \int_0^\infty f(x) \sin tx \, dx$  sei konvergent. Wenn für ein  $k$  ( $0 < k < 2$ )  $x^k f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$  strebt, so gilt für hinreichend kleines  $t$ :  $0 < A(1/t) f(1/t) \leq F(t) \leq B(1/t) f(\pi/t)$ . *G. Doetsch.*

**Boas jr., R. P.:** Order of magnitude of Fourier transforms. Michigan math. J. **2**, 141–142 (1954).

Die Bemerkung von N. Wiener, daß zwei Funktionen, die Fourier-Transformierte voneinander sind, nicht beide im Unendlichen sehr klein sein können, ist auf verschiedene Weise präzisiert worden. Verf. beweist: Wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  Fourier-Transformierte voneinander sind und beide durch  $O(\exp[\tau|x|^2 - x^2/2])$  für  $|x| \rightarrow \infty$  abgeschätzt werden können ( $\tau > 0, 0 < \varrho < 2$ ), so sind beide von der Form  $\varphi(x) \exp[-x^2/2]$ , wo  $\varphi(x)$  eine ganze Funktion höchstens von der Ordnung  $\varrho$  und von endlichem Typus ist. *G. Doetsch.*

**Teicher, Henry:** On the convolution of distributions. Ann. math. Statistics **25**, 775–778 (1954).

Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Fouriertransformierten an, damit die Verteilungsfunktionen eine Halbgruppe bez. der Faltung bilden; je nachdem, ob die Parameterhalbgruppe (ein- oder mehrdimensional) aus den positiv-ganzen, den positiv-rationalen oder allen positiven Zahlen besteht, ergeben sich die zu erwartenden Formen: beliebige erzeugende Verteilung oder unendlich-zerlegbare Verteilungen; im Falle aller positiven Zahlen tritt dabei wegen der Cauchy-Hamelschen Funktionalgleichung noch eine Stetigkeits- oder Beschränktheitsannahme hinzu. Ist der Parameterbereich etwa durch  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  eingeschränkt, so ist der Satz weniger befriedigend, da keine intrinsische Charakterisierung von  $f_2(t)$  angegeben wird. *D. Morgenstern.*

**Kawata, Tatsuo:** On Fourier-Stieltjes transform. Yokohama math. J. **2**, 73–79 (1954).

$F(x)$  sei eine fest gegebene, absolut stetige, nichtabnehmende Funktion in  $(-\infty, \infty)$ , deren Ableitung  $F'(x) = \Phi(x)$  die Bedingung  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\log \Phi(x)}{1+x^2} \, dx < \infty$  erfüllt. Wenn zu einer in  $[0, \infty)$  definierten Funktion  $K(\theta)$ , die in jedem endlichen

Intervall von beschränkter Variation ist, eine Funktion  $k(x)$  aus  $L_2(F)$ , d. h.

$\int_{-\infty}^{\infty} |k(x)|^2 dF(x) < \infty$ , existiert derart, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^A e^{-ix\vartheta} dK(\vartheta) - k(x) \right|^2 dF(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } A \rightarrow \infty,$$

so heißt  $k(x)$  die Fourier-Stieltjes-Transformierte von  $K(\vartheta)$  bezüglich  $L_2(F)$ . Sie wird in der „prediction theory“ stationärer Prozesse von N. Wiener gebraucht. Verf. leitet eine Umkehrungsformel für diese Transformation ab, aus der hervorgeht, daß  $K(\vartheta)$  durch  $k(x)$  eindeutig bestimmt ist. G. Doetsch.

**Bose, B. N.:** Certain theorems on self-reciprocal functions. Bull. Calcutta math. Soc. 46, 109—127 (1954).

Es werden Sätze vom Typus des folgenden bewiesen: Wenn zwei Funktionen

$q_1(p)$  und  $f(t)$  durch die Integralgleichung  $q_1(p) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) dt}{(t^2 + p^2)^{m+1}}$  ( $m \geq 0$ ) zusammen-

hängen, und wenn  $p^{m+1/2} q_1(p)$  selbstreziprok in der Hankel-Transformation  $m$ -ter

Ordnung ist:  $p^{m+1/2} q_1(p) = \int_0^{\infty} p x J_m(p x) x^{m+1/2} q_1(x) dx$ , so gilt für  $x^{-m-1/2} f(x)$

dasselbe, wenn  $x^{-m-1/2} f(x)$  stetig und absolut integrierbar in  $(0, \infty)$  ist. — Die Sätze werden auf Funktionen von zwei Variablen verallgemeinert. G. Doetsch.

**Zelen, Marvin:** Bounds on a distribution function that are functions of moments to order four. J. Res. nat. Bur. Standards 53, 377—381 (1954).

Durch die Tschebyscheff-Markoff'schen Ungleichungen wird das Problem gelöst, für eine Funktion, deren  $k+1$  erste Momente gegeben sind, die exakten oberen und unteren Grenzen festzustellen. Verf. gibt die expliziten Lösungen für  $k = 2, 3, 4$  an. G. Doetsch.

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Finkbeiner, D. T. e O. M. Nikodým:** On convex sets in abstract linear spaces where no topology is assumed. (Hamel bodies and linear boundedness.) Rend. Sem. mat. Univ. Padova 23, 357—365 (1954).

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension infinie: pour toute base  $L$  de  $E$ , soit  $B(L)$  l'ensemble convexe symétrique engendré par  $L$ ; l'intersection de  $B(L)$  et de toute droite est bornée. Les AA. montrent que si  $L$  est dénombrable, il existe une seconde base  $M$  de  $E$  telle que  $E = B(L) + B(M)$ . Ils prouvent aussi que si  $A$  est un ensemble convexe dans  $E$ , ayant un point interne, il existe une décomposition de  $E$  en somme directe d'un hyperplan  $H$  et d'une droite  $D$  telle que, si  $u$  est l'application linéaire définie par  $u(x) = x$  dans  $D$ ,  $u(x) = -x$  dans  $H$  („symétrie par rapport à  $D$ “), on ait  $A = u(A) \cup D$ . J. Dieudonné.

● **Nagata, Jun-iti:** On uniform topology of functional spaces. J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A 5, 87—95 (1954).

Let  $R$  be a space with uniform structure, where  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$  ( $\mathcal{U}_\alpha = \{U_\alpha(x)\}_{x \in R}$ ) is a uniform neighborhood system for  $R$ . For a bounded real-valued function  $f$  on  $R$  and  $S \subset R$ , let  $[f(S)]$  denote the closed interval  $[\inf_{x \in S} f(x), \sup_{x \in S} f(x)]$ . Let  $C_u(R)$  denote the set of all uniformly continuous real-valued bounded functions on  $R$ . For  $f, g \in C_u(R)$ ,  $x \in R$ , and  $\alpha \in A$ , let  $d_\alpha(g(x), f(x))$  be the number  $\max \{d(g(x), [f(U_\alpha(x))]), d(f(x), [g(U_\alpha(x))])\}$ , where  $d(t, M)$  is the usual distance in the real number system between the point  $t$  and the set  $M$ . Now let  $U_{\alpha, \varepsilon}(f)$  ( $\alpha \in A$ ,  $\varepsilon > 0$ ) be the set of all  $g \in C_u(R)$  such that  $d_\alpha(g(x), f(x)) < \varepsilon$  for all  $x \in R$ . These neighborhoods define a uniform structure on  $C_u$ , called the  $m$ -uniform

topology. This topology is in general stronger than the weak topology and weaker than the usual uniform topology. The main theorem of the present paper asserts that two complete uniform spaces  $R_1$  and  $R_2$  are uniformly homeomorphic if and only if  $C_u(R_1)$  and  $C_u(R_2)$  are connected by a uniform homeomorphism that preserves order. A similar result holds for the space of uniformly continuous functions assuming values in the interval from 0 to 1. *E. Hewitt.*

**Kalugina, E. P.:** Die Klasse  $L_\varphi$  als konvexe Funktionalmannigfaltigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 13—16 (1954) [Russisch].

On introduit dans la classe  $L_\varphi$  d'Orlicz une structure d'ordre avec les convergences correspondantes d'après L. V. Kantorovitch et une  $\varrho$ -convergence, où

$\varrho(x) = \int_0^1 \Phi(x(t)) dt$ . On énonce, dans ces termes, des conditions nécessaires et suffisantes afin que  $L_\varphi$  soit un espace linéaire (par exemple l'équivalence entre la  $\varrho$ -convergence et la convergence topologique donnée par l'ordre, ou la continuité de  $\varrho$  avec sa convergence) et quelques propriétés des fonctionnelles linéaires. *G. Marinescu.*

**Evgrafov, M. A.:** Die Vollständigkeit benachbarter Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 525—526 (1954) [Russisch].

Eine Folge  $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  eindeutiger analytischer Funktionen auf einem Bereich  $D$  in der komplexen Ebene heißt vollständig, wenn jede Funktion  $f$ , die analytisch in  $D$  ist, eine Entwicklung  $f(z) = \sum a_n \Phi_n$  zuläßt, wobei die Reihe gleichmäßig auf jeder kompakten Untermenge von  $D$  konvergiert. Einige Sätze werden ohne Beweis angekündigt, die Methoden ergeben, wie man von einem vollständigen System neue solche Systeme erhalten kann. Die folgenden zwei Sätze sind typisch. 1.  $\{\Phi_n(z)\}$  sei vollständig;  $M_n = \max_{z \in \bar{D}} |\Phi_n(z)|$ ;  $(\alpha_{n,k})_{n,k=0}^\infty$  habe die Eigenschaft, daß

$\sup_{0 \leq n < \infty} \sum_{k=0}^\infty |\alpha_{n,k}| \frac{M_k}{M_n} < 1$ . Dann ist das System  $\Phi_n^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_{n,k} \Phi_k(z) + \Phi_n(z)$  auch vollständig. 2.  $L$  sei ein linearer Operator in dem Raum aller analytischen Funktionen auf  $D$ , der stetig in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Untermengen von  $D$  ist und eine Umkehrung mit derselben Eigenschaft besitzt. Wenn  $\{\Phi_n(z)\}$  vollständig ist, so ist es auch  $\{L(\Phi_n(z))\}$ . Beispiele solcher Operatoren werden gegeben, wie auch Beispiele einiger vollständiger Systeme. *E. Hewitt.*

**Tillmann, Heinz-Günther:** Dualität in der Potentialtheorie. Portugaliae Math. **16**, 455—486 (1954).

Soit  $M$  une partie de l'espace  $R^m$  (espace numérique de dimension  $m$  complété par adjonction d'un point à l'infini), et soit  $\mathfrak{P}(M)$  l'espace des classes de fonctions dont chacune est harmonique dans un voisinage de  $M$ , deux fonctions appartenant à la même classe si elles coïncident dans un voisinage de  $M$  où elles sont toutes deux définies (le concept de „fonction harmonique dans un ensemble ouvert  $\Omega$ “ doit être entendu de la façon suivante lorsque  $\Omega$  contient le point  $\infty$ : la fonction est harmonique en tout point de  $\Omega$  distinct de  $\infty$ , et est  $o(|x|^{-1})$  et a ses dérivées premières  $o(|x|^{-2})$ , où  $|x|$  est la norme euclidienne). L'A. définit sur  $\mathfrak{P}(M)$  une topologie en suivant la méthode maintenant bien connue, appliquée par plusieurs auteurs pour l'espace des classes de fonctions holomorphes au voisinage d'une partie de la sphère de Riemann (voir p. ex. A. Grothendieck, ce Zbl. **51**, 87). Il montre entre autres que le dual de  $\mathfrak{P}(M)$  pour cette topologie est alors  $\mathfrak{P}(CM)$ , et caractérise la topologie de dual fort sur ce dernier espace; il indique aussi comment peuvent s'obtenir de façon „concrète“ les applications linéaires continues de  $\mathfrak{P}(M)$  dans un espace localement convexe. *J. Dieudonné.*

**Deny, Jacques et Jacques Louis Lions:** Espaces de Beppo Levi et applications. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1174—1177 (1954).

This note states certain results relative to certain subspaces of the space  $\mathcal{D}'_\Omega$  of the distributions on an open set  $\Omega \subset R^n$ . These subspaces, called spaces of Beppo



Levi, have important properties whose applications to the theory of potentials and to certain boundary value problems have been investigated by the authors. If  $BL_m(E)$  denotes the space of the distributions  $T$  on  $\Omega$  such that  $D^\mu T$  lies for  $|p| = m$  in a subspace  $E$  of  $D'_\Omega$  which must be separated and complete and if  $BL_m(E)$  is topologized by the weakest locally convex topology such that the mapping  $T \rightarrow D^\mu T$  be continuous, then there exists a separated space  $BL'_m(E)$  associated with  $BL_m(E)$  and this space is complete. The particular case of  $m = 1$  and  $E = L^2$  is then considered and it is shown that it can be topologized so as to become a Hilbert space. It is stated that every distribution belonging to  $BL(\Omega)$  is of the form  $u = h$  with  $h \in BL(\Omega)$  and  $\Delta h = 0$ . The distribution  $u$  may be determined by means of the Green function of  $\Omega$ . The note concludes with a few remarks on the Neumann problem. Detailed results will be shortly published in the Annales de l'Institut Fourier.

C. Racine.

Arens, Richard and I. M. Singer: Function values as boundary integrals. Proc. Amer. math. Soc. 5, 735—745 (1954).

$S$  sei ein topologischer Raum,  $H$  eine Klasse reell- oder komplexwertiger beschränkter stetiger Funktionen auf  $S$ . Wenn es einen minimalen Unterraum  $F \subset S$  gibt mit den Eigenschaften, daß 1.  $F$  abgeschlossen ist und 2. jede Funktion  $h \in H$  auf  $F$  den Wert  $\sup_{s \in S} h(s)$  annimmt, dann heißt  $F$  der Šilovsche Rand  $\hat{c}_H$  von  $S$

in bezug auf  $H$ . [Siehe hierzu die Arbeit von Gelfand, Raikov, und Šilov. Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 2, 48—146 (1946)]. Satz:  $S$  und  $H$  seien wie oben. Unter den Voraussetzungen a)  $h, j \in H \Rightarrow h \cdot j \in H$ ; b)  $\varepsilon > 0$  und  $h \in H \Rightarrow$  die Menge  $\{s: h(s) \geq \varepsilon\}$  ist kompakt; c) jeder Punkt von  $S$  läßt eine offene Basis der Mengen  $\{s: h_1(s) < \varepsilon, \dots, h_n(s) < \varepsilon\}$  zu, existiert  $\hat{c}_H S$ . Verf. beschreiben den Rand  $\hat{c}_H S$  für einige Fälle und wenden diesen Begriff auf einige bekannte Probleme in der Funktionalanalysis an. Wir weisen auf das folgende Beispiel hin.  $S$  sei ein topologischer Raum und  $H$  eine Klasse nicht-negativer stetiger reeller Funktionen auf  $S$  mit folgenden Eigenschaften: a)  $h, j \in H \Rightarrow h \cdot j \in H$ ; b) jedes Element von  $H$  erreicht sein Maximum auf einer bestimmten kompakten Menge  $B \subset S$ ; c) es gibt ein Element  $k \in H$ , so daß  $k(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , für alle  $x \in B$ . Dann gibt es, für jedes  $s \in S$ , ein reguläres Bairesches Maß  $m_s$  auf  $B$ , so daß

$$\log g(s) = \int_B \log g(x) dm_s(x)$$

für alle  $g \in H$ , für welche  $g^{-1} \in H$ .

E. Hewitt.

Norguet, François: Produit tensoriel et produit de composition des courants. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 667—669 (1954).

Verf. verallgemeinert Tensor- und Kompositionsprodukte (bekannt für Distributionen) auf Courants (G. de Rham-K. Kodaira, Harmonic Integrals, Princeton 1950). I. Für das Tensorprodukt (direktes Pr.) wird eine funktionale Definition gegeben: Sind  $S, T$  Courants der Dimensionen  $p, q$  auf Mannigfaltigkeiten  $M, N$ , so ist  $S \otimes T$  ein Courant der Dimension  $p + q$  auf  $M \times N$  und stimmt im Falle von Differentialformen mit dem äußeren Produkt überein. II. Für  $M = N = R^m$  wird das Tensorprodukt zur Definition des Kompositions-Produktes  $S * T$  benutzt. Sind  $S, T$  Courants der Grade  $p, q$ , von denen wenigstens einer kompakten Träger hat, so ist  $S * T$  ein Courant des Grades  $p + q$  im  $R^m$ . Es gilt:  $(S * T) * U = S * (T * U)$ ,  $S * T = (-1)^{pq} T * S$ ,  $\delta * T = T$ ,  $d\delta * S = dS$  [ $\delta$  ist definiert durch  $\delta \cdot f(x) dx^1 \dots dx^m = f(0)$ ]. III. Kompositionsprodukt und adjungiertes Kompositionsprodukt  $S * T = (*(*S * T))$  werden angewandt auf analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen und u. a. Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes und eines Resultats von E. Martinelli (dies. Zbl. 28, 152) gewonnen.

H. G. Tillmann.

Goldhaber, J. K. and E. S. Wolk: Maximal ideals in rings of bounded continuous functions. Duke math. J. 21, 565—569 (1954).

Es sei  $A$  ein (nicht notwendig kommutativer) topologischer Körper. In bekannter Weise kann dann in  $A$  ein Beschränktheitsbegriff erklärt werden. Ist weiter  $X$  ein topologischer Raum, so bedeute  $C^*(X, A)$  den Ring aller beschränkten stetigen Abbildungen von  $X$  in  $A$  [Abbildungen  $f$ , für die  $f(X)$  beschränkt ist]. Ist  $A$  der Körper der reellen Zahlen und  $X$  vollständig regulär, so hat Stone bewiesen (dies. Zbl. 17, 135), daß für jedes maximale Ideal  $M$  in  $C^*$  der Restklassenring  $C^*/M$  isomorph zu den reellen Zahlen ist. Verff. behandeln die von Kaplansky aufgeworfene Frage, ob dieser Sachverhalt auch im allgemeinen Fall zutrifft, und zeigen, daß dies im allgemeinen zu verneinen ist. Zu diesem Zweck sei  $A$  ein  $V$ -topologischer Körper im Sinne von Kaplansky (dies. Zbl. 30, 10) und  $X$  ein nicht kompakter, in einem geeigneten Sinne bezüglich  $A$  vollständig regulärer Raum. Verff. konstruiert dann in  $C^*(X, A)$  maximale Ideale  $M$  mit folgender Eigenschaft:  $C^*/M$  ist dann und nur dann isomorph zu  $A$ , wenn  $A$  lokal-kompakt ist. — Der Beweis stützt sich auf einen Hilfssatz, dessen Aussage jedoch falsch ist (Gegenbeispiel vorhanden). Dennoch kann er durch eine geeignete Modifikation berichtigt werden. Die von Verff. angegebene Definition der vollständigen Regularität bezüglich  $A$  ist, von wenigen Spezialfällen abgesehen, leer. Auf die Voraussetzung dieser Eigenschaft kann jedoch verzichtet werden. Der Begriff „kompakt“ wird von Verff. stets im Sinne von „Folgen-kompakt“ benutzt. Hinsichtlich der Beseitigung dieser Einschränkungen und der Beantwortung einiger offener Fragen vgl. die Arbeit des Referenten „Stonesche Körper und ein Überdeckungssatz“ [Math. Nachr. 14, 57—64 (1955)].

H.-J. Kowalsky.

Waelbroeck, L.: Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 33, 147—186 (1954).

Sei  $A$  eine lokalkonvexe, separierte, kommutative Algebra mit Einselement über dem Körper der komplexen Zahlen. Für  $a \in A$  definiert Verff. das Spektrum  $\text{sp}(a)$  als Teilmenge der Riemannschen Kugel:  $s_0 \in \text{sp}(a)$ , wenn es eine Umgebung  $V(s_0)$  gibt, so daß  $(a - s)^{-1}$  existiert für jedes  $s \in V$  ( $s \neq s_0$ ) und die Menge dieser  $(a - s)^{-1}$  beschränkt ist.  $\text{sp}(a)$  ist das Komplement des Holomorphiegebietes von  $(a - s)^{-1}$  (Theorem 3). Verff. nennt  $a$  regulär, wenn  $\infty \in \text{sp}(a)$  und definiert das Spektrum eines Systems endlich vieler regulärer Elemente:  $(s_1, \dots, s_n) \in \text{sp}(a_1, \dots, a_n)$  wenn für jedes Polynom  $p(z_1, \dots, z_n)$ , für das  $\{p(a_1, \dots, a_n)\}^{-1}$  existiert und regulär ist,  $p(s_1, \dots, s_n) = 0$  gilt (für  $n = 1$  äquivalent zur 1. Def.).  $\text{sp}(a_1, \dots, a_n)$  ist kompakt und rationalkonvex im Sinne von H. Cartan-P. Thullen (dies. Zbl. 4, 357). Ist  $D_k$  beschränkte Umgebung von  $\text{sp}(a_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) und  $D = D_1 \times \dots \times D_n$ , so vermittelt die Cauchysche Integralformel

$$f(z_1, \dots, z_n) = (2\pi i)^{-n} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_n} f(s_1, \dots, s_n) (s_1 - z_1)^{-1} \dots (s_n - z_n)^{-1} ds_1 \dots ds_n$$

eine stetige Darstellung (Prop. 3)

$$f \rightarrow u(f) = (2\pi i)^{-n} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_n} f(s_1, \dots, s_n) (s_1 - a_1)^{-1} \dots (s_n - a_n)^{-1} ds_1 \dots ds_n [= f(a)]$$

der Algebra  $H(D)$  der in  $D$  holomorphen Funktionen in  $A$ , wobei  $z_k$  auf  $a_k$  und die Konstante 1 auf das Einselement von  $A$  abgebildet wird [ $H(D)$  mit Topologie der gleichmäßigen Konvergenz im Innern von  $D$ ]. Unter Benutzung von Ergebnissen von H. Cartan [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 61, 149—197 (1944); Bull. Soc. math. France 58, 29—64 (1950)] und K. Oka [Bull. Soc. math. France 58, 1—28 (1950)] über Ideale analytischer Funktionen mehrerer Variablen zeigt Verff., daß diese Darstellung fortgesetzt werden kann zu einer stetigen Darstellung der Algebra  $H(\text{sp}(a_1, \dots, a_n))$  aller auf  $\text{sp}(a_1, \dots, a_n)$  analytischen Funktionen.  $H(S)$  mit Topologie von G. Köthe (dies. Zbl. 50, 335), L. van Hove (dies. Zbl. 52, 87).  $f(a_1, \dots, a_n)$  wird definiert für alle auf  $\text{sp}(a_1, \dots, a_n)$  analytischen Funktionen und kann explizit mit Hilfe der A. Weilschen Integralformel (dies. Zbl. 11, 123) erhalten werden.

H. G. Tillmann.

**Waelbroeck, Lucien:** Les algèbres à inverse continu. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 640—641 (1954).

Verf. nennt eine lokalkonvexe, separierte, vollständige, kommutative komplexe Algebra  $A$  mit 1-Element „algèbre à inverse continu (à i. e.)“, wenn eine Umgebung von 1 aus invertierbaren Elementen existiert und  $a \rightarrow a^{-1}$  für  $a \rightarrow 1$  stetig ist. I. Ist  $s$  ein maximales Ideal in einer Algebra  $A$  (à i. e.), so ist  $A/s$  der Körper der komplexen Zahlen. Das Spektrum  $\text{Sp}(a)$  für alle  $a \in A$  ist eine nichtleere, kompakte Menge von komplexen Zahlen. Ist  $N$  ein vollständiges System von Halbnormen, so ist die „Spektralnorm“  $h(a) = \sup_{n \in N} \lim_{r \rightarrow \infty} [n(a^r)]^{1/r} = \max_{z \in \text{Sp}(a)} |z|$  eine stetige Halbnorm in  $A$  mit  $h(ab) \leq h(a) \cdot h(b)$ . Diese Resultate gestatten dem Verf. die Übertragung wichtiger Ergebnisse von Gelfand [Mat. Sbornik, n. Ser. 9(51), 3—24 (1941)] über Banachalgebren auf Algebren à i. e. II. Die von E. R. Lorch [Trans. Amer. math. Soc. 54, 414—425 (1943)] für Funktionen in Banachalgebren definierten Begriffe der Ableitung und Holomorphie werden auf Funktionen in lokalkonvexen Algebren verallgemeinert und der vom Verf. entwickelte symbolische Kalkül (vorsteh. Referat) wird zur Herleitung von Sätzen über im Sinne von Lorch holomorphe Funktion in einer Algebra à i. e. benutzt.

H. G. Tillmann.

**Ogasawara, Tōzō and Kyōichi Yoshinaga:** Weakly completely continuous Banach \*-algebras. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 18, 15—36 (1954).

Les AA. obtiennent de nombreuses relations entre les notions suivantes: \*-algèbres de Banach,  $A^*$ -algèbres (au sens de Rickart, ce Zbl. 37, 200); \*-algèbres de Banach satisfaisant à  $(\beta_k)$ :  $x^*x \leq k \cdot x^*x$ ;  $B^*$ -algèbres; algèbres duales (au sens de Kaplansky, ce Zbl. 31, 344); w. c. c., resp. c. c. algèbres), c'est-à-dire algèbres dans lesquelles les multiplications à droite et à gauche sont faiblement complètement continues (resp. complètement continues); algèbres semi-simples et fortement semi-simples. Exemples de résultats: Théorème 8: soit  $A$  une \*-algèbre de Banach satisfaisant à  $(\beta_k)$ ; pour que  $A$  soit w. c. c., il faut et il suffit que  $A$  soit duale. Théorème 9: soit  $A$  une \*-algèbre de Banach c. c., les conditions suivantes sont équivalentes: (i)  $A$  est semi-simple et  $x^*x = 0 \Rightarrow x = 0$ ; (ii)  $A$  est une sous-algèbre dense d'une  $B^*$ -algèbre c. c.; (iii)  $A$  est une  $A^*$ -algèbre. Théorème 11: soit  $A$  une  $A^*$ -algèbre c. c. et duale; tout idéal à droite fermé est l'intersection des idéaux à droite maximaux réguliers le contenant. Théorème 14: toute  $A^*$ -algèbre duale a une norme auxiliaire unique (à une équivalence près) et est une sous-algèbre dense d'une  $B^*$ -algèbre duale qui est uniquement déterminée à un \*-isomorphisme près.

J. Dixmier.

**Wright, Fred B.:** A reduction for algebras of finite type. Ann. of Math., II. Ser. 60, 560—570 (1954).

Soient  $A$  une AW\*-algèbre,  $L$  la lattice des projecteurs de  $A$ . Un sous-ensemble  $I$  de  $L$  est appelé  $p$ -idéal de  $L$  si: 1.  $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$ ; 2.  $a \in I, b \leq a \Rightarrow b \in I$ ; 3.  $a \in I, b \sim a \Rightarrow b \in I$ . Théorème: l'application  $J \rightarrow J \cap L$  définit une correspondance biunivoque entre les idéaux bilatères fermés de  $A$  et les  $p$ -idéaux de  $L$ . De là, l'A. déduit par exemple que  $A$  est faiblement central au sens de Misonou (ce Zbl. 48, 94). — Soit  $A$  une AW\*-algèbre de type II munie d'une trace à valeurs dans le centre de  $A$ ; soit  $M$  un idéal bilatère maximal de  $A$ ; alors  $A/M$  est un AW\*-facteur de type II muni d'une trace. — Soit  $A$  une AW\*-algèbre finie de type I,  $X$  l'espace des idéaux bilatères maximaux de  $A$ . Il existe une partie  $X_0$  de  $X$ , rare mais en général non vide, telle que pour  $M \in X_0$ ,  $A/M$  soit un AW\*-facteur de type II<sub>1</sub>. Dans une note de bas de page, l'A. signale que, grâce à un résultat de Goldman, ceci fournit de nouveaux exemples de W\*-facteurs de type II<sub>1</sub>.

J. Dixmier.

**Feldman, Jacob and Richard V. Kadison:** The closure of the regular operators in a ring of operators. Proc. Amer. math. Soc. 5, 909—916 (1954).



Let  $\mathfrak{H}$  be a weakly closed self-adjoint algebra of operators on a Hilbert space  $\mathfrak{H}$ . Let  $r(A)$  and  $n(A)$  denote the closure of the range and the null space, respectively, of  $A$ , and let the same symbol be used to denote both a closed subspace and the orthogonal projection on to it. The author characterizes the uniform closure  $\overline{\mathfrak{G}}$  of the set of regular elements of  $\mathfrak{H}$  as follows.  $\overline{\mathfrak{G}}$  consists of those operators  $A$  in  $\mathfrak{H}$  such that, for each  $\varepsilon > 0$ , there exists a projection  $E \in \mathfrak{H}$  such that  $E$  contains  $n(A)$ ,  $\|AE\| < \varepsilon$ , and  $E$  is equivalent in  $\mathfrak{H}$  to  $\mathfrak{H} - r[A(I - E)]$ . If  $\mathfrak{H}$  is a factor on a separable  $\mathfrak{H}$ , the theorem takes a simpler form. An operator  $A$  in  $\mathfrak{H}$  is outside  $\overline{\mathfrak{G}}$  if and only if there exists a constant  $k > 0$  such that  $\|Ax\| \geq k$  for each unit vector  $x$  in the orthogonal complement of  $n(A)$ , and the dimension of  $n(A)$  differs from the dimension of  $\mathfrak{H} \ominus r(A)$ . Examples are given to illustrate the complications that may occur in a general  $C^*$ -algebra. F. F. Bonsall.

**Wood, Bertram:** Difference algebras of linear transformations on a Banach space. *Pacific J. Math.* **4**, 615—637 (1954).

$\mathfrak{X}$  sei ein unendlichdimensionaler Banachscher Raum,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X})$  die Banachsche Algebra aller beschränkten linearen Transformationen von  $\mathfrak{X}$  in oder auf sich selbst,  $\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$  sei das (abgeschlossene zweiseitige) Ideal aller vollstetigen Elemente von  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X})$ . Das Radikal einer Banachschen Algebra sei in dem Sinne von Hille (dies. Zbl. **33**, 56, p. 476) definiert. Dann ist bekanntlich  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X})$  halbeinfach, dagegen kann  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}) - \mathfrak{N}(\mathfrak{X})$  ein Radikal  $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{X})$  ungleich Null besitzen.  $\pi$  sei der kanonische Homomorphismus von  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X})$  auf  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}) - \mathfrak{N}(\mathfrak{X})$ ; dann gilt der folgende Satz:  $\pi^{-1}(\mathfrak{P}_1(\mathfrak{X}))$  ist die Menge aller  $T \in \mathfrak{G}(\mathfrak{X})$  mit der Eigenschaft, daß  $(T - T_1)(\mathfrak{X})$  abgeschlossen und  $(T + U)^{-1}(0)$  endlichdimensional ist für alle  $T \in \mathfrak{G}(\mathfrak{X})$ , die Inverse haben. Verf. untersucht auch die Abbildung  $\pi$  für die Klassen von Elementen in  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X})$ , die (links-, rechts-, zweiseitige) Inverse haben. Schließlich gibt Verf. einen neuen Beweis eines Satzes von Atkinson (dies. Zbl. **32**, 120). E. Hewitt.

**Najmark, M. A.:** Über die irreduziblen linearen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **97**, 969—972 (1954) [Russisch].

$\mathfrak{G}$  sei eine lokal kompakte Gruppe,  $R$  ein reflexiver komplexer Banachscher Raum,  $R'$  der duale Raum von  $R$ . Eine lineare Darstellung von  $\mathfrak{G}$  in  $R$  ist bekanntlich eine Abbildung  $g \mapsto T_g$  mit den folgenden Eigenschaften: 1.  $T_g$  ist ein beschränkter linearer Operator auf  $R$  für jedes  $g \in G$ ; 2.  $T_e = I$ , wobei  $e$  die Einheit von  $G$  und  $I$  der Identitätsoperator ist; 3.  $T_{gh} = T_g T_h$  für alle  $g, h \in G$ ; 4.  $f(T_g \xi)$  ist stetig in  $g$  für jedes  $\xi \in R$  und  $f \in R'$ . Verf. führt eine neue Definition der Äquivalenz linearer Darstellungen  $g \mapsto T_g$  und  $g \mapsto T'_g$  auf  $R'$  bzw.  $R''$  ein, nämlich:  $T'_g$  und  $T''_g$  sind dann und nur dann äquivalent, wenn ein abgeschlossener linearer Operator  $A$  von einem dichten Unterraum  $\mathfrak{D}_A \subset R'$  auf einen dichten Unterraum  $A(\mathfrak{D}_A) \subset R''$  mit folgenden Eigenschaften existiert: 5. wenn  $\xi \in \mathfrak{D}_A$  und  $\xi \neq 0$ , dann ist  $A\xi \neq 0$ ; 6. für  $\xi \in \mathfrak{D}_A$  und  $g \in \mathfrak{G}$ , ist  $T'_g \xi \in \mathfrak{D}_A$  und  $A T'_g \xi = T''_g A \xi$ . Eine Operatorenmenge auf  $R$  heißt vollständig irreduzibel (nach Godement), wenn jeder beschränkte lineare Operator auf  $R$  der schwache Limes einer Folge dieser Menge ist.  $L(\mathfrak{G})$  bezeichne die Menge aller stetigen komplexen Funktionen auf  $\mathfrak{G}$ , die außerhalb gewisser kompakter Mengen null sind. Die Darstellung  $g \mapsto T_g$  heißt vollständig irreduzibel, wenn die Operatoren  $T_x = \int_{\mathfrak{G}} x(g) T_g dg$  ( $x \in L(\mathfrak{G})$ ) eine vollständig irreduzible Menge bilden. Verf. beschreibt hier, bis zur Äquivalenz, alle vollständig irreduziblen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe, oder genauer, der Gruppe aller komplexen  $(2 \times 2)$ -Matrizen mit Determinante eins. Die Methode läßt eine Verallgemeinerung zu, um alle solche Darstellungen einer willkürlichen halbeinfachen komplexen Liegruppe zu erreichen. Die Konstruktion ist zu kompliziert, um sie hier wiederzugeben. Die Beweisidee ist skizziert. Vorher haben Verf. und I. M. Gelfand alle unitären Darstellungen dieser Gruppe, bis zur Unitäräquivalenz, gefunden (dies. Zbl. **37**, 153). Siehe hierzu auch die Arbeit von denselben Verff., dies. Zbl. **41**, 362. E. Hewitt.

● **Schmeidler, W.:** *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum.* (Teubners mathematische Leitfaden. Band 46.) Stuttgart: Teubner Verlagsgesellschaft 1954. VI, 90 S. DM 7,80.

Ce petit volume présente un exposé didactique succinct et clair de la théorie de l'espace de Hilbert et de ses opérateurs linéaires; il est adressé surtout aux étudiants de mathématique, physique, sciences naturelles et celles de l'ingénieur. Les applications ne sauraient donc être oubliés: le lecteur est orienté vers celles-ci à travers les exercices et suppléments qui occupent le dernier paragraphe de chaque chapitre; mais cette idée est aussi présente dans le relief donnée à certains sujets, notamment aux opérateurs totalement continus et aux théorèmes de Fredholm, souvent négligés dans les exposés élémentaires de la théorie des espaces de Hilbert. Le chapitre I traite de la définition et des propriétés fondamentales des espaces de Hilbert. Dans le chapitre II on trouve la théorie des opérateurs linéaires, les opérateurs totalement continus étant l'objet d'une étude soignée; une démonstration nouvelle des théorèmes de Fredholm et une propriété caractéristique des opérateurs totalement continus sans valeurs propres doivent être signalées. Les opérateurs de projection sont introduits au chapitre III, qui est occupé par la théorie spectrale des opérateurs hermitiques et normaux bornés: la représentation spectrale des opérateurs hermitiques non bornés est aussi considéré, en particulier celle des opérateurs demi-bornés.

*A. Pereira Gomes.*

**Julia, Gaston:** *Sur une propriété caractéristique des produits de deux symétries.* *Studies Math. Mech.*, presented to Richard von Mises, 36—39 (1954).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Produkte von symmetrischen Abbildungen (Symmetrien) in einem Hilbertschen (oder auch euklidischen) Raum  $H$  zu charakterisieren. Verf. führt zunächst mit einer Symmetrie  $S$  (dargestellt durch eine isometrische, hermitesche Transformation) den Symmetrie-Unterraum  $V$  als Menge der bez.  $S$  invarianten  $x \in H$  ein und gewinnt gewisse damit verbundene Resultate. — (\*) Seien nun  $S_1, S_2$  zwei Symmetrien, bzw. auf die Unterräume  $V_1$  und  $V_2$  bezogen,  $V_i = H \ominus V_i$  ( $i = 1, 2$ ) und  $V = S_1 S_2$ . Typische, vom Verf. gewonnene Resultate sind dann:

- $U = U^*$  läßt  $V_i$  und  $V_j$  unverändert ( $i = 1, 2$ ),  $V = U^*$  permutiert  $V_i$  und  $V_j$  ( $i = 1, 2$ )
  - $(U = U^*)$  und  $S_i$  sind permutabel ( $i = 1, 2$ ),  $(U = U^*)$  und  $S_i$  sind antipermutabel ( $i = 1, 2$ ), d. h. es gilt  $S_i(U = U^*) = -(U = U^*)S_i$  ( $i = 1, 2$ ).
- Verf. zeigt ferner, daß die miteinander äquivalenten Eigenschaften a) und b) charakteristisch dafür sind, daß eine unitäre Transformation darstellbar ist als Produkt zweier Symmetrien. In anschließenden Betrachtungen werden zunächst gewisse Spezialfälle studiert. Die unter (\*) erzielten und noch verschärften Resultate geben schließlich Anlaß zur Untersuchung der durch zwei nicht vertauschbare Symmetrien  $S_1$  und  $S_2$  erzeugten Gruppe.

*H. Pachale.*

**Fullerton, R. E.:** *The representation of linear operators from  $L^p$  to  $L$ .* *Proc. Amer. math. Soc.* **5**, 689—696 (1954).

Soit  $A(R, q)$  l'espace des fonctions d'ensemble complètement additives et absolument continues, définies sur  $R$  avec la mesure  $q$  et soient  $L^p(R, q)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) les espaces connus correspondants. L'A. définit les espaces  $V^p(R, q)$  à  $p$ -variation bornée et démontre qu'ils sont isomorphes et isométriques aux  $L^p(R, q)$  pour  $1 \leq p < \infty$ . Basé sur cette équivalence et sur le théorème de Radon-Nikodym, il démontre que les opérateurs linéaires et continus de  $L^p(R, q)$  à  $A(S, p)$  sont de la forme  $Tx = \int_R K(e, t) x(t) dq$ ,  $K$  satisfaisant aux conditions habituels et que les opérateurs linéaires et continus de  $L^p(R, q)$  à  $L(S, p)$  sont de la forme

$$\frac{d}{de} \int_R K(e, t) x(t) dq.$$

*G. Marinescu.*

**Krasnosel'skij, M. A. und L. A. Ladyženskaja: Bedingungen für die Vollstetigkeit des im Raume  $L^p$  operierenden Operators von P. S. Urysohn.** Trudy Moskovsk. mat. Obšč. **3**, 307—320 (1954) [Russisch].

P. S. Urysohn hat die nichtlinearen Operatoren  $K\Phi(x) = \int_G K(x, y, \Phi(y)) dy$  betrachtet [Mat. Sbornik **31**, 235—254 (1923)], wobei  $G$  eine beschränkte meßbare Menge in  $R^n$  und  $K$  stetig ist. Es handelt sich hier um hinreichende Bedingungen dafür, daß  $K$  ( $K$  nicht notwendig stetig) den Raum  $L^{p_1}(G)$  in den Raum  $L^{p_2}(G)$  ( $p_1, p_2 > 1$ ) abbilde und vollstetig sei. Der Hauptsatz lautet folgendermaßen: Die Funktion  $K = K(x, y, u)$  sei auf  $G \times G \times ]-\infty, \infty[$  ( $x, y \in G, -\infty < u < \infty$ ) definiert und erfülle die folgenden Bedingungen: a) Für fast alle  $(x, y) \in G \times G$  ist  $K(x, y, u)$  stetig in  $u$ . b) Für alle beschränkten meßbaren Funktionen  $\psi(x, y)$  gilt die Ungleichung  $\int_{G \times G} |K(x, y, \psi(x, y))|^p dx dy < \infty$ . c) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , so daß aus der Ungleichung  $\text{mes } E < \delta, E \subset G$ , die Ungleichung

$$\left\{ \int_G \left[ \int_E |K(x, y, \Phi(y))| dy \right]^{p_2} dx \right\}^{1/p_2} < \varepsilon$$

folgt für alle Funktionen  $\Phi(y)$ , die in der Einheitskugel des Raumes  $L^{p_1}(G)$  liegen. Dann bildet der Operator  $K$  den Raum  $L^{p_1}(G)$  in den Raum  $L^{p_2}(G)$  ab und ist vollstetig.

*E. Hewitt.*

**Krasnosel'skij, M. A. und L. A. Ladyženskaja: Die Struktur des Spektrums positiver inhomogener Operatoren.** Trudy Moskovsk. mat. Obšč. **3**, 321—346 (1954) [Russisch].

Die Ideen von Krein und Rutman (dies. Zbl. **30**, 129) über lineare Operatoren in einem halbgeordneten Banachschen Raum  $E$  finden hier Anwendungen auf das Problem der Existenz von Eigenvektoren gewisser nichtlinearer Operatoren in  $E$  und der Beschreibung des Spektrums solcher Operatoren. Die wichtigsten Beispiele sind die Urysohnschen Operatoren (s. vorstehend. Referat). Die verschiedenen Voraussetzungen und Resultate sind zu kompliziert, um hier wiedergegeben zu werden.

*E. Hewitt.*

**Köthe, Gottfried: Zur Theorie der kompakten Operatoren in lokalkonvexen Räumen.** Portugaliae Math. **13**, 97—104 (1954).

L'A. examine diverses généralisations du théorème bien connu de Schauder relatif aux espaces de Banach, d'après lequel, pour qu'une application linéaire  $u$  d'un espace de Banach  $E$  dans un espace de Banach  $F$  soit compacte, il faut et il suffit que sa transposée (considérée comme application de l'espace de Banach  $F'$  dans l'espace de Banach  $E'$ ) le soit. Cet énoncé est encore valable lorsque  $E$  et  $F$  sont des espaces de Montel ( $E'$  et  $F'$  étant munis de la topologie forte). Dans le cas général où  $E$  et  $F$  sont des espaces localement convexes séparés quelconques, la généralisation de l'A. est la suivante: soit  $\mathfrak{M}$  un ensemble saturé de parties convexes équilibrées et faiblement compactes de  $E'$ ,  $\mathfrak{N}$  un ensemble saturé de parties bornées équilibrées de  $F$ ,  $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$  la topologie sur  $E$  ayant pour voisinages de 0 les polaires des ensembles de  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$  la topologie sur  $F'$  ayant pour voisinages de 0 les polaires des ensembles de  $\mathfrak{N}$ . Pour tout  $A \in \mathfrak{M}$  (resp.  $B \in \mathfrak{N}$ ) soit  $E'_A$  (resp.  $F_B$ ) le sous-espace de  $E'$  (resp.  $F$ ) engendré par  $A$  (resp.  $B$ ) et muni de la norme égale à la jauge de  $A$  (resp.  $B$ ). Dans ces conditions, l'A. dit qu'une application  $u$  de  $E$  dans  $F$  est  $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{N})$ -précompacte s'il existe un voisinage de 0 pour  $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$  appliqué par  $u$  sur un ensemble contenu dans un  $F_B$  et précompact pour la topologie d'espace normé de  $F_B$ . Il prouve alors que, pour que  $u$  soit  $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{N})$ -précompacte, il faut et il suffit que  $'u$  soit  $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{M})$ -précompacte. En particulier, si  $E$  et  $F$  sont des espaces de Fréchet et si  $u$  est compacte,  $'u$  est compacte (pour les topologies fortes sur  $F'$  et  $E'$ ), mais la réciproque n'est



pas exacte, comme le prouve un contre-exemple. (Note du Réf.: plus généralement, la même méthode montre que si  $E$  est quelconque,  $F$  métrisable,  $u$  une application précompacte de  $E$  dans  $F$ , alors  $u$  est précompacte pour les topologies fortes de  $F'$  et  $E'$ .) L'A. termine par deux extensions faciles de théorèmes récents de L. Schwartz (ce Zbl. 50, 333).

J. Dieudonné.

Hille, Einar: Sur un théorème de perturbation. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 13, 169—184 (1954).

Soit  $\mathfrak{M}$  l'algèbre de Markoff, c'est-à-dire l'ensemble des matrices infinies  $B = (b_{jk})$  telles que  $\sup_j \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} = B < \infty$ , les opérations algébriques étant définies comme d'habitude. On étudie l'équation différentielle de Kolmogoroff  $Z'(t) = Z(t)A$  ( $t \geq 0$ ) où  $A = (a_{jk})$  est une matrice infinie „de type  $K$ “ (de Kolmogoroff), c'est-à-dire que  $a_{jk} \geq 0$  ( $k \neq j$ ),  $a_{jj} \leq 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 0$ . La solution  $Z(t)$  est cherchée notamment dans  $\mathfrak{M}$ , et au sens fort, c'est-à-dire qu'on exige que, pour chaque  $t \geq 0$ , on ait  $Z(t) \in \mathfrak{M}$ ,  $Z(t)A \in \mathfrak{M}$ , et

$$\|h^{-1}[Z(t+h) - Z(t)] - Z(t)A\| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Le problème est si ses valeurs „initiales“ (pour  $t \rightarrow 0$ ) déterminent-elles la solution d'une manière univoque, ou, ce qui revient au même, s'il existe une solution  $Z(t) \equiv 0$  pour laquelle  $Z(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow 0$ : telle solution est dite „fortement nulle“. — On démontre le théorème suivant. Soit  $U$  une matrice triangulaire de type  $K$  ( $u_{jk} = 0$  pour  $j < k$ ), et supposons que l'équation  $Z'(t) = Z(t)U$  admet une solution au sens fort, fortement nulle, telle que (1)  $z_{jk}(t) \geq 0$ , (2)  $Z'(t)$  est continue au sens fort pour  $0 \leq t < \infty$ , (3)  $Z(t)$  est „de type normal  $\omega$ “, c'est-à-dire que  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|Z(t)\| = \omega < \infty$ . Alors, quel que soit  $V \in \mathfrak{M}$ , l'équation  $Z'(t) = Z(t)[U + V]$  admet une solution  $Z(t)$  au sens fort, fortement nulle, telle que  $Z'(t)$  est continue pour  $0 \leq t < \infty$ , et que  $Z(t)$  est de type normal  $\omega'$  avec  $\omega' \leq \max\{\omega, \|V\|\}$ . — Les raisonnements du présent article sont inspirés en partie par ceux d'un article de R. S. Phillips sur la perturbation des semi-groupes de transformations linéaires [cf. Trans. Amer. math. Soc. 74, 199—221 (1953)].

B. Sz. Nagy.

Magnus, Wilhelm: On the exponential solution of differential equations for a linear operator. Commun. pure appl. Math. 7, 649—673 (1954).

Vorgelegt ist die Differentialgleichung  $dY/dt = A \cdot Y$  für einen linearen Operator  $Y(t)$ , welcher von der reellen Variablen  $t$  abhängt, wobei  $A = A(t)$  ein gegebener Operator ist. Gefragt wird nach der Darstellbarkeit der Lösung in der Form  $Y = \exp(\Omega) = 1 + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 + \dots$  durch einen differenzierbaren Operator  $\Omega(t)$ .

Der Beantwortung werden einige formal algebraische Überlegungen vorausgeschickt, die selbständigen Wert haben.  $k[x, y]$  sei der durch 2 Elemente  $x, y$  erzeugte freie assoziative Ring über dem Körper  $k$  der Charakteristik 0. Man bezeichne  $x, y$  und alle hieraus erzeugbaren Lieschen Produkte  $z = [x, y] = xy - yx$ ,  $[x, z] = xz - zx$ , usw. als Lieelemente. Nach H. F. Baker [Proc. London math. Soc., II. ser. 3, 24—47 (1904)] und F. Hausdorff [Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl., 58, 19—48 (1906)] sind die Elemente  $w = \exp(-x)y\exp(x)$  sowie das durch  $\exp(x)\exp(y) = \exp(z)$  eindeutig definierte Element  $z$  Lieelemente. Verf. liefert für diesen Satz einen neuen Beweis, gestützt auf das folgende Lemma von K. O. Friedrichs (dies. Zbl. 52, 445) welches er ebenfalls erneut beweist: Man bilde einen zweiten mit  $k[x, y]$  isomorphen Ring  $k[x', y']$  und das direkte Produkt  $k[x, y, x', y']$  (wobei also  $xx' = x'x$ , usw.). Dann und nur dann ist  $F(x, y)$  in  $k[x, y]$  Lieelement, wenn in  $k[x, y, x', y']$  gilt:  $F(x + x', y + y') = F(x, y) + F(x', y')$ . Ferner wird ein bisher unpublizierter Satz von H. Zassenhaus

bewiesen, der mit dem Baker-Hausdorffschen Satze engstens zusammengehört:  
 $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y) \prod_{i=2}^{\infty} \exp(C_i(x, y))$ , wobei  $C_i(x, y)$  eindeutig bestimmte Liewelemente der Grade  $i$  sind, d. h.  $C_i(tx, ty) = t^i C_i(x, y)$  für eine mit  $x, y$  kommutierende Unbestimmte  $t$ . — Unter Benutzung der Abkürzungen  $\{x, y\} = [x, y]$ ,  $\{x, y^n\} = [\{x, y^{n-1}\}, y]$  für  $n > 1$  und  $\{x, \sum p_n y^n\} = \sum p_n \{x, y^n\}$  mit Koeffizienten  $p_n$  in  $k$  wird nun gezeigt, daß der gesuchte Operator  $\Omega(t)$  (s. oben) der Differentialgleichung

$$d\Omega/dt = \{A, \Omega/(1 - \exp(-\Omega))\}$$

genügen muß, sofern für  $t = 0$  die Anfangsbedingung  $\Omega(0) = 0$  gestellt wurde. Die Auflösung ist durch Iteration möglich und zeigt  $\Omega$  in gewissem Sinne als ein Liewelement, nämlich

$$\Omega = \int_0^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left[ A(\tau), \int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right] d\tau + \dots$$

diese Formel kann als ein stetiges Analogon des Satzes von Baker und Hausdorff angesehen werden. Unter Umständen bricht diese Reihe nach endlich vielen Gliedern ab. Im allgemeinen konvergiert sie nur für hinreichend kleine Werte von  $t$ , und zwar auch dann nur, wenn die Lösung  $Y(t)$  der obigen Differentialgleichung für jeden Wert von  $t$  in der Form  $Y = \exp(\Omega)$  darstellbar ist. Für die Existenz eines differenzierbaren  $\Omega(t)$  mit der Eigenschaft  $d\Omega/dt = F(A, \Omega)$  ist notwendig und hinreichend, daß keine zwei Eigenwerte von  $\Omega$  sich um  $2\pi i m$  mit  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  unterscheiden. Im Falle zweireihiger Matrizen und  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}$ ,

$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  gibt es dann und nur dann ein zweimal differenzierbares  $\Omega(t)$ , wenn  $(\text{Spur } Y)^2 \leq 4$  ist.

*M. Eichler.*

**Cronin, Jane:** Branch points of solutions of equations in Banach space. II. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 207—222 (1954).

Ausdehnung zweier früherer Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **38**, 258; **41**, 237). Wie in der zweitgenannten Arbeit läßt sich bei der Gleichung  $(I + C - T)x = y$  für die Lösung  $x = 0$  zu  $y = 0$  eine Vielfachheit  $m$  definieren, falls  $x = 0$  isolierte Lösung ist; dabei variieren  $x$  und  $y$  in einem Banachraum  $\mathfrak{X}$  mit 0 als Nullelement.  $J$  ist die identische Abbildung,  $C$  linear und vollstetig,  $T$  eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{X}$  auf sich mit den Bedingungen  $T(0) = 0$  und einer Lipschitzbedingung in der Umgebung von 0 von der Form  $\|T(u) - T(v)\| \leq B[\|u\| + \|v\|] \|[u - v]\|$ . Die Vielfachheit  $m$  ist  $\geq 1$ , falls  $I + C - T$  in einer Umgebung von 0 eine eindeutige Abbildung ist. Ist  $m$  von 0 verschieden, so hat (1) für  $y$  in einer gewissen Umgebung von  $y = 0$  mindestens eine Lösung. Für  $T$  wird folgende Zusatzbedingung eingeführt in der Nachbarschaft von  $x = 0$ :  $T(x + 1/x) = T(x) + L_x(1/x) + Q_x(1/x)$ ,  $\|L_x - L_y\| \leq K\|u - v\|$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} Q_x(1/x) = 0$ . Dann hat (1) im all-

gemeinen mindestens  $m_1$  Lösungen in einer gewissen Umgebung von  $y = 0$ . Aus diesen Sätzen fließen Existenztheoreme für nichtlineare Integralgleichungen der Form

$$x(s) + \int_a^b K(s, t) F[x(t)] dt = y(s)$$

und ein einfacherer Beweis des Schauderschen Theorems für elliptische Differentialgleichungen [Math. Ann. **106**, 661—721 (1932) (dies. Zbl. **4**, 350), insbesondere Satz IV], wobei über Schauder hinaus auch der Verzweigungsfall erfaßt werden kann.

*R. Iglisch.*

**Fantappiè, Luigi:** Calcolo degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori osservabili su un gruppo compatto. Arch. der Math. **5**, 292—300 (1954).

Si considera il problema del calcolo degli autovalori e delle autofunzioni di un operatore funzionale lineare  $K$  (cfr. questo Zbl. 46, 437; 50, 336), che si applichi a un sistema di  $\mu$  funzioni di stato (chiamato spinore di grado  $\mu$ ), che è considerato come rappresentativo dello stato di un'entità fisica spinoriale. Nel caso in cui le componenti degli spinori siano funzioni sviluppabili in serie uniformemente convergenti di funzioni ortogonali indicate dalla teoria dei gruppi topologici e a tali serie l'operatore  $K$  sia applicabile termine a termine, il problema viene ridotto alla risoluzione di equazioni algebriche e di sistemi lineari omogenei. *S. Cinquini.*

**Putnam, C. R.:** On the spectra of commutators. Proc. Amer. math. Soc. 5, 929—931 (1954).

Let  $A, B$  be bounded operators in Hilbert space, and  $C = AB - BA$ . It is proved that if  $C$  commutes with  $A$  and with  $B$  then its spectrum consists of 0 alone: (i)  $\text{sp}(C) = 0$ . The question whether (i) is true also in the case when  $C$  is supposed to commute only with one of the operators  $A, B$ , is left open. However, it is proved that, in this case, there exists for any  $\varepsilon > 0$  an operator  $C_\varepsilon$  such that  $\|C - C_\varepsilon\| < \varepsilon$  and that the spectrum of  $C_\varepsilon$  is contained in the disc  $|\lambda| < \varepsilon$ . — In the case  $B = A^*$  the permutability of  $C$  and  $A$  implies that of  $C$  and  $B$ , so that the following corollary holds: If  $A$  commutes with  $AA^* - A^*A$ , then necessarily  $AA^* - A^*A = 0$ , i. e.  $A$  is normal. This is a refinement of a result of A. Brown (this Zbl. 51, 343) asserting that if a bounded operator  $A$  commutes with both  $AA^*$  and  $A^*A$ , then  $A$  is normal. *B. Sz. Nagy.*

**Takdykin, A. T.:** Zum Problem der Existenz der Eigenwerte bei linearen Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 905—908 (1954) [Russisch].

Verf. setzt seine Untersuchungen über die Existenz von Eigenwerten linearer Operatoren im Hilbertraum fort; siehe dies. Zbl. 44, 115; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 92, 1121—1124 (1953) (Bezeichnungen wie dort). Satz 1: Hat  $A = CC_1$  (wo  $C, C_1$  beschränkt) einen Eigenwert in seinem Fredholmkreis, so hat auch  $B = C_1C$  mindestens einen Eigenwert in diesem Kreis. Satz 2: Hat  $A = CC_1$  (wo  $C, C_1$  beschränkt) ein vollständiges System von Elementen und „angeschlossenen“ Elementen, die zu Eigenwerten aus dem Fredholmkreis gehören, so hat auch  $B = C_1C$  ein entsprechendes System. — Verallgemeinerungen auf Produkte mehrerer Operatoren und auf unbeschränkte Operatoren, deren Inverse beschränkt ist. *K. Zeller.*

**Najmark, M. A.:** Über einige Kriterien für die Vollständigkeit des Systems der Eigenvektoren und assoziierten Vektoren eines linearen Operators im Hilbertschen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 98, 727—730 (1954) [Russisch].

Es wird bewiesen, daß das System der Eigenvektoren und assoziierten Vektoren (s. M. W. Keldysch, dies. Zbl. 45, 394) eines abgeschlossenen linearen Operators  $A$  im Hilbertraum vollständig ist, wenn die Resolvente  $R_\lambda$  von  $A$  vollstetig ist und  $\max_{\lambda \in \Gamma_n} \|R_\lambda f\| \rightarrow 0$  besteht für eine gewisse Folge von konzentrischen Kreisen  $\Gamma_n$  mit unbegrenzt wachsenden Radien und für die Elemente  $f$  einer dichten Teilmenge des Raumes. Auf Grund dieses Satzes werden Sätze von störungstheoretischem Charakter bewiesen, und zwar wird eine Bedingung dafür angegeben, daß der Operator  $A + B$  eine Abschließung besitzt, deren Resolvente vollstetig ist und deren Eigenvektoren und assoziierte Vektoren ein vollständiges System bilden. Dabei werden auch gewisse nicht beschränkte Operatoren  $B$  zugelassen. — Als Anwendung folgt ein Ergebnis über nicht selbstadjungierte singuläre Differentialoperatoren: Es sei  $q(x)$  eine im wesentlichen beschränkte meßbare komplexwertige Funktion,  $\theta$  eine reelle Zahl. Für  $k \geq 2$  ist das Spektrum des Operators  $L$ , der durch den Ausdruck  $l(y) = y'' + (x^k + q(x))y$  und die Randbedingung  $y'(0) - \theta y(0) = 0$  definiert ist, diskret, die Resolvente von  $L$  ist vollstetig und das System der Eigenvektoren und assoziierten Vektoren von  $L$  ist vollständig in  $L^2(0, \infty)$ . *B. Sz. Nagy-A. Korányi.*



Šnol', Ě.: Das Verhalten der Eigenfunktionen und Spektren von Sturm-Liouvilleschen Operatoren. Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 4 (62), 113–132 (1954) [Russisch].

Es handelt sich um die Transformation des Raumes  $L^2(0, \infty)$ , die durch einen Ausdruck  $L(y) = -y'' + q(x)y$  [ $q(x)$  reell und stetig] und eine Sturm-Liouvillesche Randbedingung  $[0] \sim y(0) + \beta y'(0) = 0$  definiert ist. Der Verf. versucht ein zusammenfassendes Bild über die Untersuchungen auf diesem Gebiet zu geben. Der Operator  $\tilde{L}$  wird definiert für Funktionen  $y \in L^2(0, \infty)$ , die  $[0]$  genügen, in jedem endlichen Intervall absolut stetige Ableitung besitzen und für die  $L(y) \in L^2(0, \infty)$  ist. Die folgende Alternative wird aufgestellt:  $\tilde{L}$  ist entweder symmetrisch (Grenzfunktfall), oder nicht (Grenzkreisfall). Nach einigen klassischen Sätzen von Weyl wird ein hinreichendes Kriterium von Sears [Canadian J. Math. 2, 314–325 (1950)] für die Symmetrie von  $\tilde{L}$  mit Beweis reproduziert. Der Verf. definiert nach Gelfand die „stabile Symmetrie“ des Operators  $\tilde{L}$ : es stellt sich heraus, daß das Searssche Kriterium für die stabile Symmetrie auch notwendig ist. Im Nachfolgenden wird nur der Grenzfunktfall betrachtet. Der Verf. beweist den „Grundsatz“: der Punkt  $\lambda$  ist ein Häufungspunkt des Spektrums von  $\tilde{L}$  dann und nur dann, wenn es eine Funktionenfolge  $\{\varphi_n(x)\}$  gibt mit  $\varphi_n(x) = 0$  für  $0 \leq x \leq A_n$  ( $A_n \rightarrow \infty$ ),  $\|\varphi_n\| = 1$ , und  $\|L\varphi_n - \lambda \varphi_n\| \rightarrow 0$ . Aus diesem Satz folgen zahlreiche wichtige bekannte Ergebnisse der Theorie, ferner einige nützliche Kriterien für die Existenz und Natur des „wesentlichen Spektrums“. Mit Hilfe des Grundsatzes wird zuerst der Fall eines von unten begrenzten  $q(x)$  untersucht. Das Kriterium für ein diskretes Spektrum von Molčanov (dies. Zbl. 52, 102) wird neu bewiesen, ferner einige Sätze von Putnam und Hartman über das wesentliche Spektrum (Hartman und Putnam, dies. Zbl. 35, 183; Hartman, dies. Zbl. 46, 151). Dann wird der Fall  $q(x) \rightarrow -\infty$  untersucht, und einige Behauptungen über das Spektrum bewiesen. Endlich folgen Sätze, die den Zusammenhang der Asymptotik der Eigenfunktionen mit dem Spektrum erörtern. So wird z. B. bewiesen: Ist  $q(x) > 0$  und besteht für jedes  $\varepsilon > 0$   $\varphi(x, \lambda) \leq C(\varepsilon)(1 + \tau + \varepsilon)^2$ ,  $-\varphi'' + (q - \lambda)\varphi = 0$ ,  $\alpha\varphi(0) + \beta\varphi'(0) = 0$ , so ist der Abstand des Punktes  $\lambda$  vom Spektrum höchstens gleich  $K\varepsilon$ . Die Arbeit enthält interessante Gegenbeispiele und viele Literaturhinweise auch für den Fall mehrerer Veränderlichen, ist somit sehr instruktiv. Leider ist sie wegen der etwas oberflächlich-skizzenhaften Abfassung und der vielen störenden Druckfehler nicht leicht lesbar. B. Sz. Nagy-A. Korányi.

Biglov, Z. I.: Über einen Differentialoperator, der durch ein System von Differentialausdrücken zweiter Ordnung erzeugt wird. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 495–497 (1954) [Russisch].

Es sei  $l(y) = -y'' + P(x)y$ , wobei  $P(x)$  ( $0 \leq x < \infty$ ) eine reelle symmetrische  $(n \times n)$ -Matrixfunktion und  $y = y(x)$  einen  $n$ -Vektor mit den Komponenten  $y_\nu = y_\nu(x)$  bedeuten; es wird vorausgesetzt, daß  $P(x)$  auf jedem endlichen Intervall integrierbar ist (im Lebesgueschen Sinne). Es sei  $L_n^2(0, \infty)$  der Hilbert-Raum aller  $y = y(x)$  mit  $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty |y_k(x)|^2 dx < \infty$ ; ferner bedeute  $D$  die Linear-mannigfaltigkeit aller  $y \in D$  mit absolut-stetigem  $y'(x)$  und mit  $l(y) \in L_n^2(0, \infty)$ ; durch  $L y = l(y)$  wird ein Operator  $L$  mit dem Definitionsbereich  $D$  definiert. Sei  $L_{(0)}$  die Einschränkung von  $L$  auf den Teil von  $D$ , bestehend aus den Funktionen  $y(x)$ , die für große  $x$  verschwinden und den Randbedingungen  $y(0) = y'(0) = 0$  genügen.  $L_{(0)}$  ist symmetrisch und hat eine symmetrische Abschließung  $L_0$ . Aus Sätzen von I. M. Glazman (dies. Zbl. 41, 231) folgt u. a., daß  $L_0$  selbstadjungierte Fortsetzungen besitzt, die durch Randbedingungen vollständig charakterisiert werden können. Es sei  $L_\theta$  diejenige selbstadjungierte Fortsetzung, die der Randbedingung  $y'(0) = \theta y(0)$  entspricht, wobei  $\theta$  eine reelle, symmetrische, konstante Matrix bedeutet. — Es gilt ein Satz vom Parsevalschen Typus: Es gibt eine Matrix-Verteilungsfunktion  $T(\lambda)$ , so daß für jede Funktion  $f(x) \in L_n^2(0, \infty)$  gilt

$$\int_0^\infty \|f(x)\|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty F^*(\lambda) \cdot dT(\lambda) \cdot F(x),$$

wobei  $F(\lambda)$  eine auf bestimmte Weise definierte „verallgemeinerte Fouriertransformierte“ von  $f(x)$  bedeutet. — Wenn  $P(x)$  sogar auf  $(0, \infty)$  Lebesgue-integrierbar ist, so hat  $L_0$  die Defektindizes  $(n, n)$ , und es gibt keine selbstadjungierten Fortset-

zungen von  $L_0$  außer den  $L_\theta$ . Das Spektrum von  $L_\theta$  ist kontinuierlich auf  $\lambda > 0$ , diskret auf  $\lambda = 0$ , und es ist beschränkt von unten. — Ohne Beweise.

*B. Sz.-Nagy.*

**Glazman, I. M.:** Über eine Anwendung der Zerspaltungsmethode auf mehrdimensionale singuläre Randwertaufgaben. Math. Sbornik, n. Ser. 35 (22), 231–246 (1954) [Russisch].

Erweiterungen und vollständige Beweise der Ideen und Resultate einer Reihe früherer Arbeiten (dies. Zbl. 45, 45; 48, 96; 49, 89). *E. Hewitt.*

**Müller, H.:** Über eine Klasse von Eigenwertaufgaben mit nichtlinearer Parameterabhängigkeit. Math. Nachr. 12, 173–181 (1954).

$\mathfrak{H}$  sei ein komplexer linearer Raum (Elemente:  $a, b, \dots, x, y, z$ ; kompl. Zahlen:  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \dots$ ) mit positiv-definitem hermiteschem Skalarprodukt  $(f, g)$ .  $I, O$  seien Einheits- bzw. Nuloperator; ein Operator  $A$  sei als vollstetig definiert, wenn jede beschränkte Folge  $x_r \in \mathfrak{H}$  eine Teilfolge  $x'_r$  enthält, für die  $Ax'_r$  gegen ein Element aus  $\mathfrak{H}$  konvergiert. — Verf. betrachtet Eigenwertaufgaben

$$(1) \quad [\lambda^n (I - A_0) - \lambda^{n-1} A_1 - \dots - A_n] x = 0$$

und setzt dazu  $A_0, A_1, \dots, A_n$  vollstetig und hermitesch,  $A_n \neq O$ ,  $(A_0 x, x) \leq q(x, x)$  ( $q < 1$ ) voraus. Ist dann  $P$  die Menge der reellen Zahlen  $\lambda$  mit

$$(2) \quad \lambda^n [(x, x) - (A_0 x, x)] - \lambda^{n-1} (A_1 x, x) - \dots - (A_n x, x) = 0$$

für ein  $x \neq 0$  aus  $\mathfrak{H}$ , so gilt:  $P$  ist beschränkt. (1) besitzt genau dann mindestens einen reellen Eigenwert, wenn  $P$  nicht leer ist. Ist  $P$  nicht leer, so sind  $\bar{\lambda} = \sup P$ ,  $\underline{\lambda} = \inf P$ , falls  $\neq 0$  oder beide  $= 0$ , Eigenwerte von (1). — Ref.: Verf. fordert unnötigerweise noch die Vollständigkeit von  $\mathfrak{H}$ , obwohl er sich methodisch auf die Arbeit von Rellich, dies. Zbl. 10, 25, stützt. Nicht bewiesen wird die Behauptung, daß jeder isolierte Punkt von  $P$  Eigenwert von (1) sei.

*F. W. Schäfke.*

**Kilpi, Yrjö:** Lineare normale Transformationen mit einem einfachen Spektrum und das komplexe Momentenproblem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 1954, Nr. 176, 34 S. (1954).

Verf. untersucht folgendes Problem: Ist  $\{c_{\alpha\beta}\}$  ( $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ ) eine gegebene Menge von komplexen Konstanten, so soll die Frage untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine solche positive in der ganzen komplexen Ebene  $G$  definierte und dort beschränkte Funktion  $\varrho(z)$  existiert (die noch gewisse Bedingungen erfüllt), so daß  $c_{\alpha\beta} = \int_G z^\alpha \bar{z}^\beta d\varrho(z)$  gilt, und unter welchen Bedingungen es mehrere solcher

Funktionen gibt. Insbesondere interessiert hierbei der Zusammenhang zwischen diesem Problem und der Theorie derjenigen Klasse von linearen Transformationen, welche von Nakano (dies. Zbl. 21, 234) als normal bezeichnet werden. Verf. gliedert seine Arbeit in vier Abschnitte. Der erste enthält einige (z. T.) bekannte Hilfssätze über (hypermaximale) normale Transformationen und ein mit der Funktion  $\varrho(z)$  verknüpftes Approximationsproblem. Im Abschnitt 2 werden hypermaximale normale Transformationen mit einfachem Spektrum untersucht und dabei einige wichtige Sätze verallgemeinert, die von Stone für symmetrische Transformationen schon früher bewiesen wurden. In den Abschnitten 3 und 4 gewinnt dann der Verf. die Kriterien, die es gestatten, das anfangs gestellte komplexe Momentenproblem zu beantworten.

*H. Pachale.*

**Nemyckij, V. V.:** Berichtigung zu der Arbeit „Die Struktur des Spektrums nicht-linearer vollstetiger Operatoren“. Mat. Sbornik, n. Ser. 35 (77), 174 (1954) [Russisch].

Die folgende Definition werde eingeführt: Die topologische Abbildung eines Banachschen Raumes  $E$  auf einen Banachschen Raum  $E'$  heißt stark (topologisch), wenn sie offene Mengen in offene überträgt. Das Lemma 3 der in der Überschrift

angegebenen Arbeit gilt dann nur für diejenigen stark topologischen Abbildungen, die durch die Familie  $\{B_\lambda\}$ ,  $B_\lambda = \lambda \varphi + A(\varphi)$ ,  $|\lambda - \lambda_0| < \eta$  geliefert werden.

H. Pachale.

**Dunford, Nelson:** Spectral operators. Pacific J. Math. 4, 321–354 (1954).

This paper makes a significant step toward a complete spectral theory for arbitrary operators. By a „spectral measure“ on a Banach space  $\mathfrak{X}$  there is meant a function  $E(\omega)$ , defined on a certain Boolean algebra  $\mathfrak{B}$  of subsets  $\omega$  of a set  $\Omega$  (containing also  $\Omega$ ), whose values are projection operators on  $\mathfrak{X}$  and which satisfies the following conditions: (i)  $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1)E(\omega_2)$ , (ii)  $E(\omega_1 \cup \omega_2) = E(\omega_1) + E(\omega_2)$  if  $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ , (iii)  $E(\Omega) = I$ , (iv)  $\|E(\omega)\| \leq K$  with a constant  $K$  independent of  $\omega$ . A bounded linear operator  $T$  on  $\mathfrak{X}$  is said to be a „spectral operator“ if there exists a spectral measure  $E(\omega)$  on  $\mathfrak{X}$ , defined on the set  $\mathfrak{B}$  of all Borel subsets  $\omega$  of the complex plane  $\Omega$ , and such that (a)  $T E(\omega) = E(\omega) T$ , and, when considered as an operator on the subspace  $E(\omega)\mathfrak{X}$ , the spectrum of  $T$  is contained in the closure of  $\omega$ , (b) there exists a total subset  $\Gamma$  of the dual space  $\mathfrak{X}^*$  such that, for any fixed  $x \in \mathfrak{X}$  and  $x^* \in \mathfrak{X}^*$ ,  $x^* E(\omega) x$  is countably additive on  $\mathfrak{B}$  („totality“ of  $\Gamma$  means that for each  $x \neq 0$  there exists an  $x^* \in \Gamma$  such that  $x^* x \neq 0$ ).  $E(\omega)$  is then called a „resolution of the identity“ of  $T$ ; we have always  $E(\sigma(T)) = I$ , where  $\sigma(T)$  denotes the spectrum of  $T$  (Th. 1). For normal operators in Hilbert space these concepts coincide with the usual ones, but they are much more general; from the Jordan canonical form of a matrix one easily sees that on a finite dimensional space every operator is spectral. It is shown (Th. 2) that, if  $T$  is spectral, then, for each  $x \in \mathfrak{X}$ , the function  $x(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} x$ , defined originally on the resolvent set  $\rho$  of  $T$ , has only single-valued analytic continuations, and thus there exists a maximal single-valued analytic continuation, whose domain  $\rho(x)$  is called the „resolvent set“ of the element  $x$ , and its complement  $\sigma(x)$  the „spectrum“ of the element  $x$ . It is shown by an example, due to S. Kakutani, that there exist Hilbert space operators for which  $(\lambda I - T)^{-1} x$  has, for some  $x$ , multiple-valued analytic continuations; these operators are thus not spectral. For spectral operators the resolution of the identity  $E(\omega)$  is uniquely determined (Th. 6), and for closed sets  $\omega$  the following representation is valid:  $E(\omega)\mathfrak{X} = [x: \sigma(x) \subset \omega]$  (Th. 4). From this it follows readily that if an operator commutes with  $T$  it commutes also with  $E(\omega)$  (Th. 5), a fact proved for normal operators on Hilbert space by B. Fuglede (this Zbl. 35, 358). A spectral operator  $S$  with the resolution of the identity  $E(\omega)$  is called of „scalar type“ if it satisfies the equation  $S = \int \lambda E(d\lambda)$ ; since, by theorem 1,

$E(\omega) = 0$  for all  $\omega$  in the complement of  $\sigma(S)$ , it suffices to integrate on the compact set  $\sigma(S)$ . The following theorem (Th. 8) is fundamental: An operator  $T$  is spectral if and only if it is the sum  $T = S + N$  of a scalar type operator  $S$  and a generalized nilpotent operator  $N$  commuting with  $S$  (an operator  $N$  is a generalized nilpotent if  $\|N^n\|^{1/n} \rightarrow 0$  for  $n \rightarrow \infty$ ). Furthermore, this decomposition is unique, and  $T$  and  $S$  have the same spectrum and the same resolution of the identity. This „canonical“ decomposition  $T = S + N$  makes an operational calculus possible: for every scalar function  $f(\lambda)$  which is analytic and single-valued on the spectrum  $\sigma(T)$  of  $T$ , put

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda) E(d\lambda).$$

If  $N^{m+1} = 0$  for an  $m > 0$  then  $T$  is called of type  $m$ ; conditions are given for a Hilbert space operator to be of type  $m$  (Th. 11, 12); these conditions concern the rate of growth of the resolvent in the neighborhood of the spectrum. The operators  $f(T)$  are all spectral, and the „spectral mapping theorem“ subsists:  $E(f(T), \omega) = E(T, f^{-1}(\omega))$ , where  $f^{-1}(\omega) = [\lambda: f(\lambda) \in \omega]$  (Lemma 5). — The rest of the paper is devoted to algebras of spectral operators. Denoting by  $B(\mathfrak{X})$  the set of all bounded linear operators on the space  $\mathfrak{X}$ , let  $\mathfrak{A}(T_1, T_2, \dots)$  be the „full“ algebra generated by the given operators  $T_i \in B(\mathfrak{X})$ , i. e. the least subalgebra of  $B(\mathfrak{X})$ , which is closed in the uniform topology of operators, contains the given operators  $T_i$ , the operator  $I$ , and also the inverse  $W^{-1}$  of any of its elements provided that  $W^{-1}$  exists as an element of  $B(\mathfrak{X})$ . Using these notations, we have, for any spectral operator  $T$  and its scalar part  $S$ ,  $\mathfrak{A}(T, S) = \mathfrak{A}(S) \oplus \mathfrak{R}$ , where  $\mathfrak{R}$  is the radical in the algebra  $\mathfrak{A}(T, S)$ , and the sum is a direct vector sum. Furthermore,  $\mathfrak{A}(S)$  is equivalent to the algebra of all those complex functions  $f(\lambda)$ , defined on  $\sigma(T)$  and with the norm  $\|f(\lambda)\|$ , which are uniform limits of rational functions, regular on  $\sigma(T)$  (Th. 13). — For a

spectral operator  $T$ , denote by  $\mathfrak{A}$  the full algebra generated by the projection operators in the resolution of the identity of  $T$ , and by  $\mathfrak{A}_1$  the full algebra generated by these projections and by  $T$ . Then every operator in  $\mathfrak{A}_1$  is spectral, and we have:  $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{R}_1$ , where  $\mathfrak{R}_1$  is the radical in  $\mathfrak{A}_1$ . Furthermore,  $\mathfrak{A}$  is equivalent to the space  $C(\mathfrak{M})$  of all continuous functions on the space  $\mathfrak{M}$  of the maximal ideals in the algebra  $\mathfrak{A}$  (Th. 14). — Let  $\tau$  be a family of commuting spectral operators, and let  $\mathfrak{A}(\tau)$  denote the full algebra generated by the operators  $T$  together with the projections in their resolutions of the identity. If the Boolean algebra determined by the (commuting) resolutions of the identity of the operators in  $\tau$  is uniformly bounded, then we have  $\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{R}$  where  $\mathfrak{R}$  is the radical in  $\mathfrak{A}(\tau)$  and  $\mathfrak{A}_1$  is equivalent to the algebra  $C(\mathfrak{M})$  of



all continuous functions on the space  $\mathfrak{M}$  of the maximal ideals in  $\mathfrak{A}(\tau)$  (Th. 17). Furthermore, the adjoint of every operator in  $\mathfrak{A}(\tau)$  is a spectral operator. If  $\mathfrak{X}$  is reflexive then every operator in  $\mathfrak{A}(\tau)$  is a spectral operator (Th. 19). Thus, in a reflexive space  $\mathfrak{X}$ , the sum and product of two commuting spectral operators are also spectral operators, provided there is a uniformly bounded Boolean algebra of projections containing the projections in both resolutions of the identity. The last theorem of the paper (Th. 20) concerns compact (= vollstetig) operators  $T$  on a reflexive space  $\mathfrak{X}$ :  $T$  is spectral if and only if the integrals  $\int_C (\lambda I - T)^{-1} d\lambda$  are bounded as  $C$  varies over all "admissible" contours in the resolvent set of  $T$ . In this case the integral  $J$  is the value of the resolution of the identity  $E(\omega)$  for the domain  $\omega$  bounded by  $C$ .

B. Sz. Nagy.

**Werner, John: Commuting spectral measures on Hilbert space.** Pacific J. Math. **4**, 355—361 (1954).

Let  $E(\omega)$  be a spectral measure on Hilbert space  $\mathfrak{H}$  (see the preceding review). Then there exists a bicontinuous operator  $A$  such that  $A^{-1}E(\omega)A$  is self-adjoint for every  $\omega$ . This proposition is attributed to G. W. Mackey (Commutative Banach algebras, multigraphed Harvard lecture notes, 1952), but it was proved already by J. Dixmier (this Zbl. **37**, 155). The object of the present paper is to generalize this proposition to two commuting spectral measures  $E(\omega)$  and  $F(\omega')$ , i.e. defined on the same Boolean algebra  $\mathfrak{B}$  of subsets  $\omega$  of a set  $\Omega$ , and such that  $E(\omega_1)F(\omega_2) = F(\omega_2)E(\omega_1)$  for all  $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{B}$ . It is proved that there exists a bicontinuous operator  $A$  such that  $A^{-1}E(\omega)A$  and  $A^{-1}F(\omega')A$  are all self-adjoint. Reviewer has to remark that this proposition may also be obtained as an easy consequence of the theorem of Dixmier, i.e., generalizing a previous theorem of the reviewer, and which asserts that if the group  $G$  possesses a right-invariant mean, then every uniformly bounded representation of  $G$  in Hilbert space is similar to a unitary representation; this is true in particular if  $G$  is abelian. For, let  $g$  be the group whose elements are the elements  $\omega$  of  $\mathfrak{B}$  with the multiplication rule  $\omega_1 \cdot \omega_2 = (\omega_1 \cap \omega_2) \cup (\bar{\omega}_1 \cap \bar{\omega}_2)$ , the bar denoting complementation;  $g$  is an abelian group with the unit element  $\Omega$  and with the inverse  $\omega^{-1} = \bar{\omega}$ . Let  $G = g \cdot A$ , with the elements  $(\omega, \omega')$ . Putting  $H(\omega, \omega') = [2E(\omega) - I][2F(\omega') - I]$ , we obtain a uniformly bounded representation of  $G$  in  $\mathfrak{H}$ . Thus, by Dixmier's theorem, there exists a bicontinuous operator  $A$  such that  $V(\omega, \omega') = A^{-1}H(\omega, \omega')A$  is a unitary representation of  $G$ ; we have necessarily  $V(\omega, \omega') = V(\omega)W(\omega')$  with unitary and commuting  $V(\omega)$ ,  $W(\omega')$ . Then  $A^{-1}E(\omega)A = \frac{1}{2}[V(\omega) + I]$ ,  $A^{-1}F(\omega')A = \frac{1}{2}[W(\omega') + I]$ , and the operators on the right-hand side are self-adjoint. As a consequence of this theorem on commutative spectral measures, the author proves that if  $T_1, T_2$  are commutative spectral operators on Hilbert space (see preceding review) then  $T_1 + T_2$  and  $T_1 T_2$  also are spectral operators.

B. Sz. Nagy.

**Kakutani, Shizuo: An example concerning uniform boundedness of spectral measures.** Pacific J. Math. **4**, 363—372 (1954).

Let  $\{E(\omega)\}, \{E'(\omega')\}$  be two families of projection operators on a Banach space  $X$ , forming two spectral measures on the same Boolean algebra  $\mathfrak{B}$  of subsets  $\omega$  of a set  $\Omega$ ; it is supposed that these projection operators are uniformly bounded (see the above review of Dunford's paper). Suppose that  $E(\omega)E'(\omega') = E'(\omega')E(\omega)$  for all  $\omega, \omega' \in \mathfrak{B}$ . Let  $\mathfrak{B}^*$  denote the Boolean algebra of these subsets of the set  $\Omega^* = \Omega \times \Omega$  which are expressible in the form

$$(1) \quad \omega^* = \bigcup_{i=1}^n \omega_i \times \omega'_i \quad (\omega_i, \omega'_i \in \mathfrak{B})$$

with disjoint  $\omega_i \times \omega'_i$ . For such an  $\omega^*$  put

$$F(\omega^*) = \sum_{i=1}^n E(\omega_i) E'(\omega'_i);$$

$F(\omega^*)$  is uniquely defined, although the representation (1) is not unique. If  $X$  is a Hilbert space, then it follows from the theorem of Werner referred above, that the operators  $F(\omega^*)$  are uniformly bounded and so they form a spectral measure on  $\mathfrak{B}^*$ . In the present paper it is shown by a counter-example that the same assertion is not necessarily true if  $X$  is an arbitrary Banach space. In this example,  $X$  is a cross product space  $C(S) \otimes C(S')$  of two Banach spaces of continuous functions. This Banach space is not reflexive, and hence it remains to decide whether  $F(\omega^*)$  is uniformly bounded if  $X$  is reflexive. As a consequence of this counter-example, two commuting bounded operators  $T_1, T_2$  on the space  $C(S) \otimes C(S')$  are constructed, which are both spectral operators (see the review of Dunford's paper), but whose sum  $T_1 + T_2$  is not a spectral operator.

B. Sz. Nagy.

**Bade, William G.: Unbounded spectral operators.** *Pacific J. Math.* **4**, 373—392 (1954).

The purpose of this paper is to show which portions of the theory of Dunford on spectral operators in Banach spaces  $\mathfrak{X}$  (see the third above review) may be carried over to unbounded operators, and to develop the operational calculus for this case. By a slight modification of the terminology used by Dunford, the author means by a resolution of the identity  $E$  any spectral measure  $E(\omega)$  defined on the Borel sets  $\omega$  in the complex plane, for which the vector valued set function  $E(\omega)x$  is countably additive for any given  $x \in \mathfrak{X}$ . A closed operator  $T$  is called a spectral operator if there is a resolution of the identity  $E$  such that (1) the domain  $D(T)$  of  $T$  contains the range of every  $E(\omega)$  with bounded  $\omega$ , (2)  $E(\omega)$  commutes with  $T$ , (3) the spectrum of  $T$  when considered in  $E(\omega)\mathfrak{X}$ , is contained in the closure of the set  $\omega$ . The simplest type of spectral operators are those of scalar type, defined by

$$Sx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega_n} \lambda E(d\lambda) x, \quad \omega_n = \{\lambda: \lambda \leq n\},$$

where this limit exists. With each spectral operator  $T$  one can construct an associated scalar type operator  $S$  from its resolution of the identity. The difference  $N = T - S$  is, however, not always a generalized nilpotent: it is shown by examples that  $N$  may be bounded but not a generalized nilpotent or even unbounded with spectrum covering the plane. A sufficient condition that  $S + M$  be a spectral operator is that  $M$  be bounded, commute with the resolution of the identity of  $S$ , and be a generalized nilpotent on each of the subspaces  $E(\omega)\mathfrak{X}$  with bounded  $\omega$ ; the resolution of the identity for  $S + M$  is then the same as for  $S$ . If  $S$  is a spectral operator of scalar type, it has an operational calculus exactly analogous to that of an (unbounded) normal operator in Hilbert space (which is an example of a spectral operator of scalar type). In case  $T = S + N$  is a general spectral operator, one can, by the formula

$$f(T) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \int_{\omega_p} f^{(n)}(\lambda) E(d\lambda) x,$$

assign a densely defined operator  $f(T)$  to each function  $f$  analytic and single-valued in the complement of a set  $\omega$  for which  $E(\omega) = 0$ ; here  $\{\omega_p\}$  is any increasing sequence of compact sets on each of which  $f$  is analytic, and with  $E\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} \omega_p\right) = I$ . However, this operator  $f(T)$  need not be a spectral operator. If  $f$  is a rational function,  $f(T)$  is always a spectral operator. If a closed operator  $T$  has a nonempty resolvent set, then  $T$  is a spectral operator if and only if  $R_{\lambda} = (\lambda I - T)^{-1}$  is, for some  $\lambda \notin \sigma(T)$ , a (bounded) spectral operator. [Corollary, p. 390. It should be added that, if  $F_{\lambda}$  is the spectral measure associated with  $R_{\lambda}$ , then  $F_{\lambda}(\{0\}) = 0$  where  $\{0\}$  denotes the set consisting of the point 0 only.] In case  $T$  is of the form  $S + N$  where  $N$  is a generalized nilpotent, an extensive operational calculus is developed. In order that  $f(T)$  shall be a spectral operator it is sufficient, then, that the singularities of  $f(\lambda)$  in the finite plane (with the possible exception of a finite set of poles on  $\sigma(T)$ ) shall not get arbitrarily close to  $\sigma(T)$ .

*B. Sz. Nagy.*

**Bade, William G.: Weak and strong limits of spectral operators.** *Pacific J. Math.* **4**, 393—413 (1954).

The initial problem of the paper is to find conditions under which a weak or strong limit of bounded scalar type operators is again of this type (see the paper of Dunford reviewed above). Call a closed nowhere dense set  $V$  in the complex plane an  $R$ -set if the set of functions  $f(\lambda) = 1$  ( $\mu \in V$ ) ( $\mu \notin V$ ) is fundamental in the space  $C_{\infty}(V)$  of complex-valued continuous functions on  $V$  which vanish at infinity. (In order that a closed nowhere dense set  $V$  be an  $R$ -set it is sufficient either that  $V$  has plane measure zero or that  $V$  does not separate the plane.) Let  $\{T_{\alpha}\}$  be a directed set of bounded spectral operators satisfying the conditions: (A) if  $E_{\alpha}$  denotes the resolution of the identity for  $T_{\alpha}$ , then  $E_{\alpha}(\omega)$  is bounded uniformly with respect to  $\alpha$  and  $\omega$ ; (B) there is a fixed closed (possibly unbounded)  $R$ -set  $V$  with  $\sigma(T_{\alpha}) \subseteq V$ . If  $\{T_{\alpha}\}$  converges strongly to a bounded operator  $T$  then  $T^*$  is a scalar type operator in the dual space  $\mathfrak{X}^*$ ; if  $\mathfrak{X}$  is reflexive, then  $T$  is a scalar type operator too. Let  $h$  be a bounded Borel function on  $V$  with set  $K$  of discontinuities. If  $E(K) = 0$  where  $E$  is the resolution of the identity for  $T$ , then  $h(T_{\alpha})$  converges strongly to  $h(T)$ . Generalizing one of the results obtained by Dunford, i. e., the author proves that if  $\mathfrak{A}$  is an algebra generated by a bounded Boolean algebra  $\mathfrak{B}$  of projections of a reflexive space  $\mathfrak{X}$ , then every operator in the weak closure  $\mathfrak{B}$  of  $\mathfrak{A}$  is a scalar type operator;  $\mathfrak{B}$  may be characterized as the algebra generated in the uniform topology by the strong closure of  $\mathfrak{B}$ . The principal tool used is the equivalence [proved by Dunford, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **3**, 1—12 (1946)] of strong closure and lattice completeness for bounded Boolean algebras of projections; a new proof of this theorem is given. The paper concludes with a characterisation of the weakly closed algebra  $\mathfrak{B}(A)$  generated by a single scalar type spectral operator  $A$  with real spectrum, and by  $I$ :  $\mathfrak{B}(A)$  consists of all extended bounded Baire functions.



of  $A$ . This is a generalization of a theorem of I. E. Segal for Hilbert space (this Zbl. **43**, 116); the proof given here is more direct than that of Segal.

B. Sz. Nagy.

**Schwartz, J.: Perturbations of spectral operators, and applications. I. Bounded perturbations.** Pacific J. Math. **4**, 415—458 (1954).

Let  $T$  be a closed, densely defined operator on a reflexive Banach space  $\mathfrak{X}$ . The author calls  $T$  „regular“ if its resolvent set  $\varrho(T)$  is not empty, and if  $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$  is compact (= vollstetig) for some  $\lambda \in \varrho(T)$  (and then for all such  $\lambda$ ). The spectrum  $\sigma(T)$  consists then of a denumerable set of points  $\lambda_n$  with no finite limit point. Each  $\lambda_n$  is a pole of finite order  $r_n$  of the resolvent function  $R_\lambda$ , and is an eigenvalue of  $T$ . Let  $E(\lambda_n)$  be the idempotent function of  $T$  corresponding to the function which is 1 on  $\lambda_n$  and 0 elsewhere on the spectrum of  $T$ , then  $E(\lambda_n)$  projects  $\mathfrak{X}$  onto the subspace of „generalized eigenvectors“  $f$  corresponding to  $\lambda_n$ , i. e. for which  $(T - \lambda_n I)^{r_n} f = 0$ ; we have  $E(\lambda_n) \cdot E(\lambda_m) = 0$  for  $n \neq m$ . Let  $T$  be an unbounded regular operator. It is called „spectral“ if the bounded operator  $R_\lambda$  is spectral in the sense of Dunford for some  $\lambda \in \varrho(T)$ , and then for all such  $\lambda$ ; by a theorem of Dunford this is the case if and only if the projections  $E(\lambda_n)$  generate a uniformly bounded Boolean algebra (here the reflexivity of  $\mathfrak{X}$  is used). Let  $T$  be a regular spectral operator, and denote by  $d_n$  the distance of  $\lambda_n$  from the rest of the spectrum  $\sigma(T)$ . Suppose that, for almost all  $n$ ,  $E(\lambda_n)$  is a 1-dimensional projection, and that  $\sum E(\lambda_n) = I$ . Let  $B$  be a bounded operator. The following „perturbation theorem“ is proved: (a) If  $\sum d_n^{-1} < \infty$ , then  $T + B$  is spectral. (b) If  $\mathfrak{X}$  is Hilbert space, and  $\sum d_n^{-2} < \infty$ , then  $T + B$  is spectral. It is shown by counter-examples that this theorem does not remain true without the restriction to 1-dimensional  $E(\lambda_n)$ , even if the eigenvalues are restricted to be simple poles of  $R_\lambda$ , and even if they go to infinity very rapidly. If  $T$  is regular, but not necessarily spectral, denote by  $\text{sp}(T)$  the „spectral span“ of  $T$ , i. e. the subspace spanned by the ranges of all the  $E(\lambda_n)$ , and denote by  $S_\infty(T)$  the intersection of the nullspaces of all the  $E(\lambda_n)$ . It is proved that  $S_\infty(T)$  is either infinite dimensional or reduces to the 0-element of  $\mathfrak{X}$ . If  $T$  is also spectral, then  $\text{sp}(T) = \mathfrak{X}$  and  $S_\infty(T) = 0$  are equivalent; but for a non-spectral  $T$  it may happen (as shown by an example due to H. L. Hamburger) that  $\text{sp}(T) = \mathfrak{X}$  while  $S_\infty(T) = 0$ .

We have for all regular  $T$   $\text{sp}(T + S_\infty(T)^*) = \text{sp}(T)$ , where again the reflexivity of  $\mathfrak{X}$  is essentially used. If  $T$  and  $T^*$  are both regular and one of them is spectral, so is the other. Suppose  $T$  is regular and spectral, almost all  $\lambda_n$  are simple poles of the resolvent  $R_\lambda$ , and  $S_\infty(T) = 0$ . Let  $B$  be a bounded operator. We have the second „perturbation theorem“: (a) If  $d_n \rightarrow \infty$ , then  $T + B$  is regular. (b) If  $\lim d_n = 0$ , then  $T + B$  is regular for all  $B$  with sufficiently small  $\|B\|$ , and for all compact  $B$ . Some additional hypotheses assure also that  $S_\infty(T + B) = 0$ .

These abstract results are then applied to linear differential operators. After establishing some basic properties of ordinary linear differential operators, the following operator  $T_0$  in  $L^2(0, 1)$  is particularly studied. Let  $A^2$  be the class of all functions  $f$  such that  $f$  and  $f'$  are absolutely continuous in  $[0, 1]$ , and  $f'' \in L^2$ . Let  $T_0$  be defined by  $T_0 f = -f''$  for all  $f \in A^2$  which satisfy the boundary conditions  $f(0) = k_0 f'(0) = 0$ ,  $f(1) = k_1 f'(1) = 0$ ,  $k_0$  and  $k_1$  being arbitrary complex numbers. It is easily seen that  $T_0$  is a regular spectral operator with  $\sum d_n^{-2} < \infty$ . Thus, if  $B$  is any bounded operator in  $L^2$ , then  $T = T_0 + B$  is regular and spectral too. We may choose e.g.  $Bf = q(x)f(x)$  with  $q(x) \in C^\infty$ , then  $T$  is defined by the formal differential operator  $-d^2/dx^2 + q(x)$  and the boundary conditions. The result may be expressed so that if  $E(\lambda_n)$  are the projections associated to the points  $\lambda_n \in \sigma(T)$ , then  $f = \sum E(\lambda_n) f$  in the sense of  $L^2$ -convergence. It is shown, moreover, that this expansion is (unconditionally) convergent also in the metric

$$\|f\| = \left[ \int_0^1 |f''(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \max_{[0, 1]} \max \{|f(x)|, |f'(x)|\},$$

defined in  $A^2$ . These results generalize earlier results of G. D. Birkhoff (see Collected Papers Vol. I, New York 1950, p. 14, 78, 345), E. Hilb [Math. Ann. **71**, 78—87 (1912)], and J. Tamarkin [Rend. Circ. Mat. Palermo **34**, 345—382 (1912)], whose method of proof was, however, „analytic“, i. e. operating with various asymptotic estimates. The present abstract method has the advantage of greater simplicity and generality. It can be applied also to some differential-difference operators, integro-differential operators, singular differential operators, and partial differential operators. Some illustrative examples are given in the paper.

B. Sz. Nagy.

**Zitarosa, Antonio: Sulle equazioni funzionali di Volterra-Tonelli.** Ricerche Mat. **3**, 108—126 (1954).

L. Tonelli ha considerato [Bull. Calcutta math. Soc. **20**, 31—48 (1928)] le equazioni funzionali (1)  $q(x) = A[x, q_n^x(y)] + f(x)$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ), e mediante un procedimento che si è rivelato molto efficace anche in altre questioni ha stabilito teoremi di esistenza e teoremi di unicità della soluzione della (1), mentre S. Cinquini (questo Zbl. **7**, 165) ha dimostrato che la soluzione della (1) dipende con continuità



dai dati del problema. Nel presente lavoro l'A. estende all'equazione (1), posta sotto la forma  $q(x) = F[x, q_1^r(y)]$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ) il metodo che si basa sull'applicazione agli spazi astratti del teorema di Brouwer sull'esistenza di un punto unito e stabilisce due teoremi di esistenza e un teorema di analisi funzionale, dal quale segue immediatamente un teorema di esistenza e di unicità, nel qual caso la soluzione può essere determinata mediante le approssimazioni successive. Infine l'A. rileva quali teoremi stabiliti dal Tonelli per la (1) seguono dai propri risultati anche sotto condizioni più ampie. Il relatore fa presente che il lavoro in questione dà adito alla domanda, se, riprendendo in forma raffinata il procedimento del Tonelli, si possano migliorare i risultati che egli aveva raggiunto.

S. Cinquini.

## Praktische Analysis:

Rutishauser, Heinz: Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus. Z. angew. Math. Phys. 5, 496—508 (1954).

In dieser Arbeit bringt Verf. Anwendungen seines Quotienten-Differenzen-Algorithmus (abgek.: QD-Algorithmus); dieselben betreffen: 1. Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch; 2. Summation schlecht konvergenter Reihen; 3. Auflösung algebraischer Gleichungen. Die Abhandlung stützt sich ganz auf die frühere Arbeit (dies. Zbl. 55, 347) — im folgenden zitiert mit I —, von der auch die Bezeichnungen übernommen werden. Es wird je ein Beispiel zu 1, 2. und 3. vorgerechnet, wobei sich zeigt, daß bei 3. die höheren Quotienten  $q_\sigma^{(r)}$  ( $r$  groß) im allgemeinen zu ungenau herauskommen. Aus diesem Grund entwickelt Verf. die sogen. „progressive“ Form des QD-Algorithmus: statt das QD-Schema wie bislang von links nach rechts auszufüllen, beginnt er jetzt mit der ersten Schräglinie, und füllt nach unten auf, und zwar gemäß den Formeln

$$(*) \quad q_\sigma^{(v+1)} = q_\sigma^{(v)} + e_\sigma^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v)}, \quad \sigma = 1, 2, \dots; \quad e_0^{(v+1)} = 0, \quad e_\sigma^{(v+1)} = e_\sigma^{(v)} q_{\sigma+1}^{(v)} / q_\sigma^{(v+1)}.$$

Die in der ersten Schräglinie stehenden Zahlen  $q_\sigma^{(0)}, e_\sigma^{(0)}$  werden in der Weise gewonnen, daß man  $N_1(z)/N(z)$  [ $N(z)$  das gegebene Polynom vom Grade  $n$ ,  $N_1(z)$  irgendein Polynom vom Grad  $\leq n-1$  und nicht identisch 0] in einen  $S$ -Kettenbruch mittels des Euklidischen Algorithmus entwickelt. Die gesuchten Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  von  $N(z)$  erscheinen also als Pole von  $N_1(z)/N(z)$ . Dabei beachte man noch, daß in diesem Falle das QD-Schema nach rechts hin abbricht ( $e_n^{(v)} = 0$  für alle  $v$ ). Dann ergeben sich tatsächlich die gewünschten  $q_\sigma^{(v)}$  ( $v$  groß) ohne wesentliche Genauigkeitsverluste. Vorausgesetzt ist allerdings, daß die Beträge  $\lambda_v$  verschieden voneinander sind; doch lassen sich konjugiert komplexe Wurzeln ebenfalls noch erfassen, und zwar ganz ähnlich wie beim Graeffe-Verfahren, als Wurzeln eines aus dem Algorithmus sich ergebenden quadratischen Polynoms. Um die Konvergenz dieses Verfahrens zu beschleunigen, entwickelt Verf. schließlich noch die folgende Variante des progressiven QD-Algorithmus. Er bemerkt, daß man die Formeln (\*) auch als eine Vorschrift auffassen kann, um aus dem  $S$ -Kettenbruch für  $f_0(z) = f(z)$  die  $S$ -Kettenbrüche  $S_v$  ( $S_0 = S$ ) für die in I, § 5 definierten Funktionen

$f_v(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{S_{v+\kappa}}{z^{\kappa+1}}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) zu gewinnen, und zieht nunmehr auch die zu  $f_v(z)$  gehörigen  $J$ -Kettenbrüche  $J_v$  heran. Spaltet man nämlich die Formeln (\*) in die zwei Formelgruppen

$$(**) \quad \begin{aligned} \alpha_\sigma^{(v+1)} &= q_\sigma^{(v)} + e_\sigma^{(v)}, \quad \beta_\sigma^{(v+1)} = q_{\sigma+1}^{(v)} e_\sigma^{(v)}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n; \quad e_n^{(v)} = 0, \\ q_\sigma^{(v+1)} &= \alpha_\sigma^{(v+1)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \quad e_\sigma^{(v+1)} = \beta_\sigma^{(v+1)} / q_\sigma^{(v+1)}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n; \quad e_0^{(v+1)} = \beta_n^{(v+1)} = 0 \end{aligned}$$

auf, so sind die  $\alpha_\sigma^{(v+1)}, \beta_\sigma^{(v+1)}$  gerade die Bausteine für den  $J$ -Kettenbruch  $J_{v+1}$ , der so in einem Zwischenschritt bei der Berechnung von  $S_{v+1}$  aus  $S_v$  erscheint. Sodann wird ausgenutzt, daß bei einem  $J$ -Kettenbruch durch eine Verschiebung des Ursprungs  $z \rightarrow z^* + t$  die  $\alpha_\sigma$  sich analog gemäß  $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma^* + t$  verändern (die  $\beta_\sigma$  bleiben unverändert), und bei jedem Zwischenschritt der Nullpunkt in die Nähe eines Poles (er heiße  $\lambda_v$ ) verschoben, wobei jeweils  $q_n^{(v)}$  als Näherungswert im betreffenden Koordinatensystem gewählt wird.

E. Mohr.

Rutishauser, Heinz: Une méthode pour la détermination des valeurs propres d'une matrice. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 34—36 (1955).

Für die Bezeichnungen vgl. man das vorstehende Referat. Die dortigen Formeln (\*\*) lassen sich mittels  $n$ -reihiger Matrizen  $L_k, R_k, J_k$  wie folgt schreiben:  $J_k = I_k R_k, J_{k+1} = R_k L_k$ , wobei diese Matrizen bis auf die nachstehend genannten

Schräglinien mit lauter Nullen besetzt sind:  $L_k$ ; Hauptdiagonale:  $q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}$ ; darunter befindliche parallele Schräglinie:  $1, 1, \dots, 1$ ;  $R_k$ ; Hauptdiagonale:  $1, 1, \dots, 1$ ; darüber befindliche parallele Schräglinie:  $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_{n-1}^{(k)}$ ;  $J_k$ ; Hauptdiagonale:  $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}$ ; parallele Schräglinie unterhalb:  $1, 1, \dots, 1$ ; und parallele Schräglinie oberhalb:  $\rho_1^{(k)}, \rho_2^{(k)}, \dots, \rho_{r-1}^{(k)}$  ( $k = r + 1$ ). Geht man also von  $J_0$  aus, spaltet  $J_0$  gemäß  $J_0 = L_0 R_0$  auf, bildet alsdann  $J_1 = R_0 L_0$ , und fährt so fort, so erhält man eine Folge von Matrizen  $J_0, J_1, J_2, \dots$ , die alle dieselben Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  besitzen, und es gilt unter gewissen Voraussetzungen (vgl. I, § 7):  $\lim \lambda_i^{(k)} = \lambda_i$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dieses Verfahren verallgemeinert nun der Verf. wie folgt: ausgehend von einer Matrix  $A_0$  wird  $A_0$  als Produkt zweier Dreiecksmatrizen  $L_0 = (l_{ik}), R_0 = (r_{ik})$ , wo  $l_{ik} = 0$  für  $i < k$  und  $r_{ik} = 0$  für  $i > k$  ist, geschrieben,  $A_0 = L_0 R_0$ , dann  $A_1 = R_0 L_0$  gebildet, darauf wieder  $A_1$  gemäß  $A_1 = L_1 R_1$  aufgespalten, ... und so eine Folge von Matrizen  $A_0, A_1, A_2, \dots$  erzeugt. Ohne Beweis wird das Theorem mitgeteilt: Sei die Matrix  $A$  reell, symmetrisch und habe sie Eigenwerte  $\lambda_i$ , für die  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  gilt; weiter soll kein Eigenvektor auf einer Achse des Koordinatensystems senkrecht stehen. Wird dann bei dem obigen Algorithmus  $A_k$  jeweils so aufgespalten, daß  $R_k = L_k^*$  (Transponierte von  $L_k$ ) ist, so existiert  $\lim A_k$  für  $k \rightarrow \infty$  und liefert eine Diagonalmatrix mit den Elementen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

E. Mohr.

**Falk, Sigurd:** Neue Verfahren zur direkten Lösung algebraischer Eigenwertprobleme. Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 6, 166–194 (1954).

Nach einer einleitenden Übersicht über die Prinzipien der verschiedenen direkten Verfahren zur Behandlung des „allgemeinen“ Eigenwertproblems  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = k \mathfrak{B} \mathfrak{x}$  und einer Zusammenstellung allgemeiner Rechenverfahren des Matrizenkalküls nebst Angaben über die Anzahl der erforderlichen Operationen (Multiplikationen) werden drei neue direkte Verfahren angegeben, von denen namentlich die beiden letzten bemerkenswert sind. Verfahren II ist eine Abwandlung des Hessenberg-Verfahrens auf das allgemeine Eigenwertproblem (gegenüber dem „speziellen“ bei  $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ ) ohne Bilden von  $\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A}$ . Beim Verfahren III handelt es sich um ein — in der Durchführung vom bisher Bekannten abweichendes — Eliminationsverfahren für allgemeine Polynommatrizen  $\mathfrak{P}(k)$ , d. h. solche, deren Elemente Polynome des Parameters  $k$  sind, wobei sich der Polynomgrad sukzessive erhöht. Für die neuen und das bekannte Hessensbergsche Verfahren werden die Operationszahlen einander gegenübergestellt.

R. Zurmühl.

**Kreyszig, E.:** Die Einschließung von Eigenwerten hermitescher Matrizen beim Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 34, 459–469 (1954).

Beim Iterationsverfahren für selbstadjungierte Eigenwertaufgaben wird gewöhnlich nur der letzte Iterationsschritt zur Berechnung genäherter Eigenwerte ausgenutzt. Die vorliegende Arbeit gilt der Frage, um wieviel sich die Genauigkeit dadurch steigern läßt, daß man die zwei letzten Iterationsschritte heranzieht. Als Grundlage dient die Untersuchung des Ref. über die optimalen Einschließungssätze bei einem Iterationsschritt (Wielandt, dies. Zbl. 34, 157) und ihre noch unveröffentlichte Fortsetzung über  $p$  Iterationsschritte, deren Ergebnis hier unter Beschränkung auf den Fall  $p = 2$  mitgeteilt wird. Verf. entwickelt graphische und numerische Verfahren zur Bestimmung aller minimalen Einschließungsintervalle und insbesondere desjenigen unter ihnen, welches die kürzeste Länge besitzt. Dabei ist unter einem Einschließungsintervall (zu drei gegebenen Vektoren  $x_0, x_1, x_2$  mit je  $n$  komplexen Komponenten) ein Intervall der Zahlengeraden zu verstehen, welches von jeder hermiteschen Matrix  $A$  mit den Eigenschaften  $Ax_0 = x_1, Ax_1 = x_2$  mindestens einen Eigenwert enthält; und ein Einschließungsintervall heißt minimal, wenn es kein Einschließungsintervall als echten Teil enthält. Um Rechnungen mit erhöhter Stellenzahl zu vermeiden, macht der Verf. die Formeln auch für das in letzter Zeit wiederholt untersuchte modifizierte Iterationsverfahren mit Orthogonalisierung zurecht (vgl. z. B. W. Karush, dies. Zbl. 43, 16). H. Wielandt.

**Ludwig, Rudolf:** Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. II. Z. angew. Math. Mech. **34**, 404—416 (1954).

Die in Teil I (dies. Zbl. **55**, 349) behandelten Iterationsmethoden werden auf Systeme von  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten übertragen. *J. Weissinger.*

**Stelson, H. E.:** Finding the root of an equation by iteration. Skand. Aktuarietidskr. **54**, 10—18 (1954).

Sei (1)  $f(x) = x$  die zur Lösung vorgelegte Gleichung. Das Iterationsverfahren, beginnend mit dem Wert  $x_0$  (nahe dem mutmaßlichen Wert einer reellen Wurzel) führt zu der Folge  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ . Gleich ob diese konvergiert oder nicht, nach Steffensen (dies. Zbl. **7**, 26) liegt dann, falls  $f(x)$  monoton fallend ist, zwischen  $x_n$  und  $x_{n+1}$  stets eine Wurzel von (1), und eine Annäherung an diese Wurzel läßt sich folgendermaßen erreichen: In (1) ersetze man  $f(x)$  durch ein Newtonsches Interpolationspolynom für diese Funktion und löse nach  $x$ . In einfachsten Falle wählt man das lineare Interpolationspolynom durch  $(x_0, x_1)$  und  $(x_1, x_2)$  und findet so (nach Steffensen l. c. (7)) den Wert  $x = x_0 - 1 \cdot x_0^2 / 12 \cdot x_0$ . So ergibt sich ein zu kleiner Wert. Benutzt man in gleicher Weise das Newtonsche Polynom durch  $(x_0, x_1)$  und  $(x_2, x_3)$ , so erhält man einen zu großen Wert  $x' = x_0 + \Delta x_0 (\Delta x_0 + \Delta x_1) / (\Delta x_1 + \Delta x_2)$ . Der gesuchte Wert liegt zwischen diesen beiden Werten. Größere Genauigkeit wird erreicht, indem man in ähnlicher Weise Newtonsche Polynome höherer Ordnung benutzt. Die Methode wird durch graphische Darstellungen und durch numerische Beispiele erläutert. *H. Schwerdtfeger.*

**Zeuli, Tino:** Perfezionamento del metodo di iterazione per la ricerca delle radici reali delle equazioni o dei sistemi di equazioni. Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. fis. mat. natur. **88**, 259—264 (1954).

Es handelt sich um die — vom Ref. in seinem Buch „Praktische Mathematik“ (dies. Zbl. **50**, 346) S. 26ff. behandelte — Konvergenzbeschleunigung der iterativen Lösung einer Gleichung  $x = q(x)$ , die durch die Umformung  $x = m \cdot x + q(x) - m \cdot x$  mit  $q'(X) = m$  ( $X = \text{Wurzel}$ ,  $m \neq 1$ ) herbeigeführt wird, sowie um einige Abwandlungen dieser Methode, die hier auch auf Gleichungssysteme mehrerer Unbekannter übertragen wird. *R. Zurmühl.*

**Ostrowski, A.:** On two problems in abstract algebra connected with Horner's rule. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 40—48 (1954).

Das Horner'sche Verfahren zur Berechnung von  $f_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  erfordert genau  $n$  Additionen und  $n$  Multiplikationen. Verf. zeigt, daß jedes beliebige Verfahren mindestens  $n$  Additionen und — vermutlich — in folgendem erweitertem Sinn auch  $n$  Multiplikationen benötigt. Sei  $M_0 = [1, x, a_0, a_1, a_2, \dots]$  der von den Unbestimmten  $x, a_0, a_1, a_2, \dots$  über einem beliebigen Konstantenkörper der Charakteristik 0 oder  $p$  aufgespannte Modul; der Modul  $M_{r+1}$  entstehe aus  $M_r$  ( $r = 0, 1, \dots$ ) durch Adjunktion eines (nicht schon in  $M_r$  gelegenen) Produkts  $m_r m'_r$  zweier Elemente  $m_r, m'_r$  von  $M_r$ . Dann lautet die (für  $n \leq 4$  bewiesene) Behauptung, daß für kein  $n > 1$  eine Modulkette  $M_r$  existiert derart, daß  $f_n(x)$  in einem  $M_k$  mit  $k < n$  liegt. Als zweiter Hauptsatz wird für  $n = 2, 3$  bewiesen, daß das (etwas verallgemeinerte) Horner'sche Verfahren die einzige mit  $n$  Multiplikationen auskommende Methode ist. Für Polynome in mehreren Variablen lassen sich ähnliche Betrachtungen durchführen. *J. Weissinger.*

**Warmus, M.:** On a numerical-graphic method illustrated by an example from the kinematics of type I and radial engines. Zastosowania Mat. **2**, 67—81, russische und engl. Zusammenfassgn. 81—82 (1954) [Polnisch].

The paper is an example of overcoming numerical difficulties in solving a definite system of equations:

$$(1) \quad \alpha = \alpha_i + \gamma_i, \quad \sin \beta = -\lambda \sin \alpha, \quad \psi_i = \beta - \varphi_i,$$

$$\sin \beta_i = -\lambda_i \sin \alpha_i - \eta_i \sin \psi_i, \quad \sin(\alpha_i - \beta_i) = (\bar{\eta}_i / \cos \beta) \cos \alpha \sin(\psi_i - \beta_i),$$

where  $\lambda, \lambda_i, \eta_i, \gamma_i, \varphi_i$  are known and  $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_i, \psi_i$  are sought. In order to solve equation (1)



the author suggests an iteration method, proves the convergence of this method, the uniqueness of the solution, and also gives the estimate of errors obtained by the iteration of approximations.

Aus der engl. Zusammenfassg.

**Bukovics, Erich:** Beiträge zur numerischen Integration. III. Nachträge. Monatsh. Math. 58, 258—265 (1954).

Die beiden gleichnamigen Arbeiten Teil I und II (dies. Zbl. 51, 350) werden in mehrfacher Hinsicht ergänzt.

R. Zurmühl.

**LaFara, Robert L.:** A method for calculating inverse trigonometric functions. Math. Tables Aids Comput. 8, 132—139 (1954).

Die vom Verf. vorgeschlagene Methode zur Berechnung des Winkels  $y$  aus  $\cos y$  und  $\sin y$  beruht auf der Beziehung  $y = \pi \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu} 2^{-\mu}$ , wobei  $C_{\mu} = 0$  für  $\sin(2^{\mu} y) > 0$ , bzw.  $= 1$  für  $\sin(2^{\mu} y) < 0$ , bzw.  $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2^{\mu} y)$  für  $\sin(2^{\mu} y) = 0$ . Dabei können  $\cos(2^{\mu} y)$  und  $\sin(2^{\mu} y)$  durch fortlaufendes Quadrieren von  $e^y$  berechnet werden, wie überhaupt die ganze Methode an die Log-Berechnung durch fortlaufendes Quadrieren erinnert. — Verf. gibt auch das Rechenprogramm für die IBM-Rechenmaschinen und 605 an, für welche die beschriebene Methode sehr geeignet erscheint.

H. Rutishauser.

**Romberg, W. und H. Viervoll:** Darstellung eines Kurvenstückes durch wenige Exponentialfunktionen. (Differentialgleichungsmethode.) Arch. Math. Naturvid. 52, 57—63 (1954).

**Swain, R. L.:** Bounded models of the Euclidean plane. I. Condensed graphs. Amer. math. Monthly 61, 21—26 (1954).

**Gans, David:** Bounded models of the Euclidean plane. II. A circular model of the Euclidean plane. Amer. math. Monthly 61, 26—30 (1954).

**May, K. O.:** Bounded models of the Euclidean plane. III. The use of condensed graphs in analytic geometry. Amer. math. Monthly 61, 31—32 (1954).

Swain diskutiert Abbildungen der euklidischen Ebene auf Quadrate, besonders durch die Funktion  $t/(1+t)$ , und zeigt wie derartige Funktionen verwendet werden können, um asymptotische Beziehungen graphisch klar darzustellen. Gans diskutiert die Abbildung der euklidischen Ebene mittels Zentralprojektion vom Mittelpunkt einer die Ebene berührenden Kugel, gefolgt von einer orthogonalen Projektion der auf der Kugel gefundenen Figuren auf die ursprüngliche Ebene. May beschreibt die Darstellung von Koordinatenpapier für die von Gans behandelte Abbildung und stellt einige Funktionen, wie Logarithmus, Exponentialfunktion, Sinus, graphisch dar.

E. M. Bruins.

**Kennedy, E. C.:** Approximation formulas for elliptic integrals. Amer. math. Monthly 61, 613—619 (1954).

Werden mit  $1 - k^2 = h \rightarrow 0$  die Integranden  $dE = d\Phi \cos \Phi (1 + h \tan^2 \Phi)^{1/2}$  bzw.  $dF = (d\Phi \cos \Phi) (1 + h \tan^2 \Phi)^{-1/2}$  nach steigenden Potenzen von  $h$  zerlegt, hinsichtlich  $\Phi$  umgeordnet und integriert, so bleibt z. B. für die 5. Näherung mit  $0 \leq q \leq 42^\circ$  und  $\frac{1}{2} \leq k^2 \leq 1$  der Rest  $|E(q, k) - E_5| \leq 12 \cdot 10^{-6}$ . Entsprechend mit  $\frac{k^2}{2 - k^2} = m$  und  $2 \int_0^q \frac{d\Phi}{1 + m \cos 2\Phi} = E(q, k)$ , wenn  $k \rightarrow 0$  geht. Vergleich mit den entsprechenden Ergebnissen der Integraltafeln von Peirce.

W. Maier.

**Dengler, Max:** Numerische Lösung des Integrals  $\int_C f(u) \{w(u) - w(q)\}^2 du$ . Z. angew. Math. Mech. 34, 471—474 (1954).

Um das in der Stabilitätstheorie laminarer Strömungen auftretende, längs eines reellen — lediglich die reelle Singularität  $u = q$  auf einem Halbkreis umgehenden — Wegs genommene Titelintegral numerisch auszuwerten, wird die Singularität so abgespalten, daß nur numerische Integrationen über zwei stetige Funktionen auszu-

führen sind. Dabei muß man außer  $f(u)$  an diskreten Stellen noch  $f'(q)$ ,  $w(q)$ ,  $w'(q)$ ,  $w''(q)$  kennen. Die Genauigkeit des Verfahrens wird an zwei Zahlenbeispielen demonstriert. Eine zweite Auswertungsmethode sowie — für  $f(u) = 1$  — der Fall eines unendlichen Integrationsintervalles werden kurz behandelt.

*J. Weissinger.*

**Hartree, D. R.:** The evaluation of a diffraction integral. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 567—574 (1954).

Die Auswertung des bei einem Beugungsproblem auftretenden Integrals

$$I_n(x, y) = \frac{1}{2\beta} \int_{-\beta}^{+\beta} [\exp i(x \cos \Theta - y \sin \Theta)] \cos^n \Theta d\Theta$$

für  $n = 1$  bei festem  $\beta$  wird besprochen unter dem Gesichtspunkt, daß  $I_1(x, y)$  nur als Funktion von  $y$  für einige weiter auseinander liegende  $x$ -Werte von Interesse ist. Für kleine Werte von  $x$  und  $y$  wird die Auswertung mit der Gaußschen Quadraturformel vorgenommen. Genauere Untersuchungen über Fehler bei verschiedenen Stützpunktzahlen und verschiedenen Intervalllängen werden im Vergleich mit einer Fehlerabschätzung des Restgliedes angestellt. Für größere Werte von  $x$  oder  $y$  bzw.  $x$  und  $y$  wird eine andere Vorgehensweise herangezogen. Man kann für  $I_0$  eine Differentialgleichung bezüglich  $y$  bei festem  $x$  aufstellen und aus dieser durch numerische Integration  $I_0$  gewinnen. Eine weitere Beziehung ermöglicht dann die Bestimmung von  $I_1$ . Dieser Weg ist numerisch einfacher, als für  $I_1$  direkt die Differentialgleichung zu lösen. Die numerische Auswertung wurde auf dem EDSAC (Mathematical Laboratory, University of Cambridge) vorgenommen. *H. Unger.*

**Ho, Lo:** A new theory of interpolation for function of  $n$  variables. *Acta math. Sinica* **4**, 125—141 und engl. Zusammenfassg. 142 (1954) [Chinesisch].

This paper describes the construction of a new function  $\sum_{i=1}^r H_n(t, u, v, \dots, z)_i$  of  $n$  variables  $t, u, v, \dots, z$ , which becomes identical to the given function  $f(t, u, v, \dots, z)$  of  $n$  variables when  $(n-1)$  of the variables are each assigned their own specific values used in the construction of the function. In case of two variables, the surfaces of  $f(t, u)$  and  $\sum_{i=1}^r H_2(t, u)_i$  coincide along  $4r$  sections at the values

$$t_1, t'_1, t_2, t'_2, \dots, t_r, t'_r, \quad u_1, u'_1, u_2, u'_2, \dots, u_r, u'_r.$$

If both are continuous and single-valued, actual examples indicate that the new function  $\sum_{i=1}^r H_2(t, u)_i$  is a very close approximation of the original function  $f(t, u)$  within the region of cross-lines of coincidence.

*Autoreferat.*

**Lukaszewicz, L.:** Electronic analyser of differential equations „ARR“ and some of its applications. *Zastosowania Mat.* **2**, 83—97, russische und engl. Zusammenfassgn. 98 (1954) [Polnisch].

The author gives a brief account of the operating principles and range of applications of the differential equations analyser „ARR“, which is now being constructed by the Division of Mathematical Instruments of the Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences in Warsaw. The analyser is built on the principle of the so-called „electrical realisation“, which consists in forming for a given equation an electric system whose behaviour is governed by that equation, and then measuring characteristics of that system.

*Autoreferat.*

**Alskerov, S. A. und K. M. Čal'jan:** Zur Benutzung des elektrischen Modells EM-8 als Integrierapparat. *Akad. Nauk Azerbajdž. SSR, Izvestija* **1954**, Nr. 1, 15—20 (1954) [Russisch].

**Maruašvili, T. L.:** Bestimmung aller reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen mit Hilfe eines Integrators. *Soobsčenija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR* **15**, 265—270 (1954) [Russisch].

Unter einem Integrator wird ein elektrisches Gerät verstanden, daß die Lösung einer Differentialgleichung auf einem Bildschirm in einer Form liefert, die den Einfluß von Änderungen der Koeffizienten oder der Anfangsbedingungen auf die Lösung

sofort sichtbar werden läßt. Verf. beschreibt, wie ein Integrator, der für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten erdacht ist, zur Bestimmung der einfachen und mehrfachen reellen Nullstellen von Polynomen benutzt werden kann. Man betrachtet dazu die Differentialgleichung, deren charakteristische Funktion das Polynom ist.

W. Schulz.

Goodell, John D.: The relations between logical, mathematical and computing machine systems. *J. comput. Systems* **1**, 243—254 (1954).

A general survey, in note form, of the topics listed in the title.

J. C. Shepherdson.

• Speiser, Ambros. P.: Entwurf eines elektronischen Rechengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernis eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit. (Mitteil. Inst. angewandte Math. Eidgenöss. Techn. Hochschule Zürich. Nr. 1.) 2. unveränderte Auflage. Basel/Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1950 und 1954. 54 S.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in dies. Zbl. **40**, 207.

Freedman, A. L.: Elimination of waiting time in automatic computers with delay-type stores. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 426—438 (1954).

Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, daß bei Rechenautomaten mit Hg-Tank- oder Magnettrommel-Speicher ein Teil der totalen Rechenzeit für das Aufsuchen der Rechengrößen und Operationsbefehle im Speicher aufgewendet werden muß (sog. Suchzeit). Es ist ferner bekannt, daß durch geeignete Verteilung des Zahlenmaterials auf die verfügbaren Zellen ein beträchtlicher Teil der Suchzeit eliminiert werden kann. Verf. diskutiert die möglichen Maßnahmen und gibt den Zeitgewinn für verschiedene Maschinentypen an. — Ref. erlaubt sich darauf hinzuweisen, daß dieser Zeitgewinn durch einen erheblichen Mehraufwand beim Vorbereiten erkauft werden muß.

H. Rutishauser.

Comét, Stig: On the machine calculation of characters of the symmetric group. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund **1953**, 18—23 (1954).

Tables of the characters of the symmetric group up to and including the degree 14 are known. For higher values these tables would become too extensive, but occasionally some characters are required for practical purposes. The author gives a flow diagram for the electronic computation of an arbitrary character associated with two partitions  $\varrho$  and  $z$  (class) of  $n$ . The method used is a repeated application of the Murnaghan-Nakayama recursion formula [see Nakayama, *Japanese J. Math.* **18**, 89—108 (1941)],  $\chi(\varrho, z) = \sum_r \chi(\varrho_r, z_1) (-1)^{l_r}$  where  $z_1$  arises from  $z$  by delating a row of length  $k$  and  $\varrho_r$  from  $\varrho$  by removing the  $r$ -th hook of length  $k$  ( $l_r$  denotes the leglength of the hook (see J. S. Frame, G. de B. Robinson and R. M. Thrall, this Zbl. **55**, 254)). By repeating this we get  $\chi(\varrho, z)$  as a sum of  $\pm 1$  since  $\chi(0, 0)$  is defined as 1 (and an empty sum is zero). During the calculation it is necessary to represent certain partitions in the memory of the machine. Of course one should minimize the space used for the storing, together with the time for reading the component and hook lengths. To represent a partition, say 6, 4, 2, 1, 1, 1, the author uses 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 in a 20 digit memory, thus  $n$  places are required for a partition of  $n$ . Though it is far from the theoretical minimum, this method is easy to handle.

J. Verhoeff.

• Seeliger, O.: A. L. Crelle's Rechentafeln. Neudruck. Berlin: W. de Gruyter 1954. VII, 508 S. DM. 36,—.

Es ist sehr zu begrüßen, daß diese bewährten Rechentafeln, welche alle Produkte mit Faktoren zwischen 1 und 1000 in übersichtlicher Darstellung enthalten, wieder verfügbar sind. Wenn auch der Gebrauch von Rechenmaschinen sich mehr und



mehr ausbreitet, so bleiben doch viele Gelegenheiten, bei denen man solche Tafeln mit Nutzen heranziehen wird. Druck und Ausstattung sind vorzüglich.

*J. Meixner.*

●Faddeeva, V. N. und N. M. Terent'ev: **Tafeln der Werte der Funktion**

$w(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right)$  von einem komplexen Argument. Unter Redaktion von V. A. Fok. (Akad. Nauk SSSR, Mat. Inst. Steklov: Mathematische Tafeln, Nr. 3.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 268 S. R. 19.70 [Russisch].

$u(x, y)$  sei der Realteil,  $v(x, y)$  der Imaginärteil der im Titel genannten Funktion  $w(z)$  ( $z = x + iy$ ). Der erste Teil der Tafel enthält die Werte von  $u$  und  $v$  im Quadrat  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 3$  mit Schrittlängen von 0.02 und bis zu den Differenzen zweiter Ordnung. Der zweite Teil umfaßt die Gebiete  $3 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 3$  und  $0 \leq x \leq 5$ ,  $3 \leq y \leq 5$  mit Schrittlängen von 0.1 und ebenfalls bis zu den Differenzen zweiter Ordnung. In beiden Teilen werden für  $u$  und  $v$  6 Dezimalen angegeben. Zur Berechnung in  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 1$  wurde die Taylorsche Reihe verwendet. In  $0 \leq x \leq 5$ ,  $1 \leq y \leq 5$  benützt man die Integraldarstellung

$$w(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{z-t} dt, \text{ gültig für } y > 0, \text{ und wendet die Eulersche Summenformel an.}$$

Anwendungsgebiet der Tafel ist insbesondere die theoretische Physik (Quantenmechanik, Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen). Übrigens wurde kürzlich die Funktion  $e^{-z^2} \int_0^z e^{-t^2} dt$  im Komplexen ebenfalls ausgiebig tabelliert (K. A. Karpov, dies. Zbl. 56, 122).

*L. Schmetterer.*

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Kappos, Demetrios A.: Die Totaladditivität der Wahrscheinlichkeit. Bull. Soc. math. Grèce 28, 63—80 (1954).

Ein Wahrscheinlichkeitsfeld  $(F, w)$  besteht hier aus einem Booleschen Verband  $F$  mit einer Einheit  $e$  und einer in  $F$  additiven und strikt positiven Wahrscheinlichkeit  $w$  mit  $w(e) = 1$ . Ein freies Wahrscheinlichkeitsfeld von überabzählbar vielen Versuchen bildet ein Beispiel, in dem sich auf  $F$  keine  $\sigma$ -additive und strikt positive Wahrscheinlichkeit definieren läßt. Der Verf. behandelt nun zwei Darstellungen  $x \mapsto x^*$  von  $(F, w)$  durch einen aus Teilmengen einer Menge  $e^*$  bestehenden Booleschen Mengenverband  $F^*$  und eine Wahrscheinlichkeit  $w^*$  auf  $F^*$ , die im mengenalgebraischen Sinne  $\sigma$ -additiv ist, sich also auf den kleinsten Booleschen  $\sigma$ -Mengenverband  $\hat{F}^*$  über  $F^*$  fortsetzen läßt: 1. (Unter der Voraussetzung,  $F$  habe eine Kette zur Basis),  $e^* = [0, 1]$ ,  $F^*$  besteht aus Vereinigungen halboffener Intervalle,  $w(a)$  ist der Inhalt von  $a^*$  (Intervalldarstellung). 2.  $F^*$  ist die Stonesche Darstellung von  $F$ , insbesondere unabhängig von  $w$  (universelle Darstellung). In beiden Fällen bleibt der Begriff des Versuchs nicht erhalten und die Erweiterung von  $w^*$  auf  $\hat{F}^*$  ist nicht mehr strikt positiv. Diese Nachteile werden bei der Einbettung von  $F$  in die vollständige Hülle  $\hat{F}$  hinsichtlich der Metrik  $r(x, y) = w((x \vee y) - (x \wedge y))$  und Fortsetzung von  $w$  zu einer  $\sigma$ -additiven Wahrscheinlichkeit auf  $\hat{F}$  vermieden.

*K. Krickeberg.*

Helphen, Étienne: Sur l'analyse intrinsèque d'une distribution. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1265—1266 (1954).

Verf. führt für den Fall einer nicht ordnungsfähigen Aufteilung mit Wahr-

scheinlichkeiten  $p_i$  die „intrinsike charakteristische Funktion“  $\psi(s) = \sum_i p_i^{1+s}$  ein und definiert bei abzählbar unendlich vielen Klassen mittels einer Hilfsvariablen  $x$   $\psi(s) = \int [f(x)]^{1+s} dx$  bzw.  $\psi(s) = \iint [f(x, y)]^{1+s} dx dy$ . Es werden Invarianzeigenschaften angegeben und die durch die Ableitungen  $\psi^{(s)}(0)$  gegebenen intrinsiken Momente betrachtet, insbesondere die Entropie  $\psi'(0)$ . *M. P. Geppert.*

**Fréchet, Maurice: Interdépendance du centre et du rayon empiriques de vari-  
ation de  $n$  observations indépendantes.** I. *Studies Math. Mech.*, presented to Richard von Mises, 285—294 (1954).

Verf. beweist unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, daß für un-  
abhängige gleichverteilte Zufallsvariable  $X_i$  die Größen  $M_n = \frac{1}{2} (\max X_i + \min X_i)$ ,  
 $E_n = \frac{1}{2} (\max X_i - \min X_i)$  für alle  $n$  niemals unabhängig sein können. Weitere  
Ergebnisse dieser Art werden angekündigt. *D. Morgenstern.*

**Plackett, R. L.: A reduction formula for normal multivariate integrals.** *Bio-  
metrika* **41**, 351—360 (1954).

Sei  $\varphi_n(x_1, \dots, x_n; c_{11}, c_{12}, \dots, c_{nn}) = (2\pi)^{-n/2} \sqrt{C} \cdot \exp(-x' C x/2)$  die stan-  
dardisierte  $n$ -dimensionale Normalverteilung mit Kovarianzmatrix  $C^{-1} = R = \{\rho_{ij}\}$   
und

$$\Phi_n(a_1, \dots, a_n; c_{11}, c_{12}, \dots, c_{nn}) = \int_{a_1}^{\infty} \dots \int_{a_n}^{\infty} \varphi_n dx_1 \dots dx_n.$$

Verf. beweist mit Hilfe der entsprechenden charakteristischen Funktion die bisher  
nicht für beliebige  $n$  bekannte Gültigkeit des Gleichungssystems  $\partial \varphi_n / \partial \rho_{ij}$   
 $\partial^2 \varphi_n / \partial x_i \partial x_j$  und leitet aus ihr eine Reduktionsformel

$$\Phi_n(P) - \Phi_n(K) = \sum_{i < j} \int_{z_{ij}}^{\rho_{ij}} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \rho_{ij}}(L) d\lambda_{ij}$$

her, welche  $\Phi_n(P)$  für die als Punkt  $P$  im  $\binom{n}{2}$ -dimensionalen Raum gedeutete be-  
liebige Kovarianzmatrix  $\{\rho_{ij}\}$  zurückführt auf  $\Phi_n(K)$  für eine spezielle geeignete  
Kovarianzmatrix  $\{z_{ij}\}$ ; hierbei sind  $\lambda_{ij}(t) = t \rho_{ij} + (1-t) z_{ij}$  die Koordinaten  
von  $L$  und die Integration erfolgt langs der Geraden  $KP$ . Bei geeigneter Wahl von  $K$   
lassen sich auf Grund dieser Formel  $\Phi_3$  und  $\Phi_4$  auf einfache Integrale bereits tabulier-  
ter Funktionen und allgemein  $\Phi_n$  auf Integrale von höchstens halb so hoher Vielfach-  
heit zurückführen. Für  $a_1 = \dots = a_n = 0$  umfaßt die vereinfachte Formel  
Schläflis (1858) Resultate als Spezialfall. *M. P. Geppert.*

**Frenkiel, François N. and James W. Follin jr.: On multivariate normal  
probability distributions.** *Studies Math. Mech.*, presented to Richard von Mises  
295—300 (1954).

Für drei gegenseitig unabhängig mit Mittelwerten  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  und Varianzen  
 $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$  normal verteilte Variablen  $x, y, z$  leitet Verf. die Verteilung von  $|x^2 + y^2$   
mit  $\mu_x \neq 0, \mu_y = 0, \sigma_x \neq \sigma_y$  und die von  $|x^2 + y^2 + z^2$  mit  $\mu_x \neq 0, \mu_y = \mu_z = 0,$   
 $\sigma_x \neq \sigma_y = \sigma_z$  her. Für erstere wird die Funktion

$$Y_0(a, b) = \int_0^{2\pi} \exp(a \cos \theta + b \cos^2 \theta) d\theta / 2\pi$$

herangezogen und mittels Sattelpunkt-Methode approximiert. Letztere hingegen  
führt auf die bereits von T. J. Stieltjes [*Acta math.* **9**, 167—176 (1886)] tabulierte

Funktion  $F(x) = \exp(-x^2) \cdot \int_0^x \exp(u^2) du$ . *M. P. Geppert.*

**Laha, R. G.: On some problems in canonical correlations.** *Sankhya* **14**, 61—66  
(1954).

Es liegen zwei Variablen-Sätze  $x_1, \dots, x_p; x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$  ( $p \leq q$ ) vor, die simultan  $(p+q)$ -dimensional normal verteilt seien mit der Covarianz-Matrix:

$$\begin{pmatrix} p & q \\ \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Die von H. Hotelling (dies. Zbl. 15, 407) definierten kanonischen Korrelationen sind dann durch die Quadratwurzeln der  $p$  Wurzeln  $\theta_i$  ( $0 < \theta_1 < \dots < \theta_p < 1$ ) der Determinantengleichung  $|\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma'_{12} - \theta \cdot \Sigma_{12}| = 0$  gegeben. Verf. beweist folgende Sätze: Satz 1: Durch Hinzufügen von  $r$  weiteren mit  $x_1, \dots, x_{p+q}$  simultan normal verteilten Variablen zum  $q$ -Variablensatz kann die Summe der Quadrate der kanonischen Korrelationen nicht verkleinert werden; d. h.  $\Sigma \Phi_i \leq \Sigma \theta_i$ , wo  $\Phi_i$  die kanonischen Korrelationen der erweiterten Variablensätze sind. — Satz 2: Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß besagte Quadratsumme bei der Hinzufügung der  $r$  Variablen konstant bleibe, ist, daß alle partiellen kanonischen Korrelationen zwischen  $p$ - und  $r$ -Variablensatz bei Ausschaltung des  $q$ -Satzes verschwinden. Der Beweisgang beruht auf Betrachtung der einschlägigen Covarianz-Matrizen und Determinantengleichungen. M. P. Geppert.

**Teicher, Henry:** On the multivariate Poisson distribution. Skand. Aktuarietidskr. 54, 1—9 (1954).

Campbell und Aitken haben in den Jahren 1934 bzw. 1936 die 2-fache „Poisson correlation function“ eingeführt. Der Verf. definiert die entsprechende  $m$ -fache Verteilung und zeigt, wie man sie rekursiv berechnen kann. Ebenso diskutiert er ihr asymptotisches Verhalten für gewisse Folgen solcher Verteilungen. W. Saxon.

**Laha, R. G.:** On a characterization of the gamma distribution. Ann. math. Statistics 25, 784—787 (1954).

Verf. beweist den Satz: Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig voneinander der gleichen Verteilungsfunktion mit endlichem zweiten Moment folgende Zufallsvariablen. Wenn der bedingte Erwartungswert von  $\Sigma a_{ij} X_i X_j$  ( $\Sigma X_i$ )<sup>2</sup>, wobei die Elemente der Matrix  $(a_{ij})$  der Bedingung  $\Sigma a_{ii} = \Sigma a_{ij} \cdot n$  unterliegen, für einen festen Wert von  $\Sigma_{i=1}^n X_i$  gleich dem unbedingten Erwartungswert ist, folgt jedes  $X_i$  einer  $I'$ -Verteilung. Der Beweis beruht darauf, daß aus den Voraussetzungen des Satzes eine Differentialgleichung 2. Ordnung für  $\psi = \ln q(t)$  gewonnen wird [wobei  $q(t)$  die charakteristische Funktion  $E(e^{itX})$  ist], deren Lösung (mit den richtigen Anfangsbedingungen) auf die charakteristische Funktion einer  $I'$ -Verteilung führt. M. P. Geppert-O. Ludwig.

**Gatti, Y. et T. Consoli:** Sur la densité de probabilité du produit de variables aléatoires de Pearson du type III. Studies Math. Mech., presented to Richard von Mises, 301—309 (1954).

Verff. geben für das Produkt zweier Zufallsvariablen vom Pearsonschen Typ III ( $I'$ -Variable bei Cramér) die Verteilungsdichte (mit Bessel-Funktionen) und die Fouriertransformierte (mit Whittackerschen Funktionen) an. Für die Dichte des Produktes dreier solcher Zufallsvariablen wird nach dem Sattelpunktsverfahren ein Näherungsausdruck hergeleitet; im Fall dreier gleichverteilter Variablen mit Dichte proportional  $e^{-x/2} x^{2-1}$  wird ein kleines Hilfsnomogramm geboten.

D. Morgenstern.

**Castoldi, Luigi:** Un problema generale di prove ripetute. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 24, 21—27 (1954).

Verallgemeinertes Schema (diejenigen von Bernoulli, Poisson, Lexis und Coolidge als Spezialfälle enthaltend): man betrachtet verschiedene Hypothesen mit beliebigen Wahrscheinlichkeiten, mit veränderlicher Versuchszahl, und mit



willkürlichen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versuche. Die Streuung  $\sigma^2$  ist stets vermöge von Gliedern entwickelbar, die bzw. die Bernoullische, Poissonsche, Lexische Komponente (wie bei Coolidge) darstellen, nebst einer anderen, die der Veränderlichkeit der Versuchsanzahl entspricht.

B. de Finetti.

**Yntema, L.:** Einiges zur Wahrscheinlichkeitsansteckung. Verzeekerings-Arch., Bijvoetsel 31, 86—91 (1954).

Die von F. Eggenberger (1924) eingeführte Wahrscheinlichkeitsansteckung fußt auf dem folgenden Urnenschema. Eine Urne enthält  $R$  rote,  $S$  schwarze Kugeln ( $R + S = N$ ); nach Ziehung einer Kugel werden  $(1 + \lambda)$  Kugeln von gleicher Farbe zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit, daß in  $n$  Ziehungen  $r$  mal rot und  $s$  mal schwarz gezogen wird ( $r + s = n$ ), ist, wenn

$$p = R/N, \quad \sigma = S/N, \quad \delta = \lambda/N, \quad \text{gleich} \quad P_{r(n)} = \binom{p\delta + r - 1}{r} \binom{\sigma\delta + s - 1}{s} \bigg/ \binom{1/\delta + n - 1}{n}.$$

Der Verf. zeigt, daß sich für die Grenzfunktion ( $n \rightarrow \infty$ ) eine Pólya-Verteilung ergibt, wenn folgende Verallgemeinerung des ursprünglichen Urnenschemas getroffen wird: Nach Ziehung einer roten (bzw. schwarzen) Kugel werden  $(1 + \lambda_r)$  rote bzw.  $(1 + \lambda_s)$  schwarze Kugeln zurückgelegt.

E. Zwinggi.

**Rutherford, R. S. G.:** On a contagious distribution. Ann. math. Statistics 25, 703—713 (1954).

Verf. behandelt den Spezialfall der Woodburyschen Verteilung (Woodbury, dies. Zbl. 41, 250)  $p_x = a + bx$  = Wahrsch. für Erfolg nach  $x$  bisherigen erfolgreichen Urnenziehungen, und behandelt das Problem der Anpassung an gegebene Werteverteilungen und die Approximation durch die negative binomische Verteilung und nach Gram-Charlier. Der Nutzen dieses Verteilungsschemas wird an zwei empirischen Zahlenreihen, die Güte der Annäherungen in einer Tabelle aufgezeigt.

D. Morgenstern.

● **Lévy, P.:** Théorie de l'addition des variables aléatoires. (Monographies des probabilités.) 2. éd. Paris: Gauthier-Villars 1954. XX, 387 p. fr. 4500, —.

Im wesentlichen ist die vorliegende neue Auflage ein Abdruck der ersten Auflage, die 1937 als erste der „Monographies des Probabilités“ erschien (vgl. dies. Zbl. 16, 170), da Verf. eine wirksame Neubearbeitung, die dem seit 1937 auf diesem Gebiete erzielten großen Fortschritt ohne Sprengung des Rahmens voll Rechnung trüge, für unratsam hält und es vorzieht, auf sein in derselben Monographienreihe erschienen Buch (P. Lévy, dies. Zbl. 34, 226) zu verweisen. Abweichungen finden sich in der Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze (Seite 186—197), die durch einschlägige Arbeiten des Verf. und von A. Khintchine sowie eine Formel von M. Loève bereichert wurde; ferner in dem Kapitel (IX) über Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Theorie der Kettenbrüche, wo Verf. (Seite 316—325) die Theorie der Khintchine-Summen vertieft; schließlich in der Theorie der charakteristischen Funktionen, und zwar beim Beweis der Umkehrung des Fourier-Stieltjes-Integrals (Seite 38) und in der ergänzenden Note über analytische charakteristische Funktionen (Seite 73). — Am Schluß sind zwei selbständige Anhänge hinzugefügt worden. Der erste ist der Abdruck einer neueren eigenen Arbeit [P. Lévy, Bull. Sci. math., II. Sér. 1, 9—40 (1953)]. Der zweite (Seite 359—379) gibt einen kurzen Abriß der Theorie der stochastischen Prozesse und stellt den Standpunkt des Verf. demjenigen von J. L. Doob (Stochastic processes, New York 1953) vergleichend gegenüber.

M. P. Geppert.

**Teicher, Henry:** On the factorization of distributions. Ann. math. Statistics 25, 769—774 (1954).

Eine Familie  $\tilde{\mathcal{F}}$  von Verteilungsfunktionen  $F$  heiße faktorabgeschlossen (f.a.), wenn aus  $F \in \tilde{\mathcal{F}}$ ,  $F = F_1 * F_2$  folgt  $F_i \in \tilde{\mathcal{F}}$ . Verf. zeigt: Bildet man, von  $X_i$ , wenn aus  $F \in \tilde{\mathcal{F}}$ ,  $P(X_i = b_i) = q_i$  ( $p_i + q_i = 1$ ) mit  $a_i - b_i = c$  oder  $= 2c$  durch Addition endlich vieler solcher Zufallsvariablen, so ist ihre Verteilungsfamilie

$\mathcal{F}_{c,2c}$  f. a. Dasselbe gilt auch noch, wenn man alle  $p_i = p$  festhält. Damit ist auch die Klasse der binomischen Verteilungen als f. a. nachgewiesen (gilt auch für polynomische Verteilungen). Außer den Verteilungen, die man wie oben, aber ohne die Einschränkung für  $a_i - b_i$  erhält, werden noch gewisse Klassen unendlich zerlegbarer Verteilungen als nicht f. a. aufgezeigt. *D. Morgenstern.*

● **Gnedenko, B. V. and A. N. Kolmogorov: Limit distributions for sums of independent random variables.** Translated from the Russian by K. L. Chung. Addison-Wesley Mathematics Series. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Company, 1954. IX, 264 p. \$ 7,50.

Es ist sehr zu begrüßen, daß K. L. Chung durch die vorliegende Übersetzung das bereits 1949 in russischer Sprache erschienene gleichnamige, grundlegende Werk breiteren Fachkreisen zugänglich macht, zumal hierdurch dem nicht die russische Sprache beherrschenden Leser auch eine Fülle wichtiger einschlägiger russischer Arbeiten (der beiden Verff. selbst sowie von A. Ja. Khintchine u. a.) wenigstens indirekt erschlossen wird. In der Hauptsache fußt die englische Übersetzung auf dem russischen Originaltext. Wesentliche Abweichungen finden sich jedoch an folgenden Stellen: In § 46 und § 47 über den Grenzsatz für Wahrscheinlichkeitsdichten werden einige Vereinfachungen aus der von I. Földes (Budapest 1951) besorgten ungarischen Übersetzung übernommen. § 32 (Eingipfligkeit von Verteilungen der Klasse  $L$ ) erscheint durch Ausmerzung eines unkorrekten Beweises und der aus ihm gefolgerten Sätze verkürzt, ebenso § 36 (Eigenschaften stabiler Verteilungen), wo ein ebenfalls auf § 32 fußender Satz unterdrückt ist. In Anhang II (Seite 252–255) widerlegt J. L. Doob den in § 32 von den Verff. fälschlich bewiesenen Satz und stellt § 32 und § 36 richtig. Einen weiteren Anhang (I, Seite 245–251) widmet Doob der ergänzenden Erläuterung des die maßtheoretische Grundlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in allzu gedrängter Kürze enthaltenden Kap. I. Alle weiteren sachlichen Ergänzungen und Berichtigungen kleinerer Unkorrektheiten oder Druckfehler der Originalausgabe nimmt Chung in Fußnoten vor. — Inhalt: I. Einleitung: 1. Wahrscheinlichkeitsverteilungen, stochastische Variablen, mathematische Erwartung; 2. Verteilungen im  $R^1$  und ihre charakteristischen Funktionen; 3. Unbeschränkt teilbare Verteilungen. II. Allgemeine Grenzsätze: 4. Allgemeine Grenzsätze für Summen unabhängiger Summanden; 5. Konvergenz gegen Normal-, Poisson- und uneigentliche Verteilungen; 6. Grenzsätze für kumulative Summen. III. Identisch verteilte Summanden: 7. Fundamentale Grenzsätze; 8. Verschärfte Sätze über Konvergenz gegen Normalverteilung; 9. Lokale Grenzsätze für Gitterverteilungen. Am Schluß folgt ein 93 Nummern umfassendes Literaturverzeichnis der wichtigsten einschlägigen Arbeiten. Die Darstellung des Stoffes ist vorbildlich klar und wird überdies glücklich ergänzt durch ein Vorwort von 11 Seiten, in welchem Verff. eine Übersicht über die klassischen Grenzsätze, über die in dem Buche behandelten Fragen und ihre Beantwortung vorwegnehmen. *M. P. Geppert.*

**Petrov, V. V.: Eine Verallgemeinerung des Cramerschen Grenzwertsatzes.** Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 4 (62), 195–202 (1954) [Russisch].

Es seien  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  unabhängige Zufallsveränderliche mit den Verteilungsfunktionen bzw. Mittelwerten und Streuungsquadraten  $V_1(x), V_2(x), \dots, V_j(x), \dots$  bzw.  $M(\xi_j) = 0$ ,  $M(\xi_j^2) = \sigma_j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ; ferner sollen die Bezeichnungen

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = B_n, \quad P\left\{\frac{(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{B_n}} < x\right\} = F_n(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

eingeführt werden. Die Frage der Konvergenz der Ausdrücke  $[1 - F_n(x)]/[1 - \Phi(x)]$  bzw.  $F_n(-x)/\Phi(-x)$  wurde unter gewissen Bedingungen [wenn mit  $n \rightarrow \infty$  auch  $x \rightarrow \infty$ , aber so, daß  $x = o(\{n/\ln n\})$  gilt] zuerst von H. Cramér (des. Zbl. **22**, 241) für den Fall untersucht, daß die Zufallsveränderlichen  $\xi_j$  die gleiche Verteilung haben. Verf. gibt folgende Verallgemeinerung des Satzes von Cramér: Voraussetzungen: a) Es existieren solche positive Zahlen  $A, K$ ,

und  $k$ , daß für  $|h| < A$  gilt  $k < \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dV_j(y) \right| < K$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ; b) für jedes  $n$  gilt  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$

$\delta > 0$ ; c) für beliebige  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $c > 1$ , so daß  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{|y| > c} y^2 dV_j(y) < \varepsilon$  für alle  $n$ .

Dann gilt der Satz: Es sei  $x$  eine reelle Zahl, die von  $n$  abhängt, und zwar so, daß für  $n \rightarrow \infty$   $x > 1$ ,  $x = o(\sqrt{n})$ . Dann gilt

$$[1 - F_n(x)]/[1 - \Phi(x)] = \exp[(x^3/\sqrt{n}) \cdot \lambda_n(x/\sqrt{n})] \cdot [1 + O(x/\sqrt{n})],$$

$$F_n(-x)/\Phi(-x) = \exp[-(x^3/\sqrt{n}) \cdot \lambda_n(-x/\sqrt{n})] \cdot [1 + O(x/\sqrt{n})],$$

wo  $\lambda_n(t)$  eine Potenzreihe bedeutet, die bei genügend kleinen  $t$ -Werten für alle  $n$  gleichmäßig

konvergiert. — Weitere Sätze bringen gewisse Spezialisierungen dieses Satzes: außer dem Falle  $x = o(\sqrt{n})$  wird auch der Fall  $1 < x < \varepsilon_0 \sqrt{n}$  ( $\varepsilon_0 > 0$  beliebig klein) untersucht.

P. Medgyessy.

Loève, Michel: Relations entre lois limites. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1585 – 1587 (1954).

$\sum_k X_{nk}$  sei eine Folge von Summen für festes  $n$  voneinander unabhängiger Zufallsvariabler, die für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig bez.  $k$  nach Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergieren. Verf. stellt die Beziehungen zwischen den Limesgesetzen und ihren kanonischen Darstellungen (Lévy-Khintchine) von  $\sum_k X_{nk} \rightarrow a_n$ ,  $\min_k X_{nk}$ ,  $\max_k X_{nk}$ ,  $\max_k X_k$  dar, sowie Zusammenhänge mit den Limesgesetzen von

$\sum_k Y_{nk} = b_n$ , wo  $Y_{nk} = f(X_{nk} - a_{nk})$  ist mit verschiedenen Bedingungen für die Abbildung  $f$ . Diese Resultate sind z. T. in des Verf. Buch Probability Theory, New York 1954 (Satz 22.4.C und Aufg. 11 zu Kap. VIII) enthalten und verallgemeinern verschiedene ältere Resultate, z. B. einige von S. Bochner (dies. Zbl. **55**, 368).

D. Morgenstern.

Marsaglia, George: Iterated limits and the central limit theorem for dependent variables. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 987–991 (1954).

Der Begriff des Doppellimes nach Wahrscheinlichkeit wird eingeführt:  $p \lim p \lim f_{ij} = f$  bedeutet: für jedes  $\varepsilon$  ist  $\lim \lim P(|f_{ij} - f| > \varepsilon) = 0$ . Damit wird ein Konvergenzsatz von Cramér (Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1946, Theorem 20.6) entsprechend verallgemeinert. Damit ergeben sich einfache Beweise für gewisse Grenzwertsätze  $m$ -abhängiger Größen.

D. Morgenstern.

Dynkin, E. B.: Über einige Grenzwertsätze für Markovsche Ketten. Ukrain. mat. Žurn. **6**, 21–27 (1954) [Russisch].

Es werden Markoffsche Ketten  $x(t)$  mit Zuständen aus einem beliebigen Raum  $R$  betrachtet, wobei  $t$  ein diskreter oder kontinuierlich veränderlicher Parameter sein kann.  $M$  sei ein Borelscher Körper von Untermengen aus  $R$ .  $f(x, t)$  sei für jedes feste  $t$  eine bez.  $M$  meßbare Funktion.

Es wird die zufällige Größe  $\zeta(u) = \sum_{t=0}^u f(x(t), t)$  bzw.  $\zeta(u) = \int_0^u f(x(t), t) dt$  betrachtet. Es interessiert die Grenzverteilung von  $\zeta(u)$  für  $u \rightarrow \infty$ . Diese Fragestellung umfaßt z. B. Untersuchungen von Kolmogorov, dies. Zbl. **38**, 290, Feller, dies. Zbl. **39**, 133, Doeblin, dies. Zbl. **19**, 175, soweit sie sich auf Grenzwertsätze beziehen. Mit  $P^{(n)}(x, E)$  wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß der Anfangszustand  $x$  nach  $n$  Schritten in einen Zustand  $y \in E$  übergeht. Der übliche Begriff der Ergodizität wird zur gleichmäßigen Ergodizität modifiziert:  $P^{(n)}(x, E)$  strebt gegen einen von  $x$  unabhängigen Limes  $P(E)$ , und zwar gleichmäßig für alle  $x \in R$  und alle  $E \in M$ . Satz 1: Es liege eine gleichmäßig ergodische Kette mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten vor.  $f(x)$  sei meßbar und für ein  $\delta > 0$   $\int_R f(x)^{\delta} dP < \infty$ . Sei

$a = \int_R f(x) dP$  und  $\sigma^2 = \int_R (f(x) - a)^2 dP$ . Dann strebt die Verteilung von  $(\zeta(u) - au) / \sqrt{u}$  für  $u \rightarrow \infty$  gegen eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Streuung  $\sigma^2$ . Dieser Satz wird wie alle übrigen ohne Beweis ausgesprochen, jedoch wird auf die Methode der charakteristischen Funktionen hingewiesen. Satz 2 gibt eine einfache hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Ergodizität. — Es sei  $B(u) > 0$ . Es wird die Frage nach der Klasse der Grenzverteilungen von

(1)  $(1/B(u)) [f(x(t)) - A(u)]$  für  $u \rightarrow \infty$  ( $B(u) \rightarrow \infty$ ) aufgeworfen. Natürlich kommen alle stabilen Gesetze in Frage. Für den Fall einer eindimensionalen symmetrischen Zufallsweg-Kette gilt nach Dobrušin: Sei  $f(x) \geq 0$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = a$ . Dann ist  $\lim W \left( \frac{\zeta(u)}{a \sqrt{u}} \rightarrow s \right) =$

$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^s e^{-x^2/2} dx & \text{für } s > 0 \text{ und } = 0 \text{ für } s \leq 0 \end{cases}$  (Satz 4). Satz 5: Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \infty$  und

für eine beliebige meßbare Funktion  $g(x)$   $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \frac{g(k)}{f(k)} = 1$ , dann hat (1) für  $f(x)$  und  $g(x)$  dieselben Grenzverteilungen. — Auf die Analoga dieser letzten Untersuchungen für Markoff-Prozesse mit kontinuierlichem Parameter wird hingewiesen.

L. Schmitterer.



Eberl, W.: Ein Zufallsweg in einer Markoffschen Kette von Alternativen. Monatsh. Math. 58, 137—142 (1954).

Verallgemeinerung des Ruinproblems (zufällige Wanderung mit zwei Schranken), in dem die Wahrscheinlichkeit jedes Schrittes von dem vorigen Ergebnis abhängig ist. Die Ruinwahrscheinlichkeiten bei jedem Schritt, deren erzeugende Funktionen, die mittlere Spieldauer usw. werden bestimmt. Für die explizite Darstellung genügen hier nicht mehr Kreisfunktionen, sondern wiederholte Entwicklungen in Binomialreihen sind notwendig. *B. de Finetti.*

Hittmair, Otto: Valeur extrême des distributions de probabilités conditionnelles dans une chaîne de Markoff. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1469—1470 (1954).

Hittmair, Otto: Principe extrême d'une chaîne de Markoff dans le mouvement Brownien. C. r. Acad. Sci., Paris 238, 1555—1557 (1954).

Watson, G. S.: Extreme values in samples from  $m$ -dependent stationary stochastic processes. Ann. math. Statistics 25, 798—800 (1954).

Verf. beweist in Verallgemeinerung der Poisson-Verteilung als limes der binomischen: Ist  $X_i$  eine Folge zufälliger Variabler aus einem  $m$ -abhängigen nach oben unbeschränkten stationären Prozeß mit

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{P(X_i > c)} \max_{|i-j| \leq m; i \neq j} P[X_i > c; X_j > c] = 0,$$
 so gilt, wenn  $c_n(\xi)$  durch  $\xi = n P[X_i > c_n(\xi)]$  definiert ist,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_i \leq c_n(\xi); i = 1, \dots, n] = e^{-\xi}.$$

Als zulässiger Prozeß wird ein Prozeß normierter Gauß-Variabler mit Korrelationskoeffizient  $< 1$  für benachbarte Variable nachgewiesen. *D. Morgenstern.*

Lévy, Paul: Le mouvement brownien à  $n = 2p + 1$  paramètres. II. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1584—1585 (1954).

Frühere Untersuchungen (dies. Zbl. 56, 126) fortsetzend, werden unter Benutzung auch potentialtheoretischer Überlegungen Resultate über die Kovarianz von  $M(t)$  angegeben [ $M(t)$  = Mittel des  $n$ -parametrigen Brownschen Prozesses auf Kugelfläche vom Radius  $t$ ] und auch eine lineare Differentialgleichung mit einer Gauß-Variablen als rechter Seite aufgestellt, womit das Fortsetzungsproblem für wachsendes  $t$  gelöst ist [ $M, M', \dots, M^{(n)}$  bilden einen Markoffschen Prozeß]. *D. Morgenstern.*

Derman, Cyrus: Ergodic property of the Brownian motion process. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 1155—1158 (1954).

The author proves the following theorem: Let  $X(t)$  be a Wiener process starting at  $t = 0$ . If  $f(x)$  and  $g(x)$  are real valued Borel measurable functions, summable over  $-\infty < x < \infty$ , and if  $\bar{g} \neq 0$ , then

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T f(x(t)) dt}{\int_0^T g(x(t)) dt} = f/\bar{g}$$

with probability 1. Kallianpur and Robbins [ibid. 39, 525—533 (1953)] have proved that the ratio tends to  $f/\bar{g}$  in probability. They have also proved a similar result for two-dimensional Brownian motion, but the present authors' method does not carry over to that case. *S. Vajda.*

Magness, T. A.: Spectral response of a quadratic device to non-Gaussian noise. J. appl. Phys. 25, 1357—1365 (1954).

Extension du calcul symbolique à des opérateurs quadratiques. Pour connaître le 2<sup>e</sup> moment de la sortie, il faut ici connaître le 4<sup>e</sup> moment de l'entrée: l'A. démontre à ce sujet un résultat analogue au théorème de Wiener-Khintchine. Il examine la différence (et la transformée de Fourier de la différence) entre le 4<sup>e</sup> moment d'un bruit quelconque et d'un bruit Laplacien de même spectre. Pour étudier la réponse aux très faibles fréquences, il suffit de connaître le spectre d'entrée, et la corrélation entre les enveloppes, au sens de Bunimovitch (et de J. Ville!). Exemples. *B. Mandelbrot.*

Turner, C. H. M.: On the concept of an instantaneous power spectrum, and its relationship to the autocorrelation function. J. appl. Phys. 25, 1347–1351 (1954).

L'A. montre que le concept de spectre instantané de C. H. Page (ce Zbl. 47, 377) est en grande partie indéterminé. Calculs formels. *B. Mandelbrot.*

Lord, R. D.: The distribution of distance in a hypersphere. Ann. math. Statistics 25, 794–798 (1954).

Die Verteilungsfunktion für den Abstand zweier unabhängig mit konstanter Dichte verteilter Punkte in einer Hypersphäre und ihre asymptotische Normalität, beides von Hammersley bestimmt (dies. Zbl. 39, 393), wird auf übersichtliche Weise mittels Fourier-Transformation gewonnen. *D. Morgenstern.*

## Statistik:

● Blackwell, D. and M. A. Girshick: Theory of games and statistical decisions. New York: John Wiley & Sons Inc.; London: Chapman & Hall Ltd. 1954. XI, 355 p. \$ 7.50.

Dies dem Gedächtnis A. Walds gewidmete Buch ist eine übersichtlich aufgebaute, vieles Neuere berücksichtigende, in sich abgeschlossene Darstellung seiner Auffassung von der Statistik als „Spiel gegen die Natur“. Alle über Stetigkeit, Matrizen, Differential- und Integralrechnung hinausgehenden Hilfsmittel (konvexe Körper, auch die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung) werden bereitgestellt. Die Darstellung ist klar, nicht unnötig allgemein (für die allgemeine Theorie begnügen sich die Verff. mit diskreten Wahrscheinlichkeiten), mit vielen Aufgaben (etwa 170) und Beispielen durchsetzt und berührt viele Probleme der Statistik. Weitere Hinweise entnimmt man dem 180 Arbeiten umfassenden Literaturverzeichnis. Kapitelübersicht: Spiele in Normalform. Spielwert und optimale Strategien. Allgemeine Struktur statistischer Spiele. Nützlichkeitsfunktion (utility) und Auswahlprinzipien. Klassen optimaler Strategien. Spiele mit festem Probenumfang und endlichem  $\Omega$ , mit endlichem  $A$ . Suffizienz von Prüffunktionen und ein Invarianzprinzip für statistische Spiele. Folgetestverfahren. Bayessche und Minimaxverfahren, wenn  $A$  und  $\Omega$  endlich. Parameterschätzung. Vergleich von Experimenten. *D. Morgenstern.*

● Fryer, H. C.: Elements of statistics. New York: Wiley & Sons; London: Chapman & Hall 1954. VIII, 262 p. \$ 4.75; 38 s.

Den Neuling, gleichgültig auf welchem Anwendungsgebiet, in die statistische Arbeits- und Schlußweise einzuweißen und mit den Elementen statistischer Methodik bekannt zu machen, ist das Ziel der vorliegenden Einführung. Dem entsprechend liegt der Akzent durchgehend auf der Erklärung und Veranschaulichung der Begriffe und Verfahren (erfreulich sorgfältige Erörterung erfahren Punkt-Schätzung, Hypothesen-Prüfung und Intervall-Schätzung mittels Confidenzbereichen), während der Umfang des behandelten Stoffes ausgesprochen bescheiden ist. Auch die beigefügten Tabellen von Prüfverteilungen (Normal-, Student-,  $\chi^2$ - (nur 1, 2, 3 F. G.) Verteilung) stellen nur kurze Anzüge aus den in der Praxis gebräuchlichen dar. Die vorausgesetzten mathematischen Vorkenntnisse beschränken sich im wesentlichen auf elementare Algebra. Für den Anfänger wertvoll ist das reiche Material an numerischen Beispielen und Übungsaufgaben. Hinweise auf einschlägige Lehrbuch-Literatur sind jedem Kapitel gesondert beigegeben. *M. P. Goppert.*

● Howell, John M. and Ben K. Gold: Elementary statistics. Dubuque, Iowa: William C. Brown Company 1954. 154 p. \$ 3.00.

● Anderson, Oskar: Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften. Würzburg: Physica-Verlag 1954. 345 S. DM 16.—.

Das vorliegende Buch hat Verf., einer der namhaftesten und originellsten mathematischen Statistiker der Wirtschafts- und Sozialwissenschaft in Deutschland, auf

Grund zwölfjähriger Vorlesungen über „Ausgewählte Probleme der statistischen Methodenlehre“ in erster Linie für seine Hörer, also nicht für Mathematiker, geschrieben. Daraus bereits folgt nach den z. Z. landesüblichen Maßstäben, daß das Werk in bezug auf erforderliche mathematische Vorkenntnisse nirgends das elementare Schulniveau überschreitet. Hingegen setzt das als „zweites Lesestück“ gedachte Buch Vertrautheit mit den elementarsten Kenntnissen der beschreibenden Statistik voraus und lehnt sich textlich größtenteils an die bekannte „Einführung in die mathematische Statistik“ (dies. Zbl. 12, 111) desselben Verf. an, auf deren ausführlichere mathematische Beweise und Darlegungen mehrfach verwiesen wird, sowie an weitere wichtige Publikationen des Verf. In der stofflichen Auswahl beschränkt sich Verf. bewußt auf Erörterung der für die Wirtschafts- und Sozialstatistik bedeutsamen Methoden: die Theorie der Indexzahlen und statistischer Zeitreihen, insbesondere die größtenteils auf den Autor zurückgehende Differenzenmethode, steht im Vordergrund; auf die Theorie kleiner Stichproben aus normal verteilten Kollektiven und die entsprechenden klassischen Tests (Student- und  $F$ -Test) wird verzichtet, ebenso auf Varianzanalyse und Versuchsplanung. Nicht stoffliche Vollständigkeit oder gleichmäßig ausführliche Behandlung des gebotenen Stoffes werden erstrebt, sondern Durchleuchtung und Aufhellung einzelner im Hinblick auf das Anwendungsgebiet charakteristischer Teilfragen. Besondere Sorgfalt widmet Verf. grundsätzlichen Erwägungen über Wesen und Aufgabe der statistischen Methodik sowie über ihre Bedeutung für die Kausalforschung. Die launige, originelle und treffende Darstellungsweise verleiht den Ausführungen des Verf. große Überzeugungskraft. Jedoch vermißt der Mathematiker gerade bei manchen besonders grundlegenden Begriffen exakte, eindeutige Definitionen und letzte Klarheit in der Verwendung derselben und in der Formulierung. So z. B. befriedigt in der Schätzungstheorie nicht die Verwendung der Ausdrücke „plausibelster“ Wert, („bester“), „Präsumptivwert“, „Erwartungswert“, „mittlere quadratische Abweichung des Erwartungswertes“. In der Theorie der Hypothesenprüfung fehlt trotz Erwähnung der Neymanschen Fehler 1. und 2. Art doch eine gründliche Erklärung der den statistischen Signifikanztests zugrunde liegenden Schlußweise, und in der Darstellung der Sequenzanalyse schleichen sich ganz unnötig „Wahrscheinlichkeiten“ a posteriori „für Richtigkeit von Hypothesen“ ein, die implizite auf der uneingestandenem Bayes-Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten a priori beruhen und Walds Gedankengang verfälschen. — Eine nicht ungefährliche Verwechslung liegt bei Erwähnung (S. 276) der Fisherschen Transformation des Korrelationskoeffizienten vor: die Prüfung von  $z = \frac{1}{2} \ln [(1 + r)/(1 - r)]$  erfolgt asymptotisch normal und hat mit R. A. Fishers „ $z$ -Test“ nichts zu tun. Bei Besprechung des  $\chi^2$ -Tests (S. 195) wird dessen wichtigste Voraussetzung, betreffend hinreichende Größe der Erwartungswerte  $np_i$ , nicht erwähnt. — Trotz dieser vom Standpunkt des Mathematikers aus möglichen, geringfügigen Einwände wird das Werk nicht nur den angehenden Sozial- und Wirtschaftsstatistiker zum fruchtbaren Nachdenken anregen, sondern auch dem mathematisch orientierten Statistiker und dem angewandten Mathematiker einen wertvollen Einblick in die Anwendung mathematischer und statistischer Verfahren und Gedankengänge in Wirtschafts- und Sozialwissenschaften vermitteln. — Im Anhang 153 inhaltreiche und viele Literaturhinweise enthaltende Anmerkungen, ferner ein Verzeichnis 64 eigener, im Text benutzter Publikationen.

*M. P. Geppert.*

Steinhaus, H. unter Mitarbeit von T. Czechowski, M. Fiszer, O. Lange, J. Oderfeld und W. Sadowski: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfsmittel zu Untersuchungen in Naturwissenschaften und Produktion. Hauptreferate 8. Polnisch. Math.-kongr. 6.—12. Sept. 1953 Warschau, 69—94 (1954).

Remarks about the history of some statistical problems, mainly of those which were or are being dealt with by Polish workers. The paper contains also hints about further plans of work.

*S. Vajda.*



• **Bellman, R.:** A survey of the mathematical theory of time-lag, retarded control, and hereditary processes. Santa Monica: The Rand Corporation 1954. 107 p.

**Blom, Gunnar:** Transformations of the binomial, negative binomial, Poisson and  $\chi^2$  distributions. *Biometrika* **41**, 302—316 (1954).

Verf. entwickelt ein allgemeines Verfahren zur Gewinnung geeigneter normalisierender Transformationen von binomisch, negativ-binomisch, Poisson- und  $\chi^2$ -verteilten Variablen. Auf Grund der Reziprozitätsformel von G. Castelnuovo

$$\sum_{j=a}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \Gamma(n+1) \int_0^p y^{a-1} (1-y)^{n-a} dy / [\Gamma(a) \Gamma(n-a+1)]$$

wird die rechte Restwahrscheinlichkeit der binomischen Verteilung mit den Parametern  $p = 1 - q$ ,  $n$  übergeführt in ein Integral von Fishers  $z$ -Verteilung mit  $f_1 = 2a$ ,  $f_2 = 2(n-a+1)$ . F. G.:  $P(x = a; p) = P(z = Z)$ , wobei  $2Z = \log p/q - \log p^*q^*$ ,  $p^* = a/(n+1)$ ,  $q^* = (n-a+1)/(n+1)$ . In Anlehnung an den Grundgedanken der Cornish-Fisher-Entwicklung von  $Z$  nach Potenzen von  $(n+1)^{-1/2}$  mit der entsprechenden Normal-Abweichung  $\lambda$ :

$$P(z = Z) = \int_{-\infty}^Z e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}, \text{ entwickelt Verf. eine beliebige Transformationsfunktion } \Phi(p)$$

um  $\Phi^* = \Phi(p^*)$  nach Potenzen von  $(n+1)$ :

$$\Phi(p) = \Phi(p^*) + a_1(n+1)^{-1/2} + a_2(n+1)^{-1} + \dots, \Phi(p^*) = \Phi(p) + b_1(n+1)^{-1/2} + b_2(n+1)^{-1} + \dots$$

mit  $a$  nur von  $\lambda$  und  $p^*$ ,  $b$  nur von  $\lambda$  und  $p$  abhängig. Die Forderung  $a_2 = 0$  bzw.  $b_2 = 0$  führt zu einer Differentialgleichung der Form  $\Phi''(p) \Phi(p) = \alpha_1(\lambda) \cdot [(1-p)^{-1} - p^{-1}]$  mit  $\alpha_1(\lambda) = 1 - (\lambda^2 - 2/3)\lambda^2$  bzw.  $\alpha_2(\lambda) = (\lambda^2 - 2/3)\lambda^2$  im Falle der ersten bzw. zweiten Reihe.

Bei dem Confidenz-Problem bez.  $p$  mit Confidenzniveau  $1 - \epsilon = \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}$  ergibt die erste Reihe als „beste“ Transformation im obigen Sinne für  $\lambda = 1$  keine Transformation, für

$\lambda = 2$  die Arcsin-Transformation, für  $\lambda \rightarrow \infty$   $\Phi(p) = \int_0^p x^{-2/3}(1-x)^{-2/3} dx$ ; bei dem direkten

Problem liefert die zweite Reihe für  $\lambda = 1$  die logarithmische Transformation  $\Phi(p) = \log(p/q) - \log(p_0/q_0)$ , für  $\lambda = 2$  die Arcsin-Transformation und für  $\lambda \rightarrow \infty$   $\Phi(p) =$

$\int_0^p x^{-1/3}(1-x)^{-1/3} dx$ . Ähnlich bestimmen sich für das Confidenz- sowie für das direkte Problem

die Poisson-,  $\chi^2$ - und negativ-binomischer Verteilung aus Differentialgleichungen Klassen geeigneter Transformationen, die alle bisher zur Normalisierung dieser Verteilungen verwendeten Transformationen (u. a. Kubik-, Quadratwurzel-, Arcsin-Transformation, Fishers bzw. Wilsons und Hilbertys normale  $\chi^2$ -Approximationen) als Spezialfälle umfassen. *M. P. Geppert.*

**Jenkins, G. M.:** An angular transformation for the serial correlation coefficient. *Biometrika* **41**, 261—265 (1954).

In der Note wird eine inverse Sinus-Transformation entwickelt, die dazu führt, die Streuung der Verteilung des Reihen-Korrelationskoeffizienten im Falle der Verschiebung („lag“) 1 innerhalb einer zirkular-korrelierten Gesamtheit zu stabilisieren. Es zeigt sich, daß die Grenzverteilung der transformierten Variablen approximativ normal ist. Der Mittelwert der Verteilung ist zwar noch empfindlich gegen Veränderungen des Korrelationskoeffizienten  $\rho$  der Ausgangsverteilung, jedoch nicht in dem Maße wie bei der  $\tan^{-1} r$ -Transformation. Angenäherte Konfidenz-Intervalle werden angegeben, die sich gut den von Quenouille (dies. Zbl. **33**, 389) ermittelten anpassen. *G. Wünsche.*

**David, H. A.:** The distribution of range in certain non-normal populations. *Biometrika* **41**, 463—468 (1954).

Kumulative Verteilungsfunktion der Spannweite  $w$  einer  $n$ -gliedrigen Stichprobe aus einer Population mit der Verteilung  $P(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ ,  $P(w|n) =$

$n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot [P(x-w) - P(x)]^{n-1} dx$ , und daraus zu gewinnenden Erwartungswert von  $w$  berechnet Verf. für folgende nicht normale Verteilungen: a)  $f(x) = \exp(-x - e^{-x})$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ ; b)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $0 \leq x \leq \infty$ ; c)  $f(x) = x e^{-x}$ ,

$0 \leq x \leq \infty$ ; d)  $f(x) = e^{-x}/(1 + e^{-x})^2$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ ; e)  $f(x) = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Auf Grund dieser Formeln sowie unter Benutzung früher berechneter Tafeln [H. A. David, *Biometrika* **39**, 422—424 (1952)] tabuliert Verf. für die genannten Ausgangsverteilungen sowie für einige  $\log \chi^2$ -Verteilungen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die standardisierte Stichproben-Spannweite den kritischen 5 bzw. 1%-Wert der standardisierten Spannweite einer Probe aus Normalverteilung überschreite. Es zeigt sich, daß die hier betrachteten Abweichungen von Normalverteilung ( $\chi^2$ - oder Pearson-Typ III) sich auf die Beurteilung des Populationsmittelwertes nur geringfügig, auf die Beurteilung der Spannweite selbst hingegen erheblicher auswirken. Schließlich wird unter Heranziehung von A. K. Gayens (dies. Zbl. **40**, 221) Tafeln auch die Auswirkung der Nicht-Normalität der Ausgangsgesamtheit auf die Verteilung der Stichproben-Standardabweichung untersucht. *M. P. Geppert.*

**Cox, D. R.: The mean and coefficient of variation of range in small samples from non-normal populations.** *Biometrika* **41**, 469—481 (1954).

Verf. untersucht die Auswirkung der Nicht-Normalität einer Population auf die Verteilung der Spannweite  $w$  einer  $n$ -gliedrigen Stichprobe ( $n \geq 5$ ) durch Betrachtung spezieller Ausgangsverteilungen  $p(x)$  mit gegebener Kurtosis  $\beta_2$  [symmetrisch und unsymmetrisch gemischte, nicht überlappende Normalverteilungen,  $p(x) = e^{-x}$  und  $p(x) = x e^{-x}$ ] und entsprechende Tabulierung von  $E(w)/\sigma$  und des Variationskoeffizienten von  $w$ . Für  $p(x) = e^{-x}$  wird die Verteilung des Quotienten der Spannweiten zweier unabhängiger  $n$ -gliedriger Stichproben bestimmt. Aus den Ergebnissen werden Schlüsse gezogen auf die Auswirkung der Nicht-Normalität auf verschiedene,  $w$  verwendende statistische Methoden: 1. Punktschätzung von  $\sigma$  mittels  $s$  bzw.  $w$ ; 2. Kontrollkarte für  $w$ ; 3. Vergleich zweier Varianzen mittels  $F$ -Test auf Grund von  $w_1, w_2$ ; 4. Students  $t$ -Test mit  $w/d_n$  an Stelle von  $s$ . *M. P. Geppert.*

**David, H. A., H. O. Hartley and E. S. Pearson: The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation.** *Biometrika* **41**, 482—493 (1954).

Verff. tabulieren für die Verteilung des Quotienten  $u = w/s$  aus Spannweite  $w$  und Standard-Abweichung  $s$  ein und derselben  $n$ -gliedrigen Stichprobe aus normal verteilter Gesamtheit obere und untere Zufallsgrenzen für die einseitigen Restwahrscheinlichkeiten  $\alpha = 0,005; 0,01; 0,025; 0,05; 0,10$  und die Stichprobenumfänge  $n = 10; (1); 20; (10); 60; 80; 100; 150; 200; 500; 1000$ . Zu dem Zweck werden aus den bekannten Momenten von  $w$  und  $s$  diejenigen von  $u$  exakt berechnet und Pearson-Kurven, deren erste vier Momente mit denjenigen von  $u$  übereinstimmen, zur Approximation der unbekannten exakten Verteilung von  $u$  benutzt. Für kleine  $n$  werden nach einem Verfahren von E. S. Pearson und C. Chandra Sekar [*Biometrika* **28**, 308—320 (1936)] die oberen Zufallsgrenzen für  $u$  exakt berechnet mit Hilfe der Student-Verteilung. *M. P. Geppert.*

**Jęzowski, M. and J. Oderfeld: On the distributions of strength indices.** *Zastosowania Mat.* **2**, 99—106, russische und engl. Zusammenfassgn. 106 (1954) [Polnisch].

The subject of the paper is a comparison of theoretical distributions as regards their conformity with the data relating to the strength of steel which have been given by W. Moszyński (this Zbl. **55**, 134). Of the three distributions considered — Krieki-Menkel's, normal and logarithmicnormal — the best conformity was shown by the logarithmicnormal distribution. As a side result, simple approximate formulae have been evolved making it easy to choose the parameters for Krieki-Menkel's distribution. The formulae are valid for distributions which do not show great skewness. *Autoreferat.*

**Box, G. E. P.: Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems. II. Effects of inequality of variance and of correlation between errors in the two-way classification.** *Ann. math. Statistics* **25**, 484—498 (1954).

Diese Arbeit ist die Weiterführung einer früheren Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. **55**, 373). Verf. betrachtet bei der Varianzanalyse einer zweifachen Aufteilung in  $n$  Zeilen und  $k$  Spalten

mit einem Wert  $y$  je Fach folgende Abweichung von dem üblichen Modell:  $y_{it} = \alpha + \beta_i + \gamma_t + z_{it}$ ,

$\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$ ,  $\sum_{t=1}^k \gamma_t = 0$ , wobei die  $z_{it}$  nicht wie üblich unkorreliert seien und gleiche Varianz aufweisen, sondern jeder Vektor  $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{ik})$  der gleichen  $k$ -dimensionalen Normalverteilung mit Varianzmatrix  $\mathbf{v} = \{v_{ts}\}$  folge und  $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j$  für  $i \neq j$  voneinander unabhängig seien. Dies ermöglicht das Studium der Effekte (1) der Inhomogenität der Varianzen in den Spalten und (2) der Korrelation der Fehler innerhalb der Zeilen (within-rows correlation of errors). Auf Grund von Sätzen aus der oben zitierten Arbeit findet Verf., daß die Zwischen-Zeilen-Quadratsumme  $Q_R = k \sum_{t=1}^n (y_{.t} - \bar{y}_{.})^2$  verteilt ist wie  $(v_{..} - (k-1)v_{ts}) \chi^2(n-1)$ , die Zwischen-

Spalten-Quadratsumme  $Q_c = n \sum_{t=1}^k (y_{.t} - \bar{y}_{.})^2$  wie  $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \chi^2(1)$ , die Rest-Quadratsumme

$Q_F = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^n (y_{it} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.t} + \bar{y}_{..})^2$  wie  $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \chi^2(n-1)$ , wobei  $\chi^2(r)$  unabhängig voneinander mit  $r$  F. (i.  $\chi^2$ -verteilt,  $\lambda_j$  die nicht verschwindenden Eigenwerte der Matrix  $\{v_{ts} - v_{.t}\}$  sind,  $v_{.t}$  der Mittelwert der  $t$ -ten Spalte von  $\mathbf{v}$ ,  $v_{tt} = \sigma^2$ ,  $v_{ts} = \rho \sigma^2$ , alle übrigen  $v_{ts} = 0$ ; die Ab-

weichungen beim „Zwischen-Spalten-Test“ sind nicht groß, beim „Zwischen-Zeilen-Test“ können auch bei mäßigem  $\rho$  beträchtliche Abweichungen auftreten. In allen Fällen sind Beispiele für diese Abweichungen für die 5% Punkte vertafelt.  
M. P. Geppert-O. Ludwig.

**Girault, Maurice:** Droites de régression confondues. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1266—1267 (1954).

Das Zusammenfallen der Regressionsgeraden kann, bei unendlicher Streuung, auch für nicht geradlinige Verteilungen stattfinden (Beispiel: Cauchy's Verteilung, auf eine Hyperbel projiziert).  
B. de Finetti.

**Tate, Robert F.:** Correlation between a discrete and a continuous variable. Point-biserial correlation. Ann. math. Statistics 25, 603—607 (1954).

Verf. betrachtet das Modell: Es seien  $(X_i, Y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) unabhängige Vektoren.  $X_i$  folge der Verteilung  $P(x_i = 1) = p$ ,  $P(x_i = 0) = q$  mit  $0 < p < 1$ ,  $p + q = 1$  und  $Y_i$  der Verteilung  $F(y) = p F_1(y) + q F_2(y)$  mit  $F_j(y) =$

$P(Y \leq y | X = j) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\tau \sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu_j)^2/2\tau^2} dt$  ( $j = 0, 1$ ). Dann ist der Stich-

probenkorrelationskoeffizient  $r$  asymptotisch normal verteilt gemäß

$N(\varrho, [4pq - \varrho^2(6pq - 1)](1 - \varrho^2)^2/4npq)$ , wo  $\varrho = (\mu_1 - \mu_0)\tau^{-1} = pq/[1 + pq(\mu_1 - \mu_0)^2\tau^{-2}]$

die Populationskorrelation zwischen  $X$ ,  $Y$  ist. Im Falle  $p = q = 1/2$  ist die asymptotische Varianz am größten; mittels der varianzstabilisierenden Transformation  $g(x) = 2^{-1/2} \operatorname{sgn}(x) \operatorname{Ar} \operatorname{Zef}(1 - x^2)$  findet man dann, daß  $\operatorname{sgn}(r) \cdot \operatorname{Ar} \operatorname{Zg}(1 - (1 - r^2)^2)^{1/2}$  asymptotisch  $N(\operatorname{sgn}(\varrho) \operatorname{Ar} \operatorname{Zg} \sqrt{(1 - (1 - \varrho^2)^2)}, 2/n)$ -verteilt ist.

Die Verteilung von  $T = r \sqrt{(n-2)/(1-r^2)}$  für kleine Stichproben wird untersucht; unter Benutzung von Ergebnissen von I. Lev (dies. Zbl. 32, 38) zeigt Verf.:

die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $T$  lautet  $\sum_{n_1=0}^n \binom{n}{n_1} p^{n_1} q^{n-n_1} j(t; n_1, n, p, \varrho)$ , wobei

$j(t; n_1, n, p, \varrho)$  die Dichte einer nicht-zentralen  $t$ -Verteilung ist.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

**Dunnett, Charles W. and Milton Sobel:** A bivariate generalization of Student's  $t$ -distribution, with tables for certain special cases. Biometrika 41, 153—169 (1954).



Verff. leiten die  $p$ -dimensionale Verallgemeinerung

$$\{A^{1/2} \cdot \Gamma[(n+p)/2] (n\pi)^{p/2} \cdot \Gamma(n/2)\} \cdot \left\{1 + n^{-1} \sum_{i,j} a_{ij} t_i t_j\right\}^{-(n+p)/2} dt_1 \cdots dt_p$$

der klassischen Student-Verteilung ( $p = 1$ ) her als Simultan-Verteilung der  $p$  Variablen  $t_i = z_i/s$ , wo die  $z_1, \dots, z_p$  simultan nichtsingulär normal verteilt sind mit Mittelwerten 0, Korrelationsmatrix  $\{\varrho_{ij}\} = \{a_{ij}\}^{-1}$  und gleichem unbekannten  $\sigma^2$ , und  $n s^2/\sigma^2$  einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  F. G. folgt. Im Fall  $p = 2$  wird das Integral der obigen „Student-Verteilung“,

$$P_n(h, k; \varrho) = \int_{-\infty}^h \int_{-\infty}^k g_n(u, v; \varrho) du dv \\ = (2\pi)^{-1} (1 - \varrho^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^h \int_{-\infty}^k [1 + (u^2 - 2\varrho uv + v^2)/n(1 - \varrho^2)]^{-(n+2)/2} du dv,$$

exakt dargestellt als endliche Summe unvollständiger Beta-Funktionen, ferner angenähert durch das für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch geltende entsprechende Integral über

$$g(u, v; \varrho) = (2\pi)^{-1} (1 - \varrho^2)^{-1/2} \exp[-(u^2 - 2\varrho uv + v^2)/2(1 - \varrho^2)]$$

mittels Entwicklung der Differenz nach Potenzen von  $n^{-1}$ . Schließlich werden die „gleich-koordinatigen“ 100 P %-Punkte  $t$  der Verteilung  $g_n$  definiert durch

$$P = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t g_n(u, v; \varrho) du dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x g(u, v; \varrho) du dv$$

und asymptotisch dargestellt als Funktionen von  $x$ , dem entsprechenden gleich-koordinatigen 100 P %-Punkt der binormalen Grenzverteilung  $g$ . Verff. tabulieren in den beiden Spezialfällen  $\varrho = \pm 0,5$   $P_n(h, h; \varrho)$  für  $n = 1, 2, \dots, 30, 33, \dots, 60, 75, \dots, 120, 150, 300, 600, \infty$ ;  $h = 0; 0,25; \dots; 2,50; 3,00; 3,50$  und  $n = 1, 2, \dots, 6$ ;  $h = 4; 4,5; \dots; 10,0$ ; ferner  $t$  als Funktion von  $P_n(t, t; \varrho)$  für  $n$  wie oben und  $P = 0,50; 0,75; 0,90; 0,95; 0,99$ . Es folgen Tabellen der Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung von  $P_n(t, t; \varrho)$  für Einzelwerte von  $t$  und  $\sigma$ .

M. P. Geppert.

Råde, Lennart: A note on a modified  $t$ -test. Skand. Aktuarietidskr. 54, 65—70 (1954).

Bei dem durch J. F. Daly [Ann. math. Statistics 17, 71—74 (1946)] und E. Lord (dies. Zbl. 30, 40) modifizierten  $t$ -Test dient zur Beurteilung des unbekannten Mittelwertes  $\xi$  einer normalen Population auf Grund des Mittelwertes  $\bar{x}$  einer in  $k$   $m$ -gliedrige Teilstichproben zerlegten  $(n = m \cdot k)$ -gliedrigen Stichprobe der Quotient  $u = (\bar{x} - \xi) \sqrt{n}/W_{m,k}$ , wobei bekanntlich  $W_{m,k} = R_{m,k}/\alpha_m$  mit  $R_{m,k} = \sum_{j=1}^k R_j/k$ ,  $R_j$  = Spannweite der  $j$ -ten Teilprobe,  $\alpha_m = E(R_{m,1})$ , eine asymptotisch normal verteilte, erwartungstreue Schätzung der unbekannten Standard-Abweichung gibt. Verf. benutzt R. C. Gearys [J. Roy. Statist. Soc. 93, 442 (1930)] Approximation der Verteilung von Quotienten unabhängig normal verteilter Variablen zur näherungsweise Berechnung kritischer Zufallsgrenzen (Fraktile) der  $u$ -Verteilung, der Teststärke (Potenzfunktion, power-function) bzw. dazu komplementären Operationscharakteristik des  $u$ -Tests und des „standardisierten“ Fehlers desselben. Für  $m = 7, 8, 9$  und  $k = 1, 3, 5, 10, 15$  vergleicht Verf. seine approximativen Resultate mit den exakten von Lord.

M. P. Geppert.

Hoel, Paul G.: On a property of the sequential  $t$ -test. Skand. Aktuarietidskr. 54, 19—22 (1954).

Zur Prüfung der zusammengesetzten Hypothese  $H_0$ , daß der Mittelwert  $\theta$  einer normal verteilten Variablen  $\theta_0$  laute, wobei die Varianz  $\sigma^2$  unbekannt ist, hat A. Wald [Sequential analysis (dies. Zbl. 29, 158) p. 83—84] einen sequentiellen Wahrscheinlich-

keits-Verhältnis-Test vom Bayes-Typ entwickelt, für welchen er (p. 205–207) gewisse optimale Eigenschaften nachweist. Durch abweichende, geeignete Wahl der von Wald eingeführten Gewichtsfunktionen  $v_i(\theta, \sigma)$  und  $v_r(\theta, \sigma)$  für den Annahme- ( $\omega_2$ ) und Ablehne- ( $\omega_r$ ) Bereich des Parameterraumes beweist Verf., daß Walds Test nicht die doppelte Minimax-Eigenschaft aufweist, unter allen Bayes-Tests mit vorgegebenem

$$\int_{\omega_2} v_a(\theta, \sigma) \alpha(\theta, \sigma) d\theta d\sigma = \alpha, \quad \int_{\omega_r} v_r(\theta, \sigma) \beta(\theta, \sigma) d\theta d\sigma = \beta$$

ein minimales Maximum von  $\alpha(\theta, \sigma)$  und ein minimales Maximum von  $\beta(\theta, \sigma)$  zu haben. Die vom Verf. in  $\omega_2$  ( $\theta = \theta_0$ ;  $0 \leq \sigma < \infty$ ) bzw.  $\omega_r$  ( $\theta - \theta_0 \leq \delta \cdot \sigma$ ) betrachteten Gewichtsfunktionen

$$v_a = k_1 \sigma^{-1} \text{ für } c^{-1} \leq \sigma \leq c \text{ bzw. } = 0 \text{ sonst;}$$

$$v_r = k_2 \sigma^{-1} \text{ für } c^{-1} \leq \sigma \leq c, \theta = \theta_0 \pm \delta \sigma, \text{ bzw. } = 0 \text{ sonst,}$$

ergeben für das Wahrscheinlichkeits-Verhältnis  $p_{1m}/p_{0m}$  im wesentlichen eine konfluente hypergeometrische Funktion.

M. P. Geppert.

**Marakathavalli, N.:** The distribution of  $t_1$  and its applications. J. Madras Univ., Sect. B 24, 251–272 (1954).

Verf. untersucht die Verteilung von Quotienten  $t_1 = \xi/\sqrt{n_1\chi^2}$ , wo  $\xi$  normal- $N(0, 1)$ -verteilt und  $\chi^2$  unabhängig von  $\xi$  mit  $n$  F. G. und Parameter  $\lambda$  nicht-zentral  $\chi^2$ -verteilt sei. Die exakte Verteilung von  $t_1$  ist eine gewogene Summe von Student-Verteilungen mit Poisson-Wahrscheinlichkeiten als Gewichten, symmetrisch um  $t_1 = 0$  mit geraden Momenten

$$\mu_{2r}(t_1) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \cdot n \cdot B\left(\frac{1}{2}n + j - r, r + \frac{1}{2}\right) / B\left(\frac{1}{2}n + j, \frac{1}{2}\right),$$

und wird für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch  $N(0, 1)$ -normal. Verf. approximiert die Verteilung von  $t_1$  durch die Verteilung einer gestreckten Variablen  $t \cdot \sqrt{c}$ , wo  $t$  mit  $r$  F. G. Student-verteilt ist, indem er  $r$  und den Streckungsfaktor (Scale-factor)  $\sqrt{c}$  durch Gleichsetzen der ersten zwei Momente von  $t_1$  und  $t \cdot \sqrt{c}$  bestimmt. Die  $t_1$ -Verteilung wendet Verf. sodann an zur Beurteilung der Mittelwerte  $\mu_1, \mu_2$  normaler Populationen auf Grund gemischter (inhomogener) Stichproben, d. h. solcher, bei denen ein Bruchteil  $j$  der Einzelproben aus der Population selbst und der Rest aus der um  $\delta$  verschobenen Population stamme. Sowohl für den Fall gleicher als auch für den signifikant differierender Varianzen werden auf Grund von  $t_1$  Tests für  $H_0 (\mu_1 = \mu_2)$  entwickelt, ferner für  $\mu_1 - \mu_2$  Confidenzintervalle konstruiert.

M. P. Geppert.

**Rajski, C.:** Comparing general populations on the basis of Bayes' rule. Zastoso-  
wania Mat. 1, 329–340, russische und engl. Zusammenfassg. 340–341, 341  
(1954) [Polnisch].

There are two general populations each containing an unknown fraction of items, marked in certain way,  $w_1$  and  $w_2$  respectively. The author gives methods of verification certain hypotheses about relation between  $w_1$  and  $w_2$  when there is known the number of marked items  $r_1$  ( $r_2$ ) in a sample with  $n_1$  ( $n_2$ ) elements from the first (second) population. All these methods are based on the Bayes theorem. Especially an uniform distribution of  $w_1$  and  $w_2$  is assumed.

W. Sadomski.

**Bennett, B. M.:** Some further extensions of Fieller's theorem. Ann. Inst. statist. Math. 5, 103–106 (1954).

Sind  $n$  Wertepaare  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) unabhängig zufallsmäßig einer mit  $E(x) = \xi$ ,  $E(y) = \alpha \xi$ , Varianzen und Kovarianz  $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_{xy}$  binormal verteilten Gesamtheit entnommen, so erhält man aus ihnen  $(1 - \epsilon)^{1/2}$ -Confidenz-Grenzen  $\alpha$ ,  $\alpha$  für  $\alpha$  durch die Lösung der quadratischen Ungleichung  $\lambda_0 x^2 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 \leq 0$  mit  $\lambda_0 = n \bar{x}^2 - t_e^2 s_x^2$ ,  $\lambda_1 = n \bar{x} \bar{y} - t_e^2 s_{xy}$ ,  $\lambda_2 = n \bar{y}^2 - t_e^2 s_y^2$ , wo  $t_e$  der dem

Signifikanzniveau  $\varepsilon$  entsprechende kritische Wert der Student-Verteilung mit  $(n-1)$  Freiheitsgraden ist. Diesen Satz von E. C. Fieller [Suppl. J. roy. statist. Soc. 7, 1—64 (1940). A fundamental formula in the statistics of biological assay, and some applications; Quart. J. Pharm. and Pharmacol. 17, 117—123 (1944)] dehnt Verf. aus auf den Fall ungleicher Anzahlen  $n, n'$  von  $x$ - und  $y$ -Beobachtungen und auf den Fall zweier gegenseitig unabhängiger Stichproben von  $n_1$  bzw.  $n_2$  Wertepaaren  $(x, y)$ . Hierzu wendet Verf. die von H. Scheffé [Ann. math. Statistics 14, 35—44 (1943)] benutzte „beste“ lineare Transformation  $z_i = y_i - \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n'} c_{ik} x_k$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit  $E(z_i) = 0$ ,  $\sigma_{z_i z_j} = 0$  ( $i \neq j$ ) und minimalen  $\sigma_{z_i}^2$  an.

M. P. Geppert.

Trickett, W. H. and B. L. Welch: On the comparison of two means. Further discussion of iterative methods for calculating tables. Biometrika 41, 361—374 (1954).

Die von B. L. Welch (dies. Zbl. 29, 408) entwickelte und von A. A. Aspin (dies. Zbl. 36, 211) tabulierte Methode des Vergleichs der Mittelwerte  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  zweier unabhängiger, ( $n_1 = f_1 + 1$ ) bzw. ( $n_2 = f_2 + 1$ )-gliedriger Stichproben aus zwei normal verteilten Kollektiven mit Mittelwerten  $X_1, X_2$  und nicht übereinstimmenden Varianzen  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  wird in der vorliegenden Arbeit näher begründet. Die Bestimmung kritischer Werte  $v(c)$  mit

$c = s_1^2 n_1^{-1} / [s_1^2 n_1^{-1} + s_2^2 n_2^{-1}] = \gamma \cdot M_1 / [\gamma \cdot M_1 + (1 - \gamma) \cdot M_2]$ ,  $\gamma = \sigma_1^2 n_1^{-1} / [\sigma_1^2 n_1^{-1} + \sigma_2^2 n_2^{-1}]$  für  $v = [\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (X_1 - X_2)] / [s_1^2 n_1^{-1} + s_2^2 n_2^{-1}]$  führt auf die Integralgleichung für  $v(c)$ ,

$$\Pr \{v \leq v(c)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty N\left\{\frac{M_1 \cdot \gamma + M_2 \cdot (1 - \gamma) \cdot v(c)}{M_1 \cdot \gamma + M_2 \cdot (1 - \gamma)}\right\} \cdot p(M_1) \cdot p(M_2) dM_1 dM_2,$$

wo  $p(M_i) = e^{-f_i M_i/2} \cdot f_i^{f_i/2} \cdot M_i^{f_i/2-1} \cdot 2^{-f_i/2} / \Gamma(f_i/2)$  die Verteilung von  $M_i = s_i^2 / \sigma_i^2$  und  $N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}$  bedeutet. Der durch sukzessive Approximation in Reihenform gewonnenen allgemeinen Lösung der Integralgleichung stellen Verf. eine ebenfalls auf sukzessiver Approximation beruhende numerische Methode gegenüber, die eine durch geeignete Substitution aus der obigen gewonnene einfachere Integralgleichung für  $v(c)$  löst.

M. P. Geppert.

Kendall, M. G.: Two problems in sets of measurements. Biometrika 41, 560—564 (1954).

Verf. löst folgende von W. J. Youden stammende Aufgaben: 1. Welches ist die Varianz desjenigen unter  $n$  einer (standardisiert-) normal verteilten Population zufällig entnommenen Werten, welcher dem Populationsmittelwert am nächsten liegt? 2. Welches ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Mittelwert einer  $n$ -gliedrigen Stichprobe aus einer Normalverteilung zwischen dem  $n$ -ten und  $(n-1)$ -ten Stufwert (order statistic) der Stichprobe liegt? Zu 1. Die gesuchte Varianz

$v_n = n \int_0^\infty x^2 (1 - F)^{n-1} dF$  mit  $dF = \sqrt{2/\pi} \cdot \exp(-x^2/2) dx$  ( $0 \leq x \leq \infty$ ) wird mittels wiederholter partieller Integration auf Integrale über niedrigere Potenzen von  $(1 - F)$  reduziert und für größere  $n$  mit Hilfe von Integralen der Form

$$P(\alpha, n, p) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) \left(\int_{px}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt\right)^{n-3} dx$$

vereinfacht. Schließlich wird  $v_n$  unter Heranziehung einer von K. Pearson stammenden Entwicklung von  $x^2$  nach Potenzen von  $F^2$  für große  $n$  asymptotisch berechnet. Zu 2. Da auf Grund der (bei Normalverteilung geltenden) Unabhängigkeit der Differenz  $X = x_j - \bar{x}$  ( $x_j = j$ -ter Stufwert,  $\bar{x}$  = Mittelwert der Stichprobe) von  $\bar{x}$  die Kumulanten von  $X$  mit denen von  $x_j$  übereinstimmen, ergeben sich die



Kumulanten von  $X$  aus den Momenten von  $x_j$ . Mit den Kumulanten von  $X$  entwickelt Verf. die kumulative Verteilungsfunktion von  $X$  in die Edgeworth-Form der Gram-Charlier-Reihe. Außerdem wird ohne Beweis die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $X$  exakt angegeben.

*M. P. Geppert.*

**Green, J. R.:** A confidence interval for variance components. *Ann. math. Statistics* **25**, 671—686 (1954).

Es seien  $M_1$  und  $M_2$  zwei Statisten (Maßzahlen, statistics), die unabhängig voneinander wie  $\sigma_1^2 \chi^2 r_1$  und  $\sigma_2^2 \chi^2 r_2$  mit  $r_1$  bzw.  $r_2$  F. G. verteilt seien. Es werden Konfidenzgrenzen gesucht für  $K = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , wobei  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  beide unbekannt seien. Es sei  $q = \sigma_2^2 K$ ,  $y = M_1 K$ ,  $x = M_2 K$ . Es ist also eine Funktion  $f$  gesucht, so daß  $\Pr[y \leq f(x)] = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , wobei  $\alpha$  vorgegeben und  $f$  unabhängig von  $q$  ist. Eine exakte Lösung des Problems ist nicht bekannt: Verf. gibt mehrere approximative Lösungen (in Form von Reihen, die nach Potenzen von  $r_2^{-1}$ ,  $q$  oder  $q^{-1}$  fortschreiten) und diskutiert die Güte der Approximation und die Anwendungen der Lösung. Die entsprechenden Tabellen sind jedoch der Arbeit noch nicht beigelegt.

*M. P. Geppert-O. Ludwig.*

**Chernoff, Herman:** On the distribution of the likelihood ratio. *Ann. math. Statistics* **25**, 573—578 (1954).

S. S. Wilks (dies. Zbl. **18**, 320) hat bewiesen, daß unter gewissen Regularitätsbedingungen, wenn die Hypothese, daß ein Parameterpunkt  $\theta$  in einem  $r$ -dimensionalen Unterraum eines  $k$ -dimensionalen Raumes liegt, zutrifft, die Größe  $-2 \log \lambda$ , wobei  $\lambda$  das Plausibilitätsverhältnis (likelihood ratio) ist, asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt ist mit  $k - r$  F. G. Verf. untersucht die Verteilung, wenn die (Null-)Hypothese etwas anders lautet, z. B. wenn  $\theta$  in einer Halbebene oder im positiven Quadranten liegen soll. Eine Menge  $C$  heiße positiv homogen, wenn aus  $\theta \in C$  stets  $a\theta \in C$  folgt für  $a > 0$ . Eine Menge  $q$  „wird von der positiv homogenen Menge  $C_q$  approximiert“, wenn  $\inf_{x \in C_q} |x - y| = o(|y|)$  für  $y \in q$  und  $\inf_{y \in q} |x - y| = o(|x|)$  für  $x \in C_q$ . Die  $n$

Beobachtungen mögen unabhängig voneinander die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x|\theta)$  besitzen und folgende Bedingungen erfüllen: (1) a) Für fast alle  $x$  existieren die Ableitungen  $\partial \log f / \partial \theta_1$ ,  $\partial^2 \log f / \partial \theta_1 \partial \theta_2$ ,  $\partial^3 \log f / \partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3$  für jedes  $\theta$  aus einer abgeschlossenen Umgebung von  $\theta = 0$ . b) Wenn  $\theta \in N$ , gilt  $\partial f / \partial \theta_1 = F(x)$ ,  $\partial^2 f / \partial \theta_1 \partial \theta_2 = F(x)$ ,  $\partial^3 \log f / \partial \theta_1 \partial \theta_2 \partial \theta_3 = H(x)$ , wobei  $F$  endlich integrierbar und  $E\{H(x)\} = M$  ist ( $M$  unabhängig von  $\theta$ ). c) Wenn  $\theta \in N$ , ist  $J = \|E\{(\partial \log f / \partial \theta_1) (\partial \log f / \partial \theta_2)\}\|$  endlich und positiv definit. (2) Wenn der Nullpunkt ein Randpunkt der Menge  $q$  ist, strebt  $\hat{\theta}_q$  stochastisch gegen Null für  $\theta = 0$ . (3) Die Mengen  $\omega$  und  $\tau$  werden approximiert durch nicht leere elementfremde positiv homogene Mengen  $C_\omega$  und  $C_\tau$ . Dann gilt: Für  $\theta = 0$  ist die asymptotische Verteilung von  $\lambda^*(N) = P_\omega(X) / P_\tau(X)$ , wobei  $P_q(X) = \sup_{\theta \in q} L(X, \theta)$ , die gleiche wie für den Test von  $\theta \in C_\omega$  gegen  $\theta \in C_\tau$  beruhend auf einer Beobachtung aus einer normal- $N(\theta, J^{-1})$ -verteilten Gesamtheit.

*M. P. Geppert-O. Ludwig.*

**Chernoff, Herman and E. L. Lehmann:** The use of maximum likelihood estimates in  $\chi^2$  tests for goodness of fit. *Ann. math. Statistics* **25**, 579—586 (1954).

Bei Benutzung von  $\chi^2$  zur Testung der Hypothese, daß eine Stichprobe aus einer Gesamtheit von gegebenem Funktionstyp stamme, werden die Populationsparameter auf Grund der Zahlen  $m_i$  der in die  $i$ -te von  $k$  Klassen fallenden Beobachtungen geschätzt. Sei dem entsprechend  $\tilde{p}_i$  der beste asymptotisch normale Schätzer für die Wahrscheinlichkeit  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) dafür, daß eine Beobachtung in die  $i$ -te Klasse falle, z. B. der plausibelste Schätzer (maximum likelihood estimate); dann ist bekanntlich unter gewissen Regularitätsbedingungen  $\tilde{R} = \sum (m_i - n \tilde{p}_i)^2 / n \tilde{p}_i$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $k - s - 1$  F. G., wobei  $s$  die Zahl der (unabhängig voneinander) geschätzten Populationsparameter ist. Sind jedoch die Einzelbeob-

achtungen  $x_1, \dots, x_n$  bekannt, so kann man den plausibelsten Schätzer  $\hat{p}_i$  für  $p_i$  unter Benützung aller Beobachtungen bilden. Die asymptotische Verteilung von  $\hat{R} = \Sigma (m_i - n \hat{p}_i)^2 / n \hat{p}_i$  ist dann keine  $\chi^2$ -Verteilung, sondern liegt „zwischen“ der von  $\tilde{R}$  und der von  $R = \Sigma (m_i - n p_i)^2 / n p_i$  ( $\chi^2$ -Verteilung mit  $k - 1$  F. G.), denn es gilt:  $\hat{R}$  ist asymptotisch verteilt wie  $\sum_{i=1}^{k-s-1} y_i^2 + \sum_{i=k-s}^{k-1} \lambda_i y_i^2$ , wo die  $y_i$  unabhängig normal- $N(0, 1)$ -verteilt sind und die  $\lambda_i$  zwischen 0 und 1 liegen (und als Lösungen einer mit den Informationsmatrizen  $\tilde{J}$  und  $J$  zusammenhängenden charakteristischen Gleichung bestimmt werden können). Bei dem in Lehrbüchern oft empfohlenen  $\chi^2$ -Test mit  $\hat{R}$  wird demnach die Wahrscheinlichkeit für Irrtümer 1. Art vergrößert. Numerische Beispiele zeigen, daß dieser Fehler bei der Schätzung von Parametern der Normalverteilung größer ist als bei der von Parametern der Poissonverteilung.

*M. P. Geppert-O. Ludwig.*

**Elfving, G.: Convex sets in statistics.** 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund 1953, 34—39 (1954).

The author gives a simple proof of a generalization due to H. Chernoff [Ann. math. Statistics **24**, 586—602 (1953)] of his earlier theorem concerning the optimum allocation theory. The article contains also a clear geometrical illustration of the topic in a special case. Certain unknown parameters  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  have to be determined by observations. A number  $r$  of potential experiments is available, each of which may be independently repeated, or not performed at all. Each experiment consists in observing one or more quantities  $y$ , every  $y$  being a sum of a linear combination of the  $\beta$ 's with known coefficients and an error term  $\eta$ . The  $\eta$ 's are supposed to be uncorrelated stochastic variables. The question is how to find an allocation of the number  $n$  of actual experiments between the  $r$  possibilities, which is optimal for the estimation of one or more parameters. The goodness of estimation is measured by the variance or by the sum of variances. When  $s$  out of  $k$  parameters have to be estimated, the optimum allocation need comprise at most  $k + (k - 1) + \dots + (k - s + 1)$  experiments. The proof consists of an analysis of a scalar-vector function on a simplex of the  $\frac{1}{2}k(k + 1)$ -dimensional Euclidian space. The components of the vector variable are the elements of the information matrix. It is assumed that the information matrix is non singular in the minimum point, which restriction is not supposed in the proof of Chernoff. The result was found by Elfving for  $s = 1$  and  $s = k$ .

*I. Vincze.*

**Patankar, V. N.: The goodness of fit of frequency distributions obtained from stochastic processes.** Biometrika **41**, 450—462 (1954).

Verf. knüpft an M. S. Bartlett (dies. Zbl. **42**, 144) an und untersucht die Anwendbarkeit des klassischen  $\chi^2$ -Kriteriums  $\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$  zur Prüfung der Anpassungsgüte einer durch ein vorgegebenes stochastisches Modell bestimmten theoretischen Verteilung  $m_i$  an die entsprechende empirische Häufigkeitsverteilung  $n_i$ , wenn die Beobachtungen voneinander unabhängig und geordnet sind. Unter der von Bartlett für nur endlich-abhängige Beobachtungsreihen als gültig bewiesenen Annahme, daß die  $n_i$  asymptotisch einer Multinormalverteilung folgen, werden aus deren charakteristischer Funktion die Kumulanten von  $\chi^2$  und insbesondere  $E(\chi^2) = A$ ,  $\text{var } \chi^2 = 2B$  durch deren Varianz-Kovarianz-Matrix  $\{\sigma_{ij}\}$  ausgedrückt; auf Grund der Momentenmethode wird dann näherungsweise  $A \chi^2/B$  als modifiziertes  $\chi^2$  mit  $(A^2/B)$  F. G. zur Testung der Anpassungsgüte benutzt. Die Methode wird durchgeführt für den Fall, daß die Stichprobe 1. einem Poisson-Markoff-Prozeß [S. Chandrasekhar, Reviews modern Phys. **15**, 1 (1943)], 2. einem eindimensionalen Normal-Markoff-Prozeß, 3. einem degenerierten zweidimensionalen Normal-Markoff-Prozeß entstamme. Zahlenbeispiele.

*M. P. Geppert.*

**Reiersøl, Olav:** Tests of linear hypotheses concerning binomial experiments. Skand. Aktuarietidskr. **54**, 38—59 (1954).

Die Arbeit knüpft aufs engste an J. Neyman (dies. Zbl. **39**, 143) an und wendet dessen auf A) dem Prinzip der maximalen Plausibilität (Maximum-likelihood-Prinzip), bzw. auf B) minimalisiertem  $\chi^2$  mit theoretischer Häufigkeit im Nemner bzw. auf C) minimalisiertem  $\chi^2$  mit empirischer Häufigkeit im Nemner beruhende BAN- (beste asymptotisch normale) Schätzungen auf Serien  $S_{ij}$  ( $i = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, \dots, s_j$ ) unabhängiger binomialer Versuche an, bei welchen in jedem der  $n_{ij}$  Versuche von  $S_{ij}$  das Resultat  $R_{ij}$  jeweils die konstante Wahrscheinlichkeit  $p_{ij}$  habe. Geprüft werden Hypothesen der Form  $\sum_{j=1}^{s_j} c_{ij} p_{ij} = 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ) bzw.  $\sum_j c_{1j} p_{1j} = \dots = \sum_j c_{rj} p_{rj}$ . Da alle drei Systeme A, B, C von BAN-Schätzungen nach Neyman asymptotisch äquivalent sind, empfiehlt Verf. in den meisten Fällen als rechnerisch bequemste — Prüfgrößen, die auf Grund von C konstruiert und für  $N = \sum \sum n_{ij} \rightarrow \infty$  asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt sind. Die allgemeinen Sätze enthalten als Spezialfälle die Prüfung aller, sowohl den Hauptwirkungen (main effects) als auch den Wechselwirkungen (interactions) entsprechenden Hypothesen bez. unbekannter Grundwahrscheinlichkeiten bei ein-, zweifacher,  $r = 2$ ,  $2 = 2$ ,  $2^k$ - und  $3 = 2 = 2$ -Aufteilung von Binomialversuchen. *M. P. Geppert.*

**Andrews, Fred C.:** Asymptotic behavior of some rank tests for analysis of variance. Ann. math. Statistics **25**, 724—736 (1954).

Zum Test der Hypothese, daß  $c$  Wahrscheinlichkeitsverteilungen (die  $i$ -te durch  $n_i$  Beobachtungen gegeben) gleich sind, gibt es den  $H$ -Test von Wallis und Kruskal (dies. Zbl. **48**, 117), der auf  $H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^c n_i \left( \bar{R}_i - \frac{N+1}{2} \right)^2$  ( $R_i =$  gemittelter Rang der Beobachtungswerte aus der  $i$ -ten Reihe bez. aller  $N = \sum n_i$  Beobachtungen) beruht: Hypothese annehmen genau, wenn  $H \leq H_0$ ; und den Mood-Brownschen Medianentest [(Mood, Introduction to the theory of statistics (dies. Zbl. **39**, 139, Kap. 16.5)], der entsprechend  $M = \frac{N(N-1)}{b(N-b)} \sum_{i=1}^c \frac{1}{n_i} \left( m_i - \frac{n_i}{N} \right)^2$  verwendet ( $b = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ ,  $m_i =$  Anzahl der Beobachtungen aus der  $i$ -ten Reihe, die größer als die Gesamtmediane sind). Hier werden Grenzwertbetrachtungen ( $N \rightarrow \infty$ ) angestellt bei Alternativannahmen, daß statt  $F(x)$  die Verteilungsfunktion  $F(x + \theta_i | n)$  ( $i = 1, \dots, c$ ;  $\theta_i$  fest) zugrunde liegen: Unter gewissen Voraussetzungen über  $F$  und  $n_i \rightarrow s_i$ ,  $n$  ( $s_i =$  fest) streben bei  $n \rightarrow \infty$   $H$  und  $M$  gegen schiefe  $\chi^2$ -Verteilungen. Auch die asymptotische relative Wirksamkeit (efficiency) beider Tests und des klassischen  $F$ -Testes (z. B. Mood, loc. cit., Kap. 14.2) wird bestimmt. *D. Morgenstern.*

**Hiraga, Yoshihiko, Hidenori Morimura and Hisao Watanabe:** Tables for three-sample test. Ann. Inst. statist. Math. **5**, 97—102 (1954).

Als Kriterium für die Hypothese, daß zwei Stichproben vom Umfange  $n_1, n_2$  der gleichen Verteilung entstammen, empfehlen A. Wald und J. Wolfowitz (dies. Zbl. **23**, 248) die Gesamtzahl  $r = r_1 + r_2$  der Merkmalsiterationen (runs) in der nach steigender Größe geordneten,  $n (= n_1 + n_2)$ -gliedrigen Folge, die durch Vereinigung der beiden Stichproben entsteht. Unter Benützung der von A. M. Mood (dies. Zbl. **24**, 53) auch für mehr als zwei Elementarten bestimmten bedingten Verteilung der Gesamtzahl  $r$  der Merkmalsiterationen tabuliert Verf. für das entsprechende Drei-Stichproben-Kriterium (in Tafel 1 auf Grund der exakten Verteilung, in Tafel 2 und 3 auf Grund der approximativ gültigen Normalverteilung) die dem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ , in Tafel 3 auch  $\alpha = 1\%$ , entsprechenden kritischen  $r$ -Werte für  $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq 10$  bzw.  $10 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq 30$  bzw.  $11 \leq n_1 = n_2 = n_3 \leq 30$ . *M. P. Geppert.*



Fieller, E. C. and H. O. Hartley: Sampling with control variables. *Biometrika* **41**, 494—501 (1954).

In der Statistik quantitativer Merkmale ist folgendes Verfahren geläufig. Um eine Schätzung des unbekannten Populationsmittelwertes  $\eta$  der Variablen  $y$  zu erzielen, die genauer sei als der Stichprobenmittelwert  $\bar{y}$ , zieht man eine mit  $y$  eng korrelierte Hilfsvariable  $x$  mit bekanntem Populationsmittelwert  $\xi$  heran und schätzt  $\eta$  auf Grund der Regression von  $y$  bzw.  $x$  in der Form  $\bar{y} + b(\bar{x} - \bar{x})$  aus den Mittelwerten  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  einer Stichprobe von  $(x, y)$ -Wertepaaren. Diesen Gedanken übertragen Verf. auf die Schätzung einer unbekannten Wahrscheinlichkeits-Verteilung  $p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) auf Grund der entsprechenden Häufigkeitsverteilung  $n_i/N$  in einer Stichprobe von  $N$  Elementen. Statt der einfachen Aufgliederung nach Merkmal  $i$  betrachtet man die zweifache Aufteilung  $n_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, k$ ) der  $N$ -gliedrigen Stichprobe mit den Randverteilungen  $n_i = \sum_j n_{ij}$ ,  $n_j = \sum_i n_{ij}$ , ( $N = \sum_i \sum_j n_{ij}$ ); und entsprechend die zweidimensionale Populationsverteilung  $p_{ij}$  mit den Randverteilungen  $p_i$ ,  $p_j$ . Ist die Randverteilung  $p_j$  bekannt, so benutzt man als verbesserte (jedoch nicht streng erwartungstreue) Schätzung für  $p_i$  die plausibelste, d. h. auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips gewonnene:

$$\hat{p}_i = \sum_j p_j \cdot u_{ij} \quad \text{mit} \quad u_{ij} = n_{ij}/n_j, \quad \text{wenn} \quad n_j > 0, \quad \text{bzw.} = n_i/N, \quad \text{wenn} \quad n_j = 0,$$

deren Erwartungswert und Varianz

$$E(\hat{p}_i) = p_i - \sum_j (1 - p_j)^{N-1} (p_{ij} - p_i \cdot p_j),$$

$$\text{Var}(\hat{p}_i) = p_i \cdot (1 - p_i)/N - \sum_j (p_{ij} - p_i \cdot p_j)^2 / N p_j + \text{Restglieder}$$

lauten. Die relative Varianzverkleinerung von  $\hat{p}_i$  gegenüber der Schätzung  $n_i/N$  lautet daher näherungsweise

$$[\text{var}(n_i/N) - \text{var} \hat{p}_i] / \text{var}(n_i/N) \sim \sum_j (p_{ij} - p_i \cdot p_j)^2 p_i^{-1} p_j^{-1} (1 - p_i)^{-1},$$

und ihr gewogener Durchschnitt ist mit K. Pearsons mittlerer quadratischer Kontingenz  $\Phi^2$  durch die Relation

$$\sum_i (1 - p_i) \cdot [1 - \text{var} \hat{p}_i / \text{var}(n_i/N)] \sim \sum_i \sum_j (p_{ij} - p_i \cdot p_j)^2 p_i^{-1} p_j^{-1} = \Phi^2$$

verbunden. Ähnlich wie im Falle quantitativer Merkmale ist der Gewinn durch Benutzung von  $\hat{p}_i$  an Stelle von  $n_i/N$  desto größer, je strammer die Abhängigkeit der beiden Merkmale. Illustration an einem Zahlenbeispiel. *M. P. Geppert.*

**Stoker, D. J.: An upper bound for the deviation between the distribution of Wilcoxon's test statistic for the two-sample problem and its limiting normal distribution for finite samples. I. II.** *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **57**, 599—606, 607—614 (1954).

Zur Prüfung der Hypothese  $H_0$ , daß die Variablen  $X$ ,  $Y$  der gleichen Verteilung  $F(t) = G(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , folgen, an Hand zweier unabhängiger Stichproben  $x_1, \dots, x_m$  und  $y_1, \dots, y_n$ , dient nach F. Wilcoxon [*Biometrics Bull.* **1**, 80—83 (1945)] die Anzahl der Paare  $(i, j)$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) mit  $y_j < x_i$ , also

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \iota(x_i - y_j) \quad \text{mit} \quad \iota(z) = 1, \quad \text{wenn} \quad z \geq 0, \quad \text{bzw.} = 0, \quad \text{wenn} \quad z < 0.$$

Während frühere Autoren die asymptotische Normalität der Verteilung von  $U$  für  $m, n \rightarrow \infty$  mit konstantem  $m/n$ , sowohl unter  $H_0$  als auch unter ziemlich allgemeinen Alternativ-Hypothesen über die kontinuierlichen Verteilungen  $F(x)$ ,  $G(y)$  nachgewiesen haben, leitet Verf. in den beiden Arbeiten darüber hinaus unter bestimmten Voraussetzungen über die Unstetigkeitspunkte von  $F(x)$  und  $G(y)$  eine Reihe von

Sätzen über die maximale Abweichung der exakten  $U$ -Verteilung von der asymptotisch geltenden Normalverteilung her.

*M. P. Geppert.*

**Terpstra, T. J.:** A non-parametric test for the problem of  $k$  samples. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 505—512 (1954).

An Hand von  $k$  unabhängigen Stichproben  $x_{h,i}$  ( $h = 1, \dots, k$ ;  $i = 1, \dots, n_h$ ) prüft Verf. die Hypothese  $H_0$ , daß die  $k$  unabhängig voneinander verteilten Variablen  $x_1, \dots, x_k$  derselben beliebigen stetigen Verteilung folgen, mittels des Kriteriums:

$$Q = 6 \cdot \sum_h \sum_i \tilde{U}_{h,i}^2 / n_h n_j - 12 \cdot (n+1)^{-1} \cdot \sum_i \tilde{U}_i^2 / n_i,$$

mit  $\tilde{U}_{h,i} = 2^{-1/2} \cdot \sum_j \sum_l \text{sgn}(x_{h,i} - x_{j,l}) \cdot \tilde{U}_{i,j}$ ,  $\tilde{U}_i = \sum_j \tilde{U}_{i,j}$ . Die unhandliche exakte Verteilung von  $Q$  unter  $H_0$  läßt sich allgemein nur formal angeben. Unter der Voraussetzung  $n_h = a \cdot m - b_h$ ,  $h = 0(1)m$  beweist Verf., daß die  $\binom{k}{2}$  Variablen  $m^{3/2} \cdot \tilde{U}_{h,i}$  ( $h < j$ ) unter  $H_0$  für großes  $m$  annähernd simultan-normal verteilt sind mit

$$\text{var}(\tilde{U}_{h,j}|H_0) = n_h n_j (n_h + n_j + 1)/12,$$

$$\text{cov}(\tilde{U}_{h,j}, \tilde{U}_{i,j}|H_0) = n_h n_i n_j / 12, \quad \text{cov}(\tilde{U}_{h,j}, \tilde{U}_{l,m}|H_0) = 0,$$

während ihre Grenzverteilung eine singuläre Normalverteilung vom Rang  $(k-1)$  ist. Daraus folgt, daß  $Q$  für große  $m$  approximativ mit  $\binom{k}{2}$  F. G.  $\chi^2$ -verteilt ist. Für

$k = 3$ ,  $n_1 = n_2 = n_3$  werden die exakte Verteilung von  $Q$  sowie die dem Signifikanzniveau 0,1 bzw. 0,05 bzw. 0,01 entsprechenden Signifikanzgrenzen von  $Q$  tabuliert; für  $k = 3$ ,  $n_1 = n_2 = n_3$  exakte und approximative  $\chi^2$ -Verteilung von  $Q$ . Das demnach asymptotisch verteilungsfreie Kriterium  $Q$  stellt eine Ausdehnung des für  $k = 2$  geltenden Wilcoxon-Testes [F. Wilcoxon, Biometrics Bull. **1**, 80—83 (1945)] dar.

*M. P. Geppert.*

**Graf, Ulrich und Rolf Wartmann:** Die Extremwertkarte bei der laufenden Fabrikationskontrolle. Mitteil.-Bl. math. Statistik **6**, 188—203 (1954).

In Fortsetzung ihrer früheren Arbeit (dies. Zbl. **56**, 132) behandeln Verff. die Stichprobenkarten mit technischen Toleranzgrenzen. Es werden Kontrollgrenzen festgelegt und Fragen der Aussagenschärfe untersucht, wenn der Mittelwert linear mit der Zeit wächst. Verff. berechnen die Wahrscheinlichkeit  $u_n$  dafür, daß in der  $n$ -ten Stichprobe zum ersten Male die Kontrollgrenzen überschritten werden und geben Nomogramme an, mit deren Hilfe sich die  $u_n$  leicht finden lassen.

*M. P. Geppert-O. Ludwig.*

**Epstein, Benjamin:** Tables for the distribution of the number of exceedances. Ann. math. Statistics **85**, 762—768 (1954).

Einer stetig verteilten Gesamtheit seien unabhängig voneinander zwei zufällige Stichproben vom Umfang  $n$  entnommen. Sei  $U_r^n$  die Zahl der Werte der zweiten Stichprobe, die den  $r$ -kleinsten Wert der ersten Stichprobe übertreffen. Dann gilt

$$\Pr(U_r^n = x) = \binom{n-x+r-1}{r-1} \binom{n-r+x}{x} / \binom{2n}{n}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

Die Werte von  $\Pr(U_r^n = x)$  werden für 2, 3, ..., 15, 20 tabuliert. Auf Grund der Identitäten  $\Pr(U_r^n = x) = \Pr(U_{r+1}^n = r-1)$ ,  $\Pr(U_r^n = x) + \Pr(U_{n-r+1}^n = n-x-1) = 1$ ,  $\Pr(U_r^n = n-r) = \frac{1}{2}$ , deren Beweis sich aus den Resultaten einer Arbeit von E. J. Gumbel und H. von Schelling (dies. Zbl. **38**, 90) ergibt, genügen hierbei die Bereiche  $r = 1, 2, \dots, [n/2]$ ;  $x = r-1, r, \dots, n-r+1$ . Ein verwandtes Problem ist: Seien  $x_{r,n}$  und  $y_{r,n}$  die  $r$ -kleinsten Werte von zwei Stichproben vom Umfang  $n$  aus einer stetigen Gesamtheit,  $z_{r,n} = \max(x_{r,n}, y_{r,n})$  und  $W_r^n$  die Zahl der Werte der  $y$ -Stichprobe, die  $\leq x_{r,n}$  sind, falls  $z_{r,n} = x_{r,n}$  ist, oder die Zahl der Werte der  $x$ -Stichprobe, die  $\leq y_{r,n}$  sind, falls  $z_{r,n} = y_{r,n}$  ist; dann ist  $\Pr(W_r^n = x)$

$$= 2 \binom{n-x+r-1}{r-1} \binom{n-r+x}{x} / \binom{2n}{n}, \quad x = 0, 1, \dots, n-r; \quad \Pr(W_r^n \leq r) = 1,$$
  
 $x \geq n-r$ . Anwendungen auf Überschwemmungs- und Dürre-Probleme, verteilungsfreie Tests für Abgleiten des Mittelwertes und Tests der Lebensdauer werden diskutiert und numerische Beispiele gegeben. *M. P. Geppert-O. Ludwig.*

**Rosenbaum, S.:** Tables for a nonparametric test of dispersion. *Ann. math. Statistics* **24**, 663–668 (1953).

**Rosenbaum, S.:** Tables for a nonparametric test of location. *Ann. math. Statistics* **25**, 146–150 (1954).

Es werden die kritischen 5%- und 1%-Punkte für zwei verteilungsfreie Zweistichprobentests berechnet. Das Prüfmaß des ersten Tests ist die Anzahl der Beobachtungen der einen Stichprobe, die außerhalb der Randwerte der zweiten Stichprobe liegen; das Prüfmaß des zweiten Tests ist die Anzahl der Beobachtungen, die größer als der größte Wert der zweiten Stichprobe sind. Der erste Test ist zum Prüfen eines Streuungsunterschiedes, der zweite zum Prüfen eines Lageunterschiedes geeignet. Die Verteilung dieser Prüfmaße wurde von S. Wilks [*Ann. math. Statistics* **13**, 400–409 (1942)] abgeleitet. *E. Walter.*

**Gini, Corrado:** Estensioni e portata della teoria della dispersione. *Studies Math. Mech.*, presented to Richard von Mises, 323–335 (1954).

$N$  Beobachtungen seien gleichzeitig aufgeteilt in  $s$  Abschnitte der Umfänge  $n_1, \dots, n_s$  und nach den  $t$  Ausprägungen (Modalitäten) eines Merkmals, die insgesamt in den Anzahlen  $M_1, \dots, M_t$  auftreten. Dieses zweidimensionale ( $s \cdot t$ )-Schema mit den Rändern  $n_1, \dots, n_s$  und  $M_1, \dots, M_t$ , wobei  $\sum_{k=1}^s n_k = \sum_{j=1}^t M_j = N$ , läßt sich zur Bestimmung der dem reinen Zufall entsprechenden theoretischen Streuung durch ein Urnenschema mit Ziehungen ohne Zurücklegen auf zwei verschiedene Weisen kombinatorisch deuten: Aus der Urne mit  $N$  Kugeln  $t$  verschiedener Farben in Anzahlen  $M_1, \dots, M_t$  werden  $n_1, \dots, n_s$  Kugeln gezogen (Schema der zufälligen Ziehungen), oder umgekehrt aus der Urne mit  $N$  Kugeln  $s$  verschiedener Farben in Anzahlen  $n_1, \dots, n_s$  werden  $M_1, \dots, M_t$  Kugeln gezogen (Schema der zufälligen Aufteilungen). Beide Betrachtungen ergeben den gleichen Dispersionskoeffizienten. Das Schema der zufälligen Aufteilungen bleibt jedoch auch für Ziehungen mit Zurücklegen anwendbar, wobei die Relation  $\sum_{j=1}^t M_j = N$  ihre Gültigkeit verliert, und weitet somit den bisher auf genetische Beziehungszahlen fußenden Anwendungsbereich der Dispersionstheorie aus auf Gliederungszahlen. Verf. dehnt weiterhin den Anwendungsbereich der Dispersionstheorie aus, indem er statt einer Urne mehrere in Abhängigkeit voneinander hintereinander geschaltete Urnen und entsprechende Dispersionskoeffizienten höherer Ordnung betrachtet. *M. P. Geppert.*

**Castro, Gustavo de:** Note über die Grenzverteilungen der geordneten Statistiken. *Inst. Actuários Portug., Bol.* **9**, 35–40 (1954) [Portugiesisch mit engl. Zusammenfassg.].

Some lemmas embodied in the usual establishment of the limiting laws of Gumbel for ordered statistics are explicated. *Autoreferat.*

**Zia ud-Din, M.:** Expression of the  $k$ -statistics  $k_9$  and  $k_{10}$  in terms of power sums and sample moments. *Ann. math. Statistics* **25**, 800–803 (1954).

Zu den aus der Literatur bekannten Formeln, die die ersten acht Stichprobenkumulanten  $k_r$  ( $k$ -Maßzahlen,  $k$ -statistics) durch die  $r$ -ten Potenzsummen ( $r = 1, \dots, 8$ ) der Beobachtungen (und damit durch die Stichprobenmomente) ausdrücken [z. B. P. L. Dressel, *Ann. math. Statistics* **11**, 33–57 (1940); M. G. Kendall, *Advanced Theory of Statistics*, I, p. 254–261 (1952)], fügt Verf. noch die entsprechenden Formeln für  $k_9$  und  $k_{10}$  hinzu. *M. P. Geppert-O. Ludwig.*



Pillai, K. C. S. and K. V. Ramachandran: On the distribution of the ratio of the  $i$ -th observation in an ordered sample from a normal population to an independent estimate of the standard deviation. *Ann. math. Statistics* **25**, 565–572 (1954).

Verff. behandeln einige im Zusammenhang mit der Verteilung des  $i$ -ten Stufwertes  $x_i$  einer geordneten Stichprobe  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  aus einer mit Mittelwert 0 und Varianz 1 normal verteilten Gesamtheit auftretende Verteilungen. Mit Hilfe der Entwicklung

$$I(k, x) = \left( \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt / \sqrt{2\pi} \right)^k = e^{-kx^2/6} (a_0^{(k)} + a_1^{(k)} x + a_2^{(k)} x^2 + \dots)$$

erhält die Verteilung von  $x_i$  die Form

$$p(x_i) = \frac{n!/(i-1)!(n-i)!}{\sqrt{2\pi}} \cdot I(i-1, x_i) \cdot I(n-i, -x_i) \exp(-x_i^2/2) \\ = \frac{n!/(i-1)!(n-i)!}{\sqrt{2\pi}} e^{-(n+2)x_i^2/6} (b_0^{(i-1, n-i)} + b_1^{(i-1, n-i)} x_i + \dots)$$

mit  $b_j^{(k, m)} = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} a_i^{(k)} a_{j-i}^{(m)}$ . Die  $a_i^{(k)}$  werden für  $i = 0, \dots, 30$ ;  $k = 1, \dots, 7$  tabuliert. Sei  $s$  eine unabhängige Schätzung von  $\sigma$  mit  $v$  F. G., dann folgt  $q_i = x_i/s$  der Verteilung

$$p(q_i) = [n! (v/2)^{v/2}/(i-1)!(n-i)! \sqrt{2\pi} \cdot \Gamma(v/2)] \\ \cdot \sum_{j=0}^i b_j^{(i-1, n-i)} q_i^j \cdot [6(n-2)q_i^2 + 3]^{(i-1)/2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(j+v-1))].$$

Für  $q_i = x_i/s$  werden hiernach die oberen 5%-Punkte für  $n = 1, \dots, 8$  tabuliert. Für den studentisierten maximalen Absolutwert der Stichprobe, den Verff. mißverständlich mit  $u_n = x_n/s$  bezeichnen, wird die Verteilung in ähnlicher Weise angegeben und werden die oberen und unteren 5%-Punkte tabuliert.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Birnbaum, Z. W. and H. Rubin: On distribution-free statistics. *Ann. math. Statistics* **25**, 593–598 (1954).

Es seien  $\Omega$  und  $\Omega'$  zwei Klassen kumulativer Verteilungsfunktionen. Eine reelle Größe  $W = S(X_1, X_2, \dots, X_n; G)$  werde ein Prüfmaß (statist. statistic) in  $\Omega$  bezüglich  $\Omega'$  genannt, wenn für  $G \in \Omega$ ,  $F \in \Omega'$  und  $X_1, \dots, X_n$  im  $n$ -dimensionalen Stichprobenraum für eine Zufallsvariable  $X$  mit der kumulativen Verteilungsfunktion  $F = 1 - S(X_1, \dots, X_n; G)$  fast überall im Stichprobenraum definiert ist, 2.  $W = S(X_1, \dots, X_n; G)$  einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(W; F) = P(S(X_1, \dots, X_n; G); F)$  folgt. Wenn eine im  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel definierte, in ihren Argumenten symmetrische Funktion  $\Phi$  existiert, so daß  $S(X_1, X_2, \dots, X_n; G) = \Phi(|G(X_1), G(X_2), \dots, G(X_n)|)$  fast überall im Stichprobenraum gilt, so heiße  $S$  „von der Struktur (d)“. Wenn  $\Omega = \Omega'$  und  $P(S(X_1, \dots, X_n; G); G)$  unabhängig von  $G$  (für  $G \in \Omega$ ) ist, dann heiße  $S$  „verteilungsfrei“. Ein Statist., der in  $\Omega_2$ , der Klasse aller kontinuierlichen Verteilungen, bezüglich  $\Omega_2$  die Struktur (d) hat, ist in Klasse aller kontinuierlichen Verteilungen, bezüglich  $\Omega_2$  verteilungsfrei. Sei  $\Omega^*$  die Klasse aller stetigen kumulativen Verteilungsfunktionen, so daß jedes  $G \in \Omega^*$  monoton wächst in  $0 \leq G(x) \leq 1$ ; dann heiße  $S(X_1, \dots, X_n; G)$  „streng verteilungsfrei in  $\Omega^*$  bezüglich  $\Omega^*$ “, falls  $P[S(X_1, \dots, X_n; G); F]$  nur von  $F \cdot G^{-1}$  abhängt ( $G^{-1}$  ist die inverse Funktion zu  $G$ ) für jedes  $G \in \Omega^*$ ,  $F \in \Omega'$ . Ein Statist., der in  $\Omega^*$  bezüglich  $\Omega^*$  die Struktur (d) hat, ist streng verteilungsfrei. Umgekehrt beweist Verff.: Wenn ein  $S(X_1, \dots, X_n; G)$  in  $\Omega^*$  bezüglich  $\Omega^*$  in  $X_1, X_2, \dots, X_n$  symmetrisch und streng verteilungsfrei ist, so hat es die Struktur (d).

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Birnbaum, Allan: Combining independent tests of significance. *J. Amer. statist. Assoc.* **49**, 559–574 (1954).

Sei  $H_0$  die zu testende Hypothese. Dem aus einer Stichprobe gewonnenen Wert  $t_i$  eines einen besten Test für  $H_0$  liefernden Statisten (Prüfmaß, statistic)

entspreche unter  $H_0$  die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $u_i = \int_{t_i}^{\infty} p_i(t_i) dt_i$ .

Es liegen  $k$  Statisten  $t_1, \dots, t_k$  vor, wobei  $t_i$  und  $t_j$  für  $j \neq i$  gegenseitig stochastisch unabhängig seien. Dies ist erfüllt, wenn jedes  $t_i$  aus einer anderen, von allen übrigen unabhängigen Stichprobe gewonnen ist; falls jedem  $t_i$  dieselben Beobachtungswerte zugrunde liegen, müssen hingegen die  $t_i$  gegenseitig stochastisch unabhängige Funktionen dieser Werte sein. Unter  $H_0$  folgt jedes  $u_i$  der Gleich- (Rechteck-) Verteilung  $f(u_i) = 1$  für  $0 \leq u_i \leq 1$ , bzw.  $= 0$  für  $u_i < 0, u_i > 1$ . Die Gegenhypothese ist  $H_H$ : Ein oder mehrere  $u_i$  folgen (unbekannten) nicht zunehmenden Nicht-Rechteck-Verteilungen  $g_i(u_i)$ ; ein spezieller Fall hiervon ist  $H_A$ : alle  $u_i$  folgen derselben (unbekannten) nicht zunehmenden Nicht-Rechteck-Verteilung  $g(u)$ . Verf. betrachtet das Problem der Kombination von  $k$  unabhängigen Testgrößen, deren jede einer Verteilung der (Binomial-, Poisson-, Normal-Verteilung mit bekannter Varianz bzw. mit bekanntem Mittelwert als Spezialfälle umfassenden) Koopman-Form  $f(x|\theta) = c(\theta) \cdot a(\theta)^x b(x)$  folgt. Eine allgemeine Bedingung für die Zulässigkeit der Kombinationsmethode ist: Wenn  $H_0$  für eine gegebene Menge der  $u_i$  abgelehnt wird, wird es auch abgelehnt für jede Menge  $u_i^*$  mit  $u_i^* \leq u_i$  für jedes  $i$ . Ein zulässiger Test ist ein solcher, der nicht gleichmäßig verbessert werden kann. Notwendige Bedingung hierfür ist, daß der Annahmebereich konvex ist. Verf. untersucht einige in der Literatur vorgeschlagene Kombinationsmethoden, z. B. die, bei denen  $H_0$  genau dann abgelehnt wird, wenn a)  $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k \leq c$ , wobei  $c$  eine zu dem gewünschten Signifikanzniveau gehörende vorgegebene Konstante sei (R. A. Fisher), b)  $(1 - u_1) \cdot (1 - u_2) \cdot \dots \cdot (1 - u_k) \geq c$  (K. Pearson), c)  $u_i \leq c$  für  $r$  oder mehrere der  $u_i$  ist, wobei  $r = 1$  als Fall 1,  $r = 2$  als Fall 2 usw. bezeichnet wird (Wilkinson), und zeigt, daß nur Fishers Methode und Wilkinsons Fall 1 im Falle von Koopman-Verteilungen auf konvexe Annahmebereiche führen.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

**Bezem, J. J.:** A sequential method for testing interaction of two factors producing the same all-or-none effect. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 424–431 (1954).

Es gebe zwei Individuenklassen  $C_0, C_1$ , (z. B.  $C_0$ : lebend,  $C_1$  tot), so daß der Übergang von  $C_0$  nach  $C_1$ , aber nicht von  $C_1$  nach  $C_0$  möglich sei; ferner zwei Faktoren  $A, B$ , so daß für ein Individuum von  $C_0$  bei einem Versuch die Wahrscheinlichkeit, in  $C_0$  zu verbleiben, unter Einwirkung von  $A$  bzw.  $B$  allein  $q_1$  bzw.  $q_2$ , unter gleichzeitiger Einwirkung von  $A$  und  $B$   $q_3$ , ohne Einwirkung von  $A$  oder  $B$   $q_0$  betrage. Zur Prüfung der Hypothese  $q_0 q_3 = q_1 q_2$ , d. h. der Unabhängigkeit von  $A, B$ , werden Versuche durchgeführt an je 4 Individuen der Klasse  $C_0$ , die der Einwirkung von weder  $A$  noch  $B$  ( $i = 0$ ), bzw.  $A$  allein ( $i = 1$ ) bzw.  $B$  allein ( $i = 2$ ) bzw.  $A$  und  $B$  ( $i = 3$ ) unterworfen werden. Mit  $x_i = 1$  bzw.  $0$  je nachdem, ob das  $i$ -te Individuum in  $C_0$  bleibt bzw. nach  $C_1$  übergeht, wird  $x = x_1 x_2 - x_0 x_3$  gebildet, welches nur der Werte  $+1, -1$  und  $0$  fähig ist. Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Versuch  $x = +1$  bzw.  $x = -1$  liefere, sofern er  $x \neq 0$  liefert, lautet

$$P[x = 1|x \neq 0] = q_1 q_2 (1 - q_0 q_3), \quad P[x = -1|x \neq 0] = q_0 q_3 (1 - q_1 q_2),$$

und die durch  $x \neq 0$  bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $n$  Versuche genau  $k$  Werte  $x = 1$

liefern,  $P[k|n, r] = \binom{n}{k} r^k (1+r)^{-n}$  mit  $r = P[x = 1|x \neq 0]/P[x = -1|x \neq 0] =$

$q_1 q_2 (1 - q_0 q_3) / q_0 q_3 (1 - q_1 q_2)^{-1}$ . Hierauf baut Verf. 1. einen nicht sequentiellen Test der Hypothese  $H_0$  ( $r = 1$ ) gegen zweiseitige Alternativen, 2. in Anlehnung an A. Wald einen auf der Größe  $z = \log P[k|n, r = r_1] - \log P[k|n, r = r_0]$  mit  $r_0 < 1 < r_1$  fußenden sequentiellen Test der Hypothese  $H_0$  ( $r = 1$ ) gegen die einseitige Alternative  $H_1$  ( $r > 1$ ), 3. in Anlehnung an J. de Boer (dies. Zbl. 52, 1.3) einen auf  $z_0 = \log P[k|n, r = r_0] - \log P[k|n, r = 1]$  und  $z_1 = \log P[k|n, r = r_1] - \log P[k|n, r = 1]$  mit  $r_0 < 1 < r_1$  fußenden sequentiellen Test von  $H_0$  ( $r = 1$ ) gegen die doppelte Alternative  $H_1$  ( $r \neq 1$ ).

M. P. Geppert.

**Malmquist, Sten:** On certain confidence contours for distribution functions. Ann. math. Statistics 25, 523–533 (1954).

Zur Bestimmung von Konfidenzgrenzen für unbekannte Verteilungsfunktionen benutzt Verf. die Theorie der stochastischen Prozesse. Sei  $F_N^*(U)$  die empirische Verteilungsfunktion einer Stichprobe von  $N$  unabhängigen Beobachtungen einer stochastischen Variablen mit der stetigen Verteilungsfunktion  $F(U)$  und  $X_N(U) =$

$\{F_N(U) - F(U)\}^2 N$ ; dann können Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse wie  $G_1[F(U)] \leq X_N(U) \leq G_2[F(U)]$  für alle  $U$  zur Testung der Hypothese, daß  $F(U)$  gleich einer gegebenen Funktion sei, verwendet werden. A. N. Kolmogoroff (dies. Zbl. 6, 174) hat die Grenzverteilung ( $N \rightarrow \infty$ ) für  $G_1(U) = a$  und  $G_2(U) = a$  abgeleitet. J. L. Doob (dies. Zbl. 35, 89) hat den Prozeß  $X_N(U)$  in einen Gaußschen Prozeß  $X(U)$  und diesen in einen Wiener-Prozeß  $W(t)$  transformiert und einen Satz bewiesen, dessen folgende Verallgemeinerung Verf. beweist: Wenn der Prozeß  $W(t)$  die Punkte  $\{x, s_1\}$  und  $\{y, s_2\}$  mit  $x \leq y$  durchschreitet, dann gilt

$$\begin{aligned} & \Pr \{W(t) \leq at + b, x \leq t \leq y | w(x) = s_1, w(y) = s_2\} \\ &= 1 - \exp \{-2R(1 - R^2)^{-1}(P_1 - s_1)x^{-1/2}(P_2 - s_2)y^{-1/2}\} \end{aligned}$$

mit  $R = \sqrt{xy}$  und  $s_1 \leq P_1 = ax + b$ ,  $s_2 \leq P_2 = ay + b$ . Verf. zeigt, wie auf Grund dieses Satzes Konfidenzgrenzen bestimmt werden können, vergleicht die Potenz (power) des so gewonnenen Tests für  $H_0: [F(U) \text{ normal } N(0, 1)]$  gegen  $H_1: [F(U) \text{ normal } N(m, 1)]$  mit der Potenz des schärfsten (most powerful) Tests und bestimmt die asymptotische Simultanverteilung der Koordinaten der maximalen Abweichung zwischen der Stichprobenverteilung und der zugehörigen Ausgangsverteilung.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Hoel, Paul G.: Confidence bands for polynomial curves. Ann. math. Statistics 25, 534—542 (1954).

Es sei  $y_t$  eine Zufallsvariable, die eine meßbare Eigenschaft eines Individuums einer Gesamtheit oder die Größe einer Gesamtheit zur Zeit  $t$  darstellt. Dann werde die Kurve  $\mu_t = E(y_t)$  die „mittlere Wachstumskurve“ (mean growth curve) genannt. An  $n = k$  zufällig ausgewählten Individuen werden  $n$  unabhängige Beobachtungsreihen der  $k$  i. a. gegenseitig abhängigen Variablen  $y_i = y_{t_i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) gewonnen mit Stichprobenmittelwerten  $\bar{y}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) und Stichproben-Kovarianz-Matrix  $(s_{ij})$ . Die mittlere Wachstumskurve sei ein Polynom von bekanntem Grad  $\leq k - 1$ . Ferner sei angenommen, daß die Verteilung von Hotellings verallgemeinertem  $T = \sqrt{(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k s^{ij} (\bar{y}_i - \mu_i)(\bar{y}_j - \mu_j)$  mit  $(s^{ij}) = (s_{ij})^{-1}$  vollständig bekannt sei; diese Annahme ist z. B. bei simultaner Normalverteilung von  $y_1, \dots, y_k$  erfüllt. Es werden Konfidenzgrenzen für die mittlere Wachstumskurve angegeben, d. h. zwei Kurven in der  $(t, y)$ -Ebene, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bereich zwischen ihnen die mittlere Wachstumskurve bedecke,  $\geq C_0$  ist, wenn die zusätzliche Bedingung  $T^2 \leq T_0^2$  mit  $P\{T^2 \leq T_0^2\} = C_0$  erfüllt ist.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Somerville, Paul N.: Some problems of optimum sampling. Biometrika 41, 420—429 (1954).

$k + 1$  Populationen  $II_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) folgen der gleichen Verteilung mit unbekanntem Verteilungsparameter  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k$ . Auf Grund einer  $n$ -gliedrigen Stichprobe aus jedem  $II_i$  werde entschieden, welche der  $II_i$  das größte  $\theta_i$  habe; dem so ausgewählten  $II_i$  werden  $N$  weitere Elemente zufällig entnommen. Ist  $W(\theta_i, \theta_0)$  mit  $W(\theta_0, \theta_0) = 0$ ,  $W(\theta_i, \theta_0) > 0$  für  $i \neq 0$  der durch irrtümliche Entscheidung für  $II_i$  an Stelle von  $II_0$  bewirkte Verlust bei Entnahme der  $N$ -gliedrigen endgültigen Stichprobe,  $C(n)$  die Kostenfunktion der  $n(k + 1)$ -gliedrigen Vor-Stichprobe und  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit, sich auf Grund derselben für  $II_i$  zu entscheiden, so ist  $n$  optimal zu bestimmen aus der Minimax-Forderung, daß der Maximalwert des erwarteten Verlustes  $L = \sum_{i=1}^k p_i \cdot W(\theta_i, \theta_0) + C(n)$  minimal werde. Verf. beweist

zwei Sätze über die Existenz eines lokalen Maximums von  $L$  und wendet die Ergebnisse an auf zwei wichtige Spezialfälle: Ein- und zweistufige Vor-Stichproben, wobei  $\theta_i$  den Mittelwert von  $II_i$  bedeute, der Stichproben-Mittelwert  $\bar{x}_i$  normal ver-



teilt sei und die endgültige  $N$ -gliedrige Probe dem  $II_i$  mit größten  $\bar{x}_i$  entnommen werden soll; und zwar ist hierbei im einstufigen Verfahren das größte aus allen  $\bar{x}_i$  der  $(k + 1)$   $n$ -gliedrigen Stichproben auszuwählen, während im mehrstufigen Verfahren ( $k = 2$ ) nach einer ersten  $n_1$ -gliedrigen Probe das  $II_i$  mit kleinstem  $\bar{x}_i$  ausgeschaltet wird und auf Grund der zweiten  $n_2$ -gliedrigen Stichprobe ( $3n_1 - 2n_2 = 3n$ ) aus den übrigen  $k$  Populationen das  $II_j$  mit größtem  $\bar{x}_j$  gewählt wird. *M. P. Geppert.*

**Nordbotten, Svein:** On the determination of an optimal sample size. Skand. Aktuarietidskr. **54**, 60—64 (1954).

Die Arbeit befaßt sich mit der Entwicklung einer Theorie zur Bestimmung des optimalen Stichprobenumfanges unter der Voraussetzung eines vorgegebenen Stichprobenverfahrens und vorgegebener Gesamtkosten (abhängig von dem für die Erhebung eines Elementes der Stichprobe benötigten Zeitaufwand und damit vom Stichprobenumfang selbst sowie den gesamten, für die Durchführung des Prozesses aufzuwendenden allgemeinen Kosten). Unter dem optimalen Stichprobenumfang wird dabei jener verstanden, der unter den angeführten Voraussetzungen eine Schätzung (z. B. eines Mittelwertes) mit höchstmöglicher Genauigkeit ergibt. Es werden ein allgemeines statistisches Modell, das die erörterte Frage aufwirft, sowie ein entsprechend spezialisiertes für ein einfaches Stichprobenverfahren behandelt.

*G. Wünsche.*

**Page, E. S.:** Continuous inspection schemes. Biometrika **41**, 100—115 (1954).

Überall, wo Beobachtungen in geordneter Reihenfolge gewonnen werden, kann es vorkommen, daß die Gesamtheit der Beobachtungen in Untergesamtheiten aufzuteilen ist, deren jede als Zufallsstichprobe aus einer gemeinsamen Verteilung, jede Untergesamtheit jedoch einem anderen Wert des Parameters (z. B. Mittelwert) dieser Verteilung entsprechend, angesehen werden kann. Die in der Arbeit behandelten Problemstellungen betreffen die evtl. Identifizierung der Untergesamtheiten bzw. die Aufdeckung der Wechsel des Parameterwertes. In der Praxis ergeben sich entsprechende Probleme etwa bei psychologischen Testversuchen, bei denen sich der Anteil richtiger Entscheidungen im Laufe des Experiments systematisch ändert, sowie im Aufgabenbereich der statistischen Qualitätskontrolle in der Industrie, wobei es darum geht, Wechsel in der Qualität der Ausbringung kontinuierlicher Produktionsprozesse zu erkennen. Die Terminologie dieses Anwendungsgebietes wird wegen ihrer besseren Verständlichkeit deshalb auch in der Arbeit bevorzugt.

*G. Wünsche.*

**Hayashi, Chikio:** Multidimensional quantification. With the applications to analysis of social phenomena. Ann. Inst. statist. Math. **5**, 121—143 (1954).

Die Arbeit baut auf früheren Untersuchungen des Verf. [u. a. C. Hayashi, dies. Zbl. **41**, 260; **49**, 99; Proc. Japan Acad. **30**, 61—65, 165—169 (1954)] auf und befaßt sich mit dem Problem der Quantisierung, d. h. der Zuordnung geeigneter numerischer Werte zu den verschiedenen Merkmalsklassen  $R$  qualitativer Merkmale auf Grund einer vorliegenden simultanen Aufteilung von  $n$  Individuen nach  $R$  qualitativen Merkmalen und gleichzeitiger Klassifizierung derselben in eine der  $S$  Schichten eines Außenseiter-Kriteriums. Die zuzuordnenden Variablen-Werte  $x_{jk}$  ( $j = 1, \dots, R$ ;  $k = 1, \dots, K$ ) bestimmen sich durch die Forderung, daß die an Hand von relativen Zwischen-Varianzen gemessene Wirksamkeit der Klassifizierung bzw. Schichtung maximal sei. Verf. behandelt u. a. den Fall eines ein- und den eines mehrdimensionalen Außenseiter-Kriteriums und erläutert die Methodik an mehreren Beispielen.

*M. P. Geppert.*

**Kitagawa, Tosio:** Empirical functions and interpenetrating sampling procedures. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A. **8**, 109—152 (1954).

Continuation of the author's papers, this Zbl. **45**, 406, **51**, 109 and a paper to appear in Sankhya, using nomenclature introduced there. The author's language is still very difficult to follow.

*S. Vajda.*

**Patterson, H. D.:** The errors of lattice sampling. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **16**, 140—149 (1954).

Unter „Lattice Samples“ versteht man Stichproben, die aus einer Mehrfachklassifikation von Einheiten mit je einer Einheit in jeder Unterklasse erhoben werden, und zwar derart, daß sie jeweils gleiche Anzahlen von Einheiten aus jeder Hauptklasse bzw. jeder Kombination von zwei, drei oder mehr Hauptklassen enthalten. Die Arbeit befaßt sich mit einer Diskussion der Fehler solcher Stichproben. Dazu werden Methoden beschrieben, die die Stichprobenstreuungen aus dem vollständigen Datenvorrat zu ermitteln gestatten. Der Fall der sog. „lateinischen Quadrate“ wird im einzelnen betrachtet, und es werden Beweise der verschiedenen Formeln gegeben. In dem Abschnitt über „lateinische Würfel“ wird eine Methode mitgeteilt, die es gestattet, die in Rede stehenden Formelausdrücke unmittelbar in Ausdrücken der Streuungskomponenten niederzuschreiben. Dieses Verfahren wird im übrigen ausgedehnt auf den allgemeinen Fall der Stichprobenerhebung aus einem „ $p^n$ -Lattice“.

G. Wünsche.

**Zelen, Marvin:** A note on partially balanced designs. *Ann. math. Statistics* **25**, 599—602 (1954).

It is known that a singular group-divisible design with 2 associate classes can be derived from a balanced incomplete block design (b.i.b.d.). (See, e. g., Bose and Connor, this Zbl. **47**, 129.) The main theorem of the present paper states that if in a partially b.i.b.d. with  $m$  associate classes of a certain type each treatment is replaced by  $n$  different treatments, the derived design is a partially b.i.b.d. with  $m+1$  associate classes and parameters which can be calculated from formulae given in the paper.

S. Vajda.

**Bradley, Ralph Allan:** Rank analysis of incomplete block designs. II. Additional tables for the method of paired comparison. *Biometrika* **41**, 502—537 (1954).

The author provides additional tables to those contained in Bradley and Terry, this Zbl. **47**, 129, with notes on the uses of the tables, on table accuracy and computing checks, and on errata in previous tables.

S. Vajda.

**Jeeves, T. A.:** Identification and estimation of linear manifolds in  $n$  dimensions. *Ann. math. Statistics* **25**, 714—723 (1954).

Sei  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  ein  $n$ -dimensionaler stochastischer Vektor, der nicht beobachtet werden kann;  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  sei beobachtbar. Es sei  $Y = XB + U$ ,  $B$  ist ein Parameter, der  $(n \times n)$ -Matrizen fester Zahlen als Werte annehmen kann und  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  ein stochastischer, von  $X$  unabhängiger Vektor,  $U$  sei multinormal verteilt, der Kolonnenraum  $S$  von  $B$  soll bestimmt werden. Es wird die Frage der Identifizierbarkeit behandelt, ob  $S$  bestimmt sei, wenn  $Y$  bekannt ist, und die zuverlässige Schätzbarkeit (consistent estimations) von  $S$  aus einer Folge von Beobachtungen von  $Y$ .

W. Sauer.

**Zitek, F.:** On certain estimators of standard deviation. *Zastosowania Mat.* **1**, 342—353, russische und engl. Zusammenfassg., 353 (1954) [Polnisch].

The paper gives a survey of more important unbiased estimators of standard deviation of normal population. Not all of these estimators are commonly known, e. g. estimator proposed by H. Steinhaus:  $\hat{\sigma} = \sum_{k=1}^{[n/2]} R_k \left( \sum_{k=1}^{[n/2]} E(w_k) \right)$ , where  $R_k = x_k - x_{n-k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, [n/2]$  (in ordered sample  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ) and  $w_k = R_k \sigma$ . The author gives comparison of efficiency of several estimators for small samples.

W. Sadowski.

**Mitra, Sujit Kumar:** A note on minimum variance in unbiased estimation. *Sankhya* **14**, 53—60 (1954).

The author investigates lower limits of variance in two cases. First case: Distribution of the continuous type with the frequency function  $f(x, \theta) = f(x)/g(\theta)$  for  $0 \leq x \leq \theta$ ,  $= 0$  otherwise. If  $x_1, x_2, \dots, x_n$  are  $n$  independent observations on

the chance variable  $x$  and  $t = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  an unbiased estimate for  $\theta$  is asymptotically  $\text{Var}_\theta t \geq (0,6476/n^2) [g(\theta)/g'(\theta)]^2$ . The Cramér-Rao limit is not calculable in this case. Second case: Frequency function  $f(x, \theta) = [\theta^p/\Gamma(p)] e^{-\theta x} x^{p-1}$ ,  $0 \leq x \leq \infty$ . The minimum variance of the best unbiased estimate of  $\theta$  is asymptotically  $\theta^2/(n p - 2)$ . The Cramér-Rao limit is  $\theta^2/n p$ . H. Bergström.

**Grenander, Ulf: On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance.** Ann. math. Statistics 25, 252—272 (1954).

Eine Zeitreihe  $x_v$  sei gebildet als Summe aus einem Mittelwert  $m_v$  und einer Störung  $y_v$ , die aus unabhängigen und einer gemeinsamen Verteilung mit dem Mittelwert 0 entspringenden stochastischen Veränderlichen bestehen möge. Der Mittelwert von  $x_v$  ist eine Linearkombination

$m_v = \sum_{n=1}^s c^{(n)} \varphi_v^{(n)}$  gewisser bekannter Folgen  $\{\varphi_v^{(n)}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, s$ , der Regressionskoeffizienten  $c^{(n)}$ . Das Problem der Schätzung der  $c^{(n)}$  wird für eine beobachtete Stichprobe  $x_0, x_1, \dots, x_N$  gewöhnlich unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme gelöst, die in dem Sinne optimalen Charakter besitzt, daß auf diese Weise die besten linear „unbiased“ Schätzungen gewonnen werden.

Das in der Arbeit behandelte Problem erwächst, wenn die Störung zwar noch stationär, jedoch als autokorreliert betrachtet wird. Sofern die Korrelationsmatrix der  $y_v$  bekannt ist, kann die beste linear „unbiased“ Schätzung konstruiert werden, wenngleich ihre Gestalt auch nicht so einfach ist wie in dem vorhergenannten Falle. Sie fällt im allgemeinen nicht mit der Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme zusammen. Da in den Anwendungsfällen die Korrelationsmatrix der Störung nur selten bekannt ist und diese für die Konstruktion der Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, die im Falle nicht-autokorrelierter Störung optimal ist, auch nicht benötigt wird, wird die Frage aufgeworfen, ob die so gewonnenen Schätzungen etwa für große Stichproben eine Optimumeigenschaft besitzen. Von einem anderen Standpunkt aus betrachtet, wird gefragt, ob es eintreten kann, daß die Kenntnis der Korrelationsmatrix keine irgendwie geartete Information bezüglich des behandelten statistischen Problems für große Stichproben enthält. Die Hauptresultate der Arbeit sind zwei Theoreme und ihre Korrolare, die das asymptotische Verhalten der Wirksamkeit („efficiency“) der Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadratsumme ausdrücken, wobei als Folge dieser Ergebnisse gezeigt wird, daß besonders im Falle trigonometrischer oder polynomischer Regression die besagten Schätzungen asymptotisch „efficient“ sind. Die Aufgaben der Schätzung eines konstanten Mittelwertes eines stationären Prozesses kann dabei, wie ebenfalls dargetan wird, als Spezialfall des behandelten Problems betrachtet werden.

G. Wünsche.

**Tiago de Oliveira, J.: Composite distributions and its application to some ecological problems.** Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 3, 171—175 (1954).

Verf. verallgemeinert einen von M. Thomas [Biometrika 36, 18—25 (1949)] entwickelten Gedanken gang zur Erzeugung zusammengesetzter Verteilungen, indem er die dort vorausgesetzten Poisson-Verteilungen durch beliebige Anfangsverteilungen ersetzt. Sei  $D(n|r)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Quadrat  $n$  Nester (modulus) enthalte, wobei  $r$  die mittlere Nesterzahl pro Quadrat sei, und  $P(l|\lambda)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Nest  $l$  Individuen enthalte, wobei  $\lambda$  die mittlere Individuenzahl pro Nest sei. Das Problem, auf Grund einer zufälligen Stichprobe von  $N$  Quadraten  $r$  und  $\lambda$  bzw. die mittlere Individuenzahl pro Quadrat,  $\mu = r \cdot \lambda$ , zu schätzen, behandelt Verf. für zwei Fälle: a) Feststellung der Individuen-Anzahlen  $k_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) in den  $N$  Quadraten, b) Feststellung der Anzahlen  $n_0, n_1$  unter den  $N$  Quadraten mit genau 0 bzw. 1 Individuen. Im Falle a) führt Benutzung der Moment-Erzeugenden von  $D(n|r)$ ,  $P(l|\lambda)$  und von der Verteilung

$$P(k|r, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} D(n|r) \cdot \sum_{l_1 + \dots + l_n = k} P(l_1|\lambda) \dots P(l_n|\lambda)$$

der Individuenzahl  $k$  pro Quadrat auf die erwartungstreue und asymptotisch normal verteilte

Schätzung  $m = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{N}$  für  $\mu = r \cdot \lambda$  und Anwendung der Momentenmethode auf geson-

derte Schätzungen für  $r$  und  $\lambda$ . Im Falle b) werden für  $\delta = D(0|r)$  und  $\epsilon = P(1|\lambda)$  mit Hilfe des Maximum-likelihood-Prinzips die plausibelsten Schätzungen  $\hat{\delta} = n_0/N$ ,  $\hat{\epsilon} = n_1/[N f(n_0/N)]$  gewonnen. M. P. Geppert.

**Epstein, B. and M. Sobel: Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution.** Ann. math. Statistics 25, 373—381 (1954).

In Erweiterung einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. 51, 365) wird gezeigt, wie unter der Voraussetzung einer exponentiell verteilten Grundgesamtheit  $p(x; \theta, A) = (1/\theta) e^{-(x-1)/\theta}$  für  $x \geq A > 0$ ,  $\theta > 0$ , einer geordneten Beobachtungsfolge



von  $N$  Elementen, die selbst in  $j = 1, 2, \dots, k$  Teilfolgen unterteilt wird  $(n_j = 0, \sum_{j=1}^k n_j = N)$ , und eines Unterbruches der Beobachtungen nach jeweils  $r_j$  Versuchen  $(0 < r_j < n_j; \sum_{j=1}^k r_j = R)$  die Parameter  $(\theta, A)$  zuverlässig geschätzt werden. Dabei sind folgende drei Grenzlagen zu unterscheiden: 1. den  $n_j$  Elementen jeder Teilfolge ist ein gemeinsamer bekannter Wert  $A_j$  zugeordnet; 2. den  $N$  Elementen ist ein gemeinsamer unbekannter Wert  $A$  zugeordnet; 3. den  $n_j$  Elementen jeder Teilfolge ist ein gemeinsamer unbekannter Wert  $A_j$  zugeordnet. Aus diesen Grenzlagen lassen sich dann die Verhältnisse für alle beliebigen Versuchsanordnungen beurteilen.

W. Wegmüller.

Hildreth, Clifford: Point estimates of ordinates of concave functions. J. Amer. statist. Assoc. **49**, 598—619 (1954).

Verf. untersucht die Produktionsfunktion  $y = q(z) + u$ , wobei  $y$  der Ausstoß (output),  $z$  der veränderliche Eingang (input) und  $u$  ein zufälliger Störfaktor sei, dessen Veränderungen unabhängige Ziehungen aus einer normal verteilten Gesamtheit mit Mittelwert 0 approximieren. Für  $N$  Werte von  $z$  seien  $y$  und  $z$  gemessen, für jedes  $z_n$  ( $z_n$  ist der  $n$ -te Wert der geordneten Stichprobe,  $n = 1, \dots, N$ ) liegen  $T_n$  Meßwerte  $y_{nt}$  vor ( $t = 1, \dots, T_n$ ); es ist also  $y_{nt} = q(z_n) + u_{nt}$ . Der Erwartungswert von  $y_{nt}$  sei  $\eta_{nt} = q(z_n)$ .  $q$  sei eine konkave Funktion, die die Bedingung  $(\eta_{n-1} - \eta_n)(z_{n+1} - z_n) = (\eta_{n-2} - \eta_{n-1})(z_{n-2} - z_{n-1})$ , ( $n = 1, \dots, N-2$ ), erfüllt. Verf. berechnet unter dieser Nebenbedingung die plausibelsten Schätzer (maximum likelihood estimates) für  $\eta_n$  mittels Matrizenkalkül und Iterationsverfahren. Die Rechnung wird an Hand eines durchgeführten Beispiels erläutert. Es wird auch eine Produktionsfunktion mit zwei veränderlichen Eingängen, d. h. das Modell  $y_{mnt} = q_m(z_m, z_n) + u_{mnt}$  ( $m = 1, \dots, M$ ;  $n = 1, \dots, N$ ;  $t = 1, \dots, T_{nm}$ ), betrachtet.

M. P. Geppert-O. Ludwig.

Masuyama, Motosaburo: On the error in crop cutting experiment due to the bias on the border of grid. Sankhya **14**, 181—186 (1954).

• Borel, E., R. Deltheil et R. Huron: Probabilités erreurs, 9ième éd. Paris: Colin 1954. 220 p., 250 fr.

Morduchow, Morris: Method of averages and its comparison with the method of least squares. J. appl. Phys. **25**, 1260—1263 (1954).

It is shown, under fairly general conditions, that the standard deviation of the residuals of the straight line fitting a set of points with uniformly spaced abscissas by the method of averages is at most  $2\sqrt{3}$  times as great as the standard deviation of the least-squares line. Theorems of significance in the practical use of the method of averages are proven in the course of the analysis.

Autoreferat.

Blum, Julius R.: Multidimensional stochastic approximation methods. Ann. math. Statistics **25**, 737—744 (1954).

Extension à plusieurs dimensions d'une méthode d'approximation stochastique de Robbins et Monro [Ann. math. Statistics **22**, 400—407 (1951)] déjà perfectionnée par Wolfowitz et par l'A.

A. Sade.

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

• Fetisov, A. J.: Über den Beweis in der Geometrie. (Populäre Vorlesungen über Mathematik, Heft 14.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 59 S. R. 0,90 [Russisch].

In dieser kleinen Schrift wird zunächst an ausgewählten Beispielen aus der Schulgeometrie der unteren Klassen das Wesen eines Beweises behandelt und insbesondere sein logisches Schema unter Verwendung der Eulerschen Kreissymbolik

der aristotelischen Logik. Es werden die typischen, dabei vorkommenden Schlußfehler besprochen und insbesondere der Unterschied zwischen direktem und indirektem Beweis hervorgehoben. Dann erläutert der Verf. den Sinn von Axiomen und die zweckmäßige Auswahl derselben, wobei die Frage der Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit gestreift wird. Bei der Frage der Stetigkeitsaxiome werden auch etwas schwierigere Dinge, wie die Axiome von Cantor und Archimedes, berührt.

W. Burau.

**Finsler, Paul: Über die Berechtigung infinitesimalgeometrischer Betrachtungen.**

Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20–26 Settembre 1953, 8–12 (1954).

Die Differentialgeometrie stützt sich auf die Infinitesimalrechnung. An Stelle von unendlich benachbarten Elementen in geometrischen Worten treten Grenzübergänge in analytischen Worten. Diese setzen die Existenz von unendlich vielen Dingen voraus; die übliche Vorstellung der Kurven, Flächen und Räume zudem die Existenz eines überabzählbaren Kontinuums. Mit rein formalen Methoden und finiten Betrachtungen erhält man weder das eine noch das andere. Der Verf. zeigt aber die folgende Tatsache: Mit inhaltlichen Überlegungen kann man als Verallgemeinerung der natürlichen Zahlen ein widerspruchsfreies System von Mengen erhalten, von dem sich zeigen läßt, daß es nicht nur endlich ist, sondern auch die höheren Mächtigkeiten enthält. Dadurch werden vom Gesichtspunkte der modernen Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik die Methoden der Infinitesimalgeometrie gerechtfertigt.

A. Kawaguchi.

**Schützenberger, Marcel Paul: Un treillis universel des géométries projectives.**

C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1754–1756 (1954).

Es handelt sich um modulare Verbände, zu denen alle Verbände homomorph sind, die zu  $n$ -dimensionalen projektiven Geometrien über beliebigen Körpern gehören. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß  $n + 2$  Elemente einen solchen Verband erzeugen, zu dem es kein distributives nichttriviales homomorphes Abbild gibt. Die Bedingung ist mit Hilfe einer Kette von Bezeichnungen formuliert, in der die Definition des wichtigen Zwischengliedes  $r$  fehlt. Eine umfassende Publikation über den Gegenstand wird in Aussicht gestellt.

F. W. Levi.

**Jónsson, Bjarni: Modular lattices and Desargues' theorem.**

Math. Scandinav. **2**, 295–314 (1954).

Es sei  $B$  ein beliebiger Verband. Gilt für alle Elementepaare  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  von  $B \times B \times B$ , daß aus

$$y = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) [(a_1 + a_3)(b_1 + b_3) + (a_2 + a_3)(b_2 + b_3)] \\ (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) \leq a_1(y + a_2) + b_1(y + b_2),$$

so wird  $B$  als „Arguesisch“ bezeichnet. Ferner heißt ein projektiver Verband  $A$  eine „perfekte Erweiterung“ von  $B$  und  $B$  ein „regulärer Unterverband“ von  $A$ , wenn 1.  $B$  ein komplementärer Unterverband von  $A$  mit denselben 0- und 1-Elementen wie  $A$  ist, 2. aus  $\prod_{i \in I} x_i = 0$ ,  $x_i \in B$  folgt, daß die entsprechende Gleichung für eine geeignete endliche Untermenge  $J$  der Indexmenge  $I$  gilt, 3. aus  $uv = 0$ , wobei  $u$  ein endlichdimensionales Element von  $A$ ,  $v$  ein Atom von  $A$  ist, die Existenz von  $x, y \in B$ ,  $u \leq x$ ,  $v \leq y$ ,  $xy = 0$  folgt. Es wird gezeigt, daß jeder komplementäre modulare Verband  $B$  eine perfekte Erweiterung besitzt. Auf diese Weise gelingt es, bekannte Sätze über projektive Verbände auf komplementäre modulare Verbände auszudehnen, nämlich: Für komplementäre modulare Verbände sind folgende Bedingungen äquivalent: 1.  $B$  ist arguesisch, 2.  $B$  ist isomorph zu einem Verbande kommutativer Äquivalenzrelationen, 3.  $B$  ist isomorph zu einem Verbande von Normalteilern einer Gruppe, 4.  $B$  ist isomorph zu einem Verbande von Untergruppen einer abelschen Gruppe, 5.  $B$  ist isomorph zu einem Verbande von

Unterräumen eines projektiven Raumes, in dem der Satz von Desargues gilt. Die Bedingung, daß  $B$  komplementär sein muß, ist wesentlich. Es wird ein Beispiel eines endlichen modularen (nicht komplementären) Verbandes der Dimension 5 gegeben, der zu einem Verbandskommutativer Äquivalenzrelationen, aber nicht zu einem Verband von Normalteilern einer Gruppe isomorph ist. Dieser Verband ist „arguesisch“, aber kein Verband von Unterräumen eines projektiven Raumes, in dem der Satz von Desargues gilt. *F. W. Levi.*

Hall jr., Marshall: Correction to „Uniqueness of the projective plane with 57 points“. Proc. Amer. math. Soc. 5, 994—997 (1954).

Nouvelle démonstration du théorème présenté par l'A. dans un précédent papier (ce Zbl. 52, 165). *A. Sade.*

Naumann, Herbert: Über das zweite Distributivgesetz im Zusammenhang mit den Viegeweben von Herrn R. Artzky. Math. Ann. 128, 92—94 (1954).

Vgl. R. Artzky, Math. Ann. 126, 336—342 (1953). Hier wird unter der Voraussetzung der Assoziativität und Kommutativität der Addition und des Assoziativgesetzes der Gewebemultiplikation die Gleichwertigkeit des rechten Distributivgesetzes mit einem (speziellen Desarguesschen) Schließungssatz gezeigt. *G. Bol.*

André, Johannes: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 60, 156—186 (1954).

Eine additiv geschriebene Gruppe  $G$  (Trägergruppe) sei die Vereinigung eines Systems (Kongruenz)  $\mathfrak{A}$  von echten Untergruppen, die paarweise nur die 0 gemeinsam haben, und es sei  $G$  die Summe von je 2 Elementen aus  $\mathfrak{A}$ . Dann ist  $G$  kommutativ und die direkte Summe von je 2 Elementen aus  $\mathfrak{A}$  und diese sind alle isomorph. Die Elemente von  $G$  werden als Punkte, die Restklassen  $U \in \mathfrak{A}$ ,  $a \in G$  als Geraden bedeutet; dann gelten die Inzidenzaxiome der ebenen affinen Geometrie, wobei zu jedem  $U \in \mathfrak{A}$  genau die  $U' \in \mathfrak{A}$  parallel sind. Diejenigen Affinitäten der so definierten Ebene  $A$ , welche jede Gerade in eine parallele überführen, bilden eine Gruppe  $\mathfrak{T}$  mit einem fixpunktfreien Normalteiler  $\mathfrak{Z}$  (Translationsgruppe), und zwar ist  $\mathfrak{Z}$  eine transitive Transformationsgruppe von  $A$  (Translationsebene). Es wird gezeigt, daß jede Ebene  $A$  mit diesen Eigenschaften in der angegebenen Weise dargestellt werden kann. Die Endomorphismen von  $G$ , welche jedes  $U \in \mathfrak{A}$  invariant lassen ( $\mathfrak{A}$ -Endomorphismen), bilden einen Schiefkörper (Kern  $K = K(\mathfrak{A})$ ).  $G$  ist ein Vektorraum über  $K$ , und zwar von unendlichem oder geradem Range. Die  $\mathfrak{A}$ -Endomorphismen entsprechen den Streckungen der Ebene  $A$ , welche 0 invariant lassen, und sind daher isomorph zu den Streckungen mit beliebigem Fixpunkt. Dann und nur dann, wenn jede für  $K$  invariante Untergruppe von  $G$  Element von  $\mathfrak{A}$  ist, ist  $A$  Desarguessch, und zwar hat  $A$  den Koordinatenschiefkörper  $K$ . Weiterhin werden Quasikörper und die von ihnen erzeugten Translationsebenen untersucht. Bemerkte sei noch der Satz, daß die Affinitäten, die 0 festhalten, genau die semilinearen Transformationen von  $G$  über  $K$  sind, welche  $\mathfrak{A}$  als Ganzes invariant lassen. *F. W. Levi.*

André, Johannes: Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen. Arch. der Math. 6, 29—32 (1954).

In einer endlichen affinen Ebene, die keine Translationsebene (s. die vorangehende Besprechung) ist, zerfallen die Punkte in mehrere Transitivitätsgebiete hinsichtlich der Gruppe  $\mathfrak{T}$ . Die Zentren von nicht-identischen Streckungen — wenn solche existieren — erfüllen ein Transitivitätsgebiet. Dieses ist auch transitiv hinsichtlich  $\mathfrak{Z}$ , während die übrigen in  $s - 1$  Gebiete der Transitivität für  $\mathfrak{Z}$  zerfallen.  $A$  ist genau dann Translationsebene, wenn jeder Punkt Fixpunkt einer nicht-identischen Streckung ist. *F. W. Levi.*

Naumann, Herbert: Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie. Math. Z. 60, 120—141 (1954).



Die Verallgemeinerung der affinen ebenen Geometrie kann erfolgen durch Abschwächung der Schließungssätze oder durch Verallgemeinerung der Rechenregeln. Beide Verfahren werden hier parallel durchgeführt, teilweise unter Verwendung der Punktrechnung von M. Hall [Trans. Amer. math. Soc. **54**, 229–277 (1943), **65**, 473–474 (1949)]. Es entsteht ein Aufbau in 7 Stufen. Die 3 ersten sind die klassischen Fälle: Satz von Pappus – Körper, Satz von Desargues – Schiefkörper, Kleiner Desargues – Alternativkörper. Die neuen Stufen entstehen durch weitere Abschwächung des kleinen Desargues, bzw. der Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze. Für die 7. Stufe wird nur verlangt: Eindeutige Existenz von Summe und Produkt, eindeutige Existenz von 0 und  $1 \neq 0$ ,  $a + 0 = 0 + a = a$ ,  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ,  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ , eindeutige Lösbarkeit von  $a + x = b$ ,  $y + a = b$  und (für  $a \neq 0$ )  $ax = b$ ,  $ya = c$ , eindeutige Auflösbarkeit von  $y + ax = b$ ,  $y + cx = d$  für  $a \neq c$  und von  $a + ub = c + ud$  für  $b \neq d$ . Dem entspricht der Desarguessche Satz mit der Einschränkung, daß die Achse der Perspektive die uneigentliche Gerade und das Zentrum der uneigentliche Punkt der  $y$ -Achse ist, ein Eckenpaar auf der  $y$ -Achse liegt und die gegenüberliegenden Seiten parallel zur  $x$ -Achse sind. Die zu den 5 ersten Stufen gehörenden Zahlensysteme enthalten einen Primkörper. Zur 6. Stufe gehört das bekannte Moulton'sche Beispiel einer Nicht-Desarguesschen Geometrie.

F. W. Levi.

**Zassenhaus, Hans:** What is an angle? Amer. math. Monthly **61**, 369–378 (1954).

The author discusses various definitions of an angle and then proposes a system of axioms for „geometrical“ angles (corresponding to the usual concept of oriented angles between  $-180^\circ$  and  $+180^\circ$ ). The axioms are in terms of equality (congruence), addition (defined for some, but not all pairs of angles) and the sign (orientation) of an angle; they imply, i. a., a continuous linear order. The set of geometrical angles is then embedded in the set of „kinematical“ angles which are defined as formal sums of a finite number of geometrical angles. The latter set is a continuously ordered additive group and hence isomorphic to the additive group of the real numbers. This shows that the geometrical angles can be measured by real numbers. The method used to extend the set of geometrical angles to that of kinematical angles is closely related to Schreier's construction of a covering group, and can easily be used to give a proof of the theorem that every 1-parameter group germ generates the additive group of the real numbers.

F. A. Behrend.

**Antona, Giuseppina d':** Considerazioni varie sulla metrica angolare iperbolica. Matematiche **9**, 7–22 (1954).

Eine (euklidische) Ellipse  $c$  werde als Maßkegelschnitt einer hyperbolischen Maßbestimmung genommen. Zwei Geraden  $g_1, g_2$  mögen sich in einem Punkt  $P$  im Innern von  $c$  schneiden.  $h_1$  sei der hyperbolische,  $h_2$  der euklidische Winkel von  $g_1$  und  $g_2$ . Ist  $g_1$  zu einer (euklidischen) Achse von  $c$  parallel, so ergibt sich als Ort der Punkte  $P$ , in denen  $g_1, g_2$  gegebene Maßzahlen  $h_1$  und  $h_2$  besitzt, eine Kurve 4. Ordnung, die näher untersucht wird. Mit ihrer Hilfe beweist Verf. bekannte Sätze der hyperbolischen Geometrie: Die Winkelsumme im Dreieck ist  $2\pi$ ; ein Dreieck läßt sich aus seinen Winkeln konstruieren.

F. Hohenberg.

**Coxeter, H. S. M.:** Regular honeycombs in elliptic space. Proc. London math. Soc., III. Ser. **4**, 471–501 (1954).

Diese Abhandlung enthält eine Untersuchung der sechs regulären Einteilungen des elliptischen dreidimensionalen Raumes. Ausgangspunkt ist eine bekannte Darstellung von C. Stéphanos und S. L. van Oss der Drehungen um konkurrente Achsen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes durch Punkte des dreidimensionalen elliptischen Raumes; in dieser Darstellung entspricht der Drehung mit dem Winkel  $\theta$  um eine von  $O$  ausgehende Gerade  $a$  ein Punkt von  $a$ , dessen elliptische Entfernung von  $O$  der Wert  $\frac{1}{2}\theta$  hat; im betrachteten elliptischen Raume hat also

jede Gerade die Länge  $2\pi$ . Aus den endlichen Drehungsgruppen der gewöhnlichen regulären Polyeder erhält man so gewisse endliche Punktgruppen, die zu den Ecken der betrachteten regulären Einteilungen des elliptischen Raumes führen. Zur Bezeichnung dieser Ecken benutzt Verf. die geraden Permutationen von 4, 5 oder 6 Symbolen; sie dienen auch zur Bezeichnung der Gegeneckenpaare der sechs regulären Polytope des vierdimensionalen Raumes, da die regulären Einteilungen des elliptischen dreidimensionalen Raumes durch Identifizierung jener Paare erhalten werden können. Im Laufe der Untersuchung findet man auch eine geometrische Deutung der sogenannten Eulerschen Quadrate der Ordnungen  $n = 4$  und  $n = 5$ ; es sind dies  $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrizen, in welchen jede Zeile und jede Spalte dieselben  $n$  Symbole enthält.

E. Togliatti.

Blanuša, Danilo: Immersion de tores euclidiens à parallélogramme fondamental de forme quelconque dans un espace sphérique ou elliptique à trois dimensions. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 15–25 und kroatische Zusammenfassg. 25 (1954).

Durch die Formeln  $2\pi x_1 = a \sin(\xi + \eta)$ ,  $2\pi x_2 = a \cos(\xi + \eta)$ ,  $2\pi x_3 = b \sin(\xi - \eta)$ ,  $2\pi x_4 = b \cos(\xi - \eta)$  erhält man im sphärischen Raum  $S_3$  ( $4\pi^2 \sum x_i^2 = a^2 + b^2$ ) eine Cliffordsche Fläche von ringförmigem Zusammenhang (Torus) mit euklidischer Metrik, deren  $\xi$ -Linien und  $\eta$ -Linien im Cliffordschen Sinne parallele Großkreise sind, und die sich auf ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis  $a:b$  abwickeln lassen. Variiert man  $a$  und  $b$  so, daß  $4\pi^2 R^2 = a^2 + b^2$  bleibt, so erhält man ein koaxiales Büschel solcher Cliffordscher Flächen, und das volle System im Cliffordschen Sinne paralleler Großkreise. – Eine Relation zwischen  $a$  und  $\xi$  führt dann zu einer Schar von Großkreisen, die eine allgemeine Cliffordsche Fläche mit euklidischer Metrik bilden. Verf. erörtert das Problem, solche allgemeinen Clifford-Flächen (Tori) zu finden, die homöomorph einem Torus sind, deren Fundamentalparallelogramm aber eine willkürlich vorgegebene Gestalt hat. Es wird die Existenz solcher allgemeiner Torusflächen im sphärischen Raum  $S_3$  bewiesen und ihre Einbettung in den elliptischen Raum  $E_3$  erörtert.

K. Strubecker.

Blanuša, Danilo: Le plan elliptique plongé isométriquement dans un espace à quatre dimensions ayant une courbure constante. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 41–57 und kroatische Zusammenfassg. 57–58 (1954).

In früheren Arbeiten [Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 2, 248–249 (1947); dies. Zbl. 51, 388<sup>1</sup>] hat Verf. gezeigt, daß die elliptische Ebene  $E_2$  isometrisch und singularitätenfrei in einen euklidischen Raum  $R_5$  von fünf Dimensionen eingebettet werden kann; die entsprechende Fläche liegt dabei auf einer vierdimensionalen Sphäre  $S_4$  von  $R_5$ . – In vorliegender Arbeit wird gezeigt, daß man die elliptische Ebene  $E_2$  isometrisch in einen elliptischen Raum  $E_4$  von vier Dimensionen einbetten kann, im Grenzfall in einen euklidischen Raum  $R_4$ , schließlich auch in einen hyperbolischen Raum  $H_4$ . Bei der Einbettung von  $E_2$  in  $E_4$  wird vorausgesetzt, daß die Krümmungen  $k = 1/a^2$  von  $E_2$  und  $k = 1/a^2$  von  $E_4$  der Ungleichung  $3k \leq K$  genügen, ohne daß festgestellt werden kann, ob diese Einschränkung wirklich notwendig ist.

K. Strubecker.

## Elementargeometrie:

Mahler, Kurt: A problem in elementary geometry. Math. Gaz. 38, 241–243 (1954).

Es wird gezeigt, wie jedes Dreieck  $ABC$ , dessen Ecken der Reihe nach auf den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eines anderen Dreiecks liegen, durch eine beliebig kleine Drehung ganz in dessen Inneres gebracht werden kann. Es wird bemerkt, daß ein entsprechender Satz auch für mehrdimensionale Simplexe, aber nicht für Polygone mit mehr als drei Seiten gilt, auch nicht, wenn man beliebige Bewegungen zuläßt.

G. Lochs.

**Blanchard, René:** Sur les points de Feuerbach. *Mathesis* **63**, 349–356 (1954).

In einem Dreieck  $ABC$  berührt die Gerade, die die Feuerbachschen Punkte  $q_b$  und  $q_c$  (oder  $q$  und  $q_a$ ) verbindet, die Ellipse  $E_a$  (oder  $E'_a$ ), die zum Hauptkreis den Neunpunktekreis  $(\omega)$  hat, deren Brennpunkte auf der Parallelen durch  $\omega$  zur äußeren (oder inneren) Halbierungslinie des Winkels  $A$  liegen und deren Achsenverhältnis gleich  $4 \cos^2(A/2) - 1 : (4 \cos^2(A/2) + 1)$  [oder  $4 \sin^2(A/2) - 1 : (4 \sin^2(A/2) + 1)$ ] ist. II. In einem Dreieck  $ABC$  mit dem Umkreis  $(O)$  treffen sich 1. die Verbindungsgerade von  $\omega$  mit dem Schnittpunkt von  $(O)$  und der äußeren Halbierenden des Winkels  $A$ , 2. die Parallele zur inneren Halbierenden des Winkels  $A$  durch die Mitte von  $BC$ , 3. die Verbindende des Schwerpunkts  $G$  mit dem Pol  $M$  von  $BC$  bezüglich  $(O)$  im Berührungspunkt von  $q_b, q_c$  und der Ellipse  $E_a$ . III. In einem Dreieck  $ABC$  mit dem Umkreis  $(O)$ , dem Höhenschnittpunkt  $H$ , den Schnittpunkten  $D_1, D_2$  von  $(O)$  mit der inneren und der äußeren Halbierenden des Winkels  $A$  schneiden sich 1. die Parallele zu  $AD_2$  durch  $\omega$  und 2. die Tangente an  $(\omega)$  in dem entsprechenden Punkt zu  $D_2$  in der Homothetie  $(H, \frac{1}{2})$  in einem Punkt  $F$  von  $q_b, q_c$ ; 1'. die Parallele zu  $AD_1$  durch  $\omega$  und 2'. die Tangente an  $(\omega)$  in dem  $D_1$  entsprechenden Punkt in der Homothetie  $(H, \frac{1}{2})$  in einem Punkt  $F'$  von  $q, q_a$ . Die Gerade  $FF'$  ist die Tangente an  $(\omega)$  durch die Mitte von  $BC$ . M. Zacharias.

**Cavallaro, Vincenzo G.:** Formules remarquables pour le triangle des centres de carrés construits sur les côtés d'un triangle. *Mathesis* **63**, 357–363 (1954).

Formeln für die Seiten, den Flächeninhalt  $Q$ , den Brocardschen Winkel  $\omega$ , die Steinerschen Winkel  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  des Dreiecks der Mitten der Quadrate über den Seiten eines Dreiecks, ausgedrückt durch bemerkenswerte Größen des Grunddreiecks. Der Formel  $\text{etg } \omega = 2QS - 2$  für den Brocardschen Winkel des Grunddreiecks ( $S = \text{Inhalt des Grunddreiecks}$ ) entspricht  $\text{etg } \bar{\omega} = 2 - S/Q$ . Bemerkenswert sind ferner die Formeln  $\text{tg } \bar{\omega} = (1 + 2 \text{tg } \omega)/(2 + 3 \text{tg } \omega)$ ,

$$\text{tg } \omega_1 = \text{tg } \omega / (1 + \sqrt{1 - 3 \text{tg}^2 \omega}), \quad \text{tg } \omega_2 = \text{tg } \omega / (1 - \sqrt{1 - 3 \text{tg}^2 \omega}).$$

M. Zacharias.

**Cavallaro, Vincenzo G.:** Triangoli ortogonalmente associati. *Giorn. Mat. Battaglini* **82** (V. Ser. 2), 423–427 (1954).

**Thébault, Victor:** Concerning the complete quadrilateral. *Amer. math. Monthly* **61**, 604–606 (1954).

$A', B', C'$  seien die Punkte, in denen eine Transversale  $\Delta$  die Seiten  $BC, CA, AB$  eines Dreiecks  $T \equiv ABC$  schneidet. Das Dreieck und die Transversale bestimmen das vollständige Vierseit  $Q, (O), (O_a), (O_b), (O_c)$  seien die Umkreise der Dreiecke  $T, T_a \equiv AB'C', T_b \equiv BC'A', T_c \equiv CA'B'$ .  $M$  sei der Miquelpunkt (richtig: Steinerpunkt) von  $Q$ , d. h. der Schnittpunkt der Kreise  $(O), (O_a), (O_b), (O_c)$ .  $MA', MB', MC'$  treffen  $BC, CA, AB$  unter dem Miquelwinkel  $\beta$ . Die Geraden  $A_iA, A_iB, A_iC$  durch einen beliebigen Punkt  $A_i$  von  $(O)$  treffen die Kreise  $(O_a), (O_b), (O_c)$  in  $A'_i, B'_i, C'_i$ . Der Kreis  $A_iB'_iC'_i$  geht durch  $M$ , ebenso der Kreis  $(O_i) \equiv A'_iB'_iC'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Entsprechende Resultate für beliebige Punkte auf  $(O_a), (O_b), (O_c)$  und  $T_a, T_b, T_c$ . Das gibt 4 unendliche Mengen von Kreisen durch  $M$ . Diese 4 Mengen umhüllen eine Kardioiden mit der Spitze  $M$ . Verallgemeinerung für drei nicht in einer Geraden liegende Punkte  $A', B', C'$  von  $BC, CA, AB$ . Verallgemeinerung des Orthozentrums (Höhenschnittpunkts) für ein Kreisvieleck. Anwendung auf das dem Miquelkreis von  $Q$  einbeschriebene Vieleck  $OO_aO_bO_cO_1O_2 \dots O_n$ .

M. Zacharias.

**Goormaghtigh, R.:** Sur l'hexagone inscriptible. *Mathesis* **63**, 335–338 (1954).

Bekannt ist, daß die Orthopole einer Geraden  $g$  bezüglich der aus den Ecken eines Vierseits gebildeten Dreiecke auf einer Geraden liegen, der „orthopolaren Geraden“ von  $g$  bezüglich des Vierseits [Servais, *Mathesis* **37**, 11–12 (1923)]. In einem Kreissechseck laufen die 15 orthopolaren Geraden der Verbindungsgeraden



zweier Ecken bezüglich des Vierseits der vier übrigen Ecken durch einen Punkt. — In einem Kreissechseck umhüllt die Äquidistante der Wallacegeraden der Endpunkte eines veränderlichen Durchmessers des Umkreises einen Kreis. — Die Hüllkurve der Wallacegeraden eines Kreissechsecks ist von der 10. Ordnung und 6. Klasse. Die Wallacegeraden der Endpunkte eines veränderlichen Durchmessers des Umkreises des Kreissechsecks berühren ihre Hüllkurve in den Endpunkten einer Strecke, deren Mitte einen Kreis beschreibt. Den Schluß bilden Eigenschaften des besonderen Kreissechsecks  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ , für das die Summe der Produkte zu je drei der komplexen Koordinaten von  $A$  gleich Null ist (der Umkreismittelpunkt ist der Nullpunkt, und der Umkreis ist der Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene). *M. Zacharias.*

**Marmion, A.: Sur les sphères podaires par rapport à un tétraèdre.** Mathesis 63. 339—349 (1954).

Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 56. 140). Der vorliegende zweite Teil bringt hauptsächlich Untersuchungen der Flächen  $\pi$ , d. h. der Orte der Punkte, deren Fußpunktkugeln zu einer gegebenen Kugel orthogonal sind. Wegen der vielen Einzelergebnisse muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *M. Zacharias.*

**Thébault, Victor: Tétraèdre associé au tranchet d'Archimède.** Mathesis. Supplément 63. 14—24 (1954).

Auf dem Durchmesser  $MN = 2R$  eines Kreises ( $O$ ) um  $O$  liege ein Punkt  $P$ . Über  $MP$  und  $PN$  als Durchmessern beschreibe man Halbkreise ( $O_1$ ), ( $O_2$ ) um  $O_1$  und  $O_2$  oberhalb von  $MN$ . Die Mitte  $A$  des Halbkreises ( $O$ ) unterhalb von  $MN$  und die Mitten  $B$ ,  $C$  der Halbkreise ( $O_1$ ), ( $O_2$ ) sind die Ecken eines Dreiecks  $t = ABC$ , dessen Kotangente des Brocardschen Winkels gleich 2 ist. Das über  $t$  konstruierte gleichflächige Tetraeder  $T = ABCD$  bildet den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Liegt  $P$  auf der Verlängerung von  $MN$  über  $M$  oder  $N$  hinaus, so ist der Halbkreis ( $O_1$ ) oder ( $O_2$ ) unterhalb der Geraden  $MN$  zu konstruieren. Verf. bestimmt zuerst die Orte des Höhenschnittpunktes  $H$ , des Schwerpunktes  $G$  und des Umkreismittelpunktes  $O'$  des Dreiecks  $t$  und der Spiegelpunkte  $D'$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  von  $H$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  bezüglich  $O'$  wenn  $P$  die Gerade  $MN$  durchläuft. Sodann untersucht er die metrischen Eigenschaften des Tetraeders  $T$  und die Orte seiner bemerkenswerten Punkte für variierenden Punkt  $P$ . *M. Zacharias.*

**Devidé, Vladimir: Einige metrische Relationen über Simplexe.** Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys.-astron., II. Ser. 9. 115—119 und kroatische Zusammenfassg. 120 (1954).

Gegeben seien die beiden Simplexe  $T_1 \dots T_m$  und  $T'_1 \dots T'_m$  des  $R_{m-1}$ ,  $S$ ,  $S'$  ihre Volumina,  $r$ ,  $r'$  die Radien ihrer Umsphären  $K$ ,  $K'$ ,  $a$  die Entfernung der Mittelpunkt von  $K$  und  $K'$  und schließlich  $s_{ij}$  die Länge der Strecke  $T_i T'_j$ . Dann gelten die Formeln:

$$(A) \quad ||s_{ij}^2|| = (-1)^{m-1} 2^{m-1} (m-1)! (r^2 + r'^2 - a^2) S S',$$

$$(B) \quad \frac{s_{ij}^2}{1} \frac{1}{0} = (-1)^m 2^{m-1} [(m-1)!]^2 S S'.$$

Links stehen die Determinante der  $s_{ij}^2$  und die daraus durch Rändern mit 0 und 1 hervorgehende. Diese Formeln werden schnell und elegant durch einfache Vektor- und Determinantenbetrachtungen bewiesen. An Stelle der Formel (B) wird erst eine noch allgemeinere (C) bewiesen; diese bezieht sich auf zwei  $(n-1)$ -dimensionale Simplexe des  $R_n$ , die auf der gleichen Hypersphäre liegen und deren Hyperebenen den Winkel  $\alpha$  miteinander bilden, und lautet: genau so wie (B), nur noch mit dem Faktor  $\cos \alpha$  auf der rechten Seite. Sie folgt, wenn man die schon bekannte Formel (A) für eine Dimension höher anwendet, und zwar auf diejenigen Simplexe, die durch Hinzunahme des gemeinsamen Sphärenzentrums aus dem gegebenen entstehen. (B) folgt dann aus (C), wenn man den Radius der gemeinsamen Sphäre über alle

Grenzen wachsen läßt, dabei aber beide Simplexe in sich starr unverändert läßt. Durch Spezialisierung auf  $m = 4, 5$  oder auf reguläre Simplexe usw. folgen aus (A) und (B) viele schon lange bekannte Formeln.

W. Burau.

**Devidé, Vladimir:** Verallgemeinerung einer Formel von L'Huilier. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 121—126 und kroatische Zusammenfassg. 126—127 (1954).

Von L'Huilier (1890) stammt die Formel:  $1/r_0 = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3$ , wobei die  $r_i$  die Radien der 4 Berührungskreise eines Dreiecks sind. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 44, 157) hat Verf. diese Formel folgendermaßen auf den  $R_n$  verallgemeinert:  $\sum 1/r_{nk} = (n-1) \cdot 1/r_n$ . Dabei wird links über die Radien aller ein Simplex von außen berührenden Hyperkugeln summiert, während rechts der Inkugelradius  $r_n$  steht. Nun kann es bei  $n > 2$  außer den genannten  $n+2$  Sphären noch weitere geben, die alle  $n+1$  Hyperebenen des Simplex berühren. Verf. gibt jetzt eine Formel an, in der diese auch vorkommen. Zunächst zeigt er: Ist  $P_i$  der  $(n-1)$ -dimensionale Inhalt der  $i$ -ten Seite in einer gewissen Numerierung und gilt  $P_1 + \dots + P_m - (P_{m+1} + \dots + P_{n+1}) > 0$ , so gibt es eine Sphäre, die die  $m$  ersten Seiten von innen und die restlichen von außen berührt. Die endgültige Verallgemeinerung von L'Huiliers Formel lautet dann:  $\sum \varepsilon \frac{1}{r} = \left( \frac{n}{[n/2]} \right) \frac{1}{r_0}$ ; dabei wird links über die reziproken Werte aller möglichen Berührungssphären mit Ausnahme der inneren, deren Radius rechts steht, summiert; der Faktor  $\varepsilon$  ist gleich  $-1$  oder  $+1$ , oder  $0$ , je nachdem, ob die entsprechende Sphäre eine größere Anzahl von Seitenräumen von innen oder von außen berührt oder die gleiche Anzahl von innen wie von außen, was nur bei ungeradem  $n$  möglich ist. Die Beweise in dieser schönen Arbeit sind überraschend einfach.

W. Burau.

**Pólya, G.:** An elementary analogue to the Gauss-Bonnet theorem. Amer. math. Monthly 61, 601—603 (1954).

Verf. betrachtet (offene) Polyederflächen vom topologischen Zusammenhang der Kreisscheibe. Gestützt auf die elementare Beziehung zwischen Oberfläche und sphärischem Exzess eines sphärischen Dreiecks beweist er dann elementar die Formel  $S + T = 2\pi(F - E + V)$ ; dabei sind  $F, E, V$  die Anzahlen der Fazetten, Kanten und Ecken des Polyeders,  $T$  ist die Summe der Drehwinkel  $\pi - \sum \alpha$  an den Rand-ecken ( $\alpha$  die in der Ecke zusammenstoßenden Fazettenwinkel) und  $S$  die Summe der räumlichen Winkel, die zu denjenigen des Polyeders polar sind („sphärisches Bild“ des Polyeders). Durch stetigen Übergang auf ein ebenes Polygon folgt einerseits die Eulersche Formel  $F - E + V = 1$ , andererseits  $S + T = 2\pi$ . Bei nicht-konvexen Polyederecken macht die Definition des polaren Raumwinkels gewisse noch nicht völlig behobene Schwierigkeiten.

G. Bol.

**Pozzolo Ferraris, Giulia:** Costruzione grafica della tangente a notevoli curve piane. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 88, 318—325 (1954).

Einfache graphische Konstruktionen der Tangenten einiger ebenen Kurven werden gegeben.

M. Benedicty.

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Privalov, I. I.:** Analytische Geometrie. 19. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 299 S. R. 6,90 [Russisch].

Wie aus der hohen Auflagezahl hervorgeht, ist das vorliegende Buch in seinem Sprachgebiet außerordentlich verbreitet. Das Werk ist sehr elementar gehalten. Es werden nur gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten benutzt, bis S. 175 wird die ebene Geometrie und darauf die des  $R_3$  behandelt. Es finden sich die Gleichungen der Geraden, Ebenen, Kegelschnitte und Quadriken ausführlich durchdiskutiert. Als Hilfsmittel werden dazu zwei- und dreireihige Determinanten und die elementare

Vektoralgebra entwickelt und benutzt. Bemerkenswert ist die Fülle von Bildern und Übungsbeispielen, deren Lösungen sich am Schluß zusammengestellt finden.

W. Burau.

● Efimov, N. V.: Kurzer Lehrgang der analytischen Geometrie. 2. umgearb. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1954. 256 S. R. 6,35 [Russisch].

Über den allgemeinen Charakter, Umfang und Zielsetzung dieses Werkes gilt im wesentlichen dasselbe, wie über das oben besprochene von Privalov über Analytische Geometrie. An Unterschieden fällt nur auf, daß das vorliegende Buch etwas kürzer gefaßt ist und nicht so viele Aufgaben enthält wie das vielleicht ein wenig elementärere Buch von Privalov.

W. Burau.

Jacobsthal, Ernst: Über die Kreise, die durch eine gegebene lineare Funktion auf einen konzentrischen Kreis abgebildet werden. Norske Vid. Selsk. Skr. 1953, Nr. 3, 22. S. (1954).

Le funzioni lineari cui si riferisce questo lavoro sono le funzioni lineari fratte di una variabile complessa, con coefficienti complessi. Il problema qui trattato è risolto è una generalizzazione del problema classico, risolto da lungo tempo, di determinare i cerchi uniti nella trasformazione definita sul piano complesso da una delle dette funzioni. Il problema è trattato direttamente, con l'algoritmo delle funzioni suddette, ed è esaminato nei suoi particolari.

F. Cecioni.

Metelka, Josif: Bemerkung zu der Arbeit von D. D. Morduchaj-Boltovskoj „Ein dreidimensionales und ein vierdimensionales Analogon zum Pascalschen Satz“, Bd. 8, Nr. 2, (61), (1953). Uspechi mat. Nauk 9, Nr. 3 (61), 135–138, 183–184 (1954) [Russisch].

Es wird ein auch vom Ref. bemerkter Fehler in der zitierten nachgelassenen Arbeit von Morduchaj-Boltovskoj (dies. Zbl. 50, 156) richtig gestellt. Das Analogon für den Pascalsatz im  $S_4$  lautet: Ordnet man die 20 Schnittpunkte einer Quadrik  $Q_3$  mit den 10 Seitenlinien eines Simplex zu 5 Vierergruppen an, die sinngemäß den Seitenräumen zuzuordnen sind, und bringt diejenigen  $S_3$ , die man durch Verbinden eines Punktvierers erhält, mit den zugeordneten  $S_3$  des Simplex zum Schnitt, so erhält man 5 assoziierte Ebenen des  $S_4$ .

W. Burau.

Fava, Franco: Invariante di Mehmke-Segre e reti di coniche. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 88, 161–169 (1954).

Es seien, in einer Ebene,  $R_1$  und  $R_2$  zwei Netze von algebraischen Kurven. Die zwei Kurven von  $R_1, R_2$ , die durch einen gegebenen Punkt  $M$  hindurchgehen und in  $M$  eine gegebene Gerade  $m$  berühren, besitzen in  $M$  eine Invariante  $I$  (Invariante von Mehmke und Segre). Für gegebene  $M$  und  $I$  gibt es drei mögliche Lagen von  $m$ , welche, bei veränderlichem  $I$ , eine Involution 3. Grades im Büschel  $M$  durchlaufen (s. A. Terracini, dies. Zbl. 23, 361). Verf. betrachtet hier den Fall wo  $R_1, R_2$  zwei Netze von Kegelschnitten sind und der Grad der oben betrachteten Involution einen kleineren Wert als drei hat. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Cayleyschen Enveloppen von  $R_1$  und  $R_2$  einen gemeinsamen Teil aufweisen: dieser Teil kann die Klasse 1, 2, 3 haben; entsprechend ist die Ordnung der Involution 2, 1, 0. Im ersten Falle gibt es für die Wahl der zwei Netze 126 projektiv verschiedene Möglichkeiten. Im zweiten Falle gibt es 54 Möglichkeiten. Im letzten Falle haben  $R_1, R_2$  dieselbe Cayleysche Enveloppe; und der Wert von  $I$  hängt nur von  $M$  ab; es sind jetzt 15 verschiedene Möglichkeiten vorhanden; außerdem gibt es noch den Fall, wo  $R_1, R_2$  zwei der drei verschiedenen Netze sind, die dieselbe irreduzible gemeinsame Cayleysche Enveloppe haben. Der besondere Fall eines konstanten  $I$  ist von A. Terracini schon behandelt worden.

E. Togliatti.

Fava, Franco: Le reti di coniche dotate di cayleyana riducibile. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 88, 46–54 (1954).

Einige einfache Betrachtungen über die Geraden einer zerfallenden Cayleyschen Regelfläche.

R. W. Weitzenböck.



Stavropoulos, Pothitos: Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes d'ordre  $2\nu + 1$ . Bull. Soc. math. Grèce 28, 115—126 und französ. Zusammenfassung, 126—127 (1954) [Griechisch].

Il est bien connu que H. Lebesgue a démontré que „le plus grand nombre des diamètres d'une courbe algébrique irréductible du degré  $\nu \geq 3$  est  $\nu$  quand  $\nu$  est impair, et  $\nu + 2$  quand  $\nu$  est pair. Il y a une exception là seulement pour les nombres  $\nu = 6, 8, 12, 16, 20, 24$ “. Dans le présent travail nous avons examiné le même problème pour  $\nu$  impair d'une méthode analytique et nous terminons aux résultats suivants: 1. La direction conjuguée d'un diamètre d'une courbe algébrique irréductible d'ordre impair est la direction asymptotique de celle-ci. 2. Une courbe algébrique irréductible d'ordre  $\nu$  impair peut avoir le plus  $\nu$  diamètres. De plus nous déterminons les coefficients de chaque diamètre. Autoreferat.

Lomazzi, Luigi: Sulla generazione di alcune curve notevoli. Periodico Mat., IV. Ser. 32, 212—222 (1954).

L'A. montre qu'une transformation de courbes considérée par M. Lorent (ce Zbl. 41, 476) n'est autre qu'une transformation de Jonquières. L. Godeaux.

Primrose, E. J. F.: A property of quartic curves with two cusps and one node. Edinburgh math. Notes 39, 1—3 (1954).

Eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Rückkehrpunkten und einem Doppelpunkt ist zu sich selbst dual, wie sich aus ihren Plückerschen Zahlen ergibt; sie hat nämlich eine Doppeltangente und zwei Wendetangenten und ist von der vierten Klasse. Verf. zeigt, daß eine solche Kurve zu sich selbst polar ist mit Bezug auf jeden von zwei bestimmten Kegelschnitten. Zum Beweis wird das vom Doppelpunkt  $A$  und den Rückkehrpunkten  $B$  und  $C$  gebildete Dreieck als Bezugsdreieck und der Schnittpunkt der beiden Rückkehrtangenten als Einheitspunkt gewählt. Dann läßt sich die Gleichung der Kurve in parametrischer Form darstellen durch  $x = t^2$ ,  $y = t^2(t^2 + 2rt + 1)$ ,  $z = t^2 + 2rt + 1$ , wobei  $r$  willkürlich ist. Ein Kegelschnitt, in bezug auf den diese Kurve zu sich selbst polar ist, muß eine Gleichung von der Form (1)  $ax^2 + b(y^2 + z^2) + 2fyz + 2gx(y + z) = 0$  haben. Ihre Koeffizienten lassen sich in Funktion von  $r$  und einer Zahl  $\alpha$  ausdrücken, die Wurzel einer Gleichung zweiten Grades ist, womit der Beweis erbracht ist. Es ergibt sich noch, daß das Dreieck  $ABC$  auf zwei verschiedene Arten zu dem von der Doppeltangente und den beiden Wendetangenten gebildeten Dreieck perspektiv ist und daß, wenn der eine der beiden Kegelschnitte die Gleichung (1) hat, der andere durch die Gleichung  $a x^2 + f(y^2 + z^2) + 2b yz + 2g x(y + z) = 0$  dargestellt wird. Das entsprechende Problem für eine Kurve 5-ter Ordnung mit 5 Rückkehrpunkten wurde gelöst von R. Apéry, dies. Zbl. 26, 66.

E. Löffler.

Bottema, O.: On Alt's special three-bar sectie. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 498—504 (1954).

In fünf Mitteilungen hat F. Schuh eine trizirkuläre Kurve  $K$  sechster Ordnung behandelt (dies. Zbl. 55, 141). Verf. zeigt, daß diese Kurve  $K$  bereits 1921 ausführlich von Alt in Verbindung mit einem kinematischen Problem untersucht wurde [Alt, Z. angew. Math. Mech. 1, 373—398 (1921)]. Er gibt anschließend einige interessante Sätze über Zusammenhänge mit den merkwürdigen Punkten und Linien eines Dreieckes. Bez. des Zusammenhanges mit der Koppelkurve wird auf weitere Literatur verwiesen.

R. W. Weitzenböck.

Palman, Dominik: Die Flächen 3. Ordnung mit vier Doppelpunkten. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 9, 129—149 und kroatische Zusammenfassung, 149—150 (1954).

Nach Vorgabe zweier Geraden  $p_1, p_2$  und einer Quadrik  $q$  ist eine kubische Involution  $I$  des  $P_3$  bestimmt. Dabei ist einem allgemeinen Punkt  $P$  des  $P_3$  der auf der Treffgeraden von  $P$  zu  $p_1, p_2$  und auf der Polarebene von  $P$  bez.  $q$  gelegene Punkt  $P'$  zugeordnet. Einer allgemeinen Ebene  $q$  entspricht vermittle  $I$  dann eine  $p_1, p_2$  enthaltende Fläche 3. Grades  $q'$ , worauf man leicht die Clebschabbildung von

$q'$  begründen kann. Verf. nimmt nun  $p_1, p_2$  als reziproke Polaren bez.  $q$  an. Dann hat  $q'$  stets 4 Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $q$  mit  $p_1$  und  $p_2$ . Es werden jetzt ausführlich alle Sondertypen kubischer Flächen mit 4 Singularitäten untersucht, die man so erhalten kann, wobei auch die verschiedenen Realitätsfälle sorgfältig unterschieden werden. Je nach Wahl von  $q$  als Ellipsoid oder reelle Regelfläche ergeben sich alle 4, 2 oder keiner der Doppelpunkte als reell. Ist  $q$  ein Kegel, so fallen 2 der Singularitäten zusammen, ist  $q$  ein Ebenenpaar, so ergibt sich eine Regelfläche 3. Grades, die somit auch als Grenzfall unseres Flächentyps auftritt. Nimmt man  $q$  als reelle oder imaginäre Kugel und  $q$  als die Fernebene an, so entstehen Flächen, die durch den unendlich fernen Kugelkreis gehen und alle Doppelpunkte im Endlichen haben, wobei jedoch höchstens 2 reell sind. Besonders ausführlich werden dann noch diejenigen Flächen untersucht, die sich ergeben, wenn man  $q$  als Kugel, aber  $p_2$  als unendlich fern annimmt. Dann liegen 2 Doppelpunkte auch im Unendlichen, und die kubischen Flächen, die entstehen, enthalten  $\infty^1$  Kreise in den Parallelebenen des durch  $p_2$  bestimmten Büschels, sowie  $\infty^1$  zirkuläre Kubiken in den zu  $q$  parallelen Ebenen.

W. Burau.

Filippi, Lidia: Su certe superficie generate da covarianti di forme binarie. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **13**, 285—289 (1954).

Verf. betrachtet im Raume eine lineare Strahlenkongruenz, d. h. das System aller Geraden, die zwei windschiefe Geraden  $s, t$  treffen. Ist dann eine algebraische Fläche  $F$  der Ordnung  $n$  gegeben, so kann man auf jeder Geraden  $r$  der Kongruenz eine Kovariante  $I'$  betrachten, der Ordnung  $m$  und des Grades  $g$ , der Gruppe von  $n$  Punkten, die von  $F$  auf  $r$  ausgeschnitten werden: Ort dieser Kovariante, bei veränderlichem  $r$ , ist eine Fläche  $\Phi$  der Ordnung  $n g$ . — Es sei  $F$  insbesondere eine durch  $s, t$  hindurchgehende kubische Fläche und  $I'$  die Hessesche Kovariante; dann ist  $\Phi$  eine Fläche 6. Ordnung, die in zwei kubische Flächen zerfällt, welche zusammen mit  $F$  einem Büschel angehören; in diesem Büschel sind zwei kubische Regelflächen  $K, G$  enthalten, welche  $s, t$  als Leitlinien besitzen ( $s$  ist doppelt für  $K$  und einfach für  $G$ ; umgekehrt für  $t$ ); und die zwei Teile von  $\Phi$  bilden mit  $F, K, G$  äquianharmonische Gruppen. — Betrachtet man auf  $r$  die Kovariante  $Q$ , so erhält man als  $\Phi$  eine Fläche 9. Ordnung, die in drei Teile zerfällt; und diese Teile gehören noch dem Büschel von  $F, K, G$  an und bilden mit  $F, K, G$  harmonische Gruppen.

E. Togliatti.

### Algebraische Geometrie:

Turri, Tullio: Le trasformazioni birazionali involutorie in  $S_3$  aventi una stella unita di rette. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **24**, 28—35 (1954).

Les transformations en question déterminent dans la gerbe unie l'identité, ou une involution projective, ou une involution de Jonquières. Critique d'un travail de Montesano.

L. Godeaux.

Turri, Tullio: Trasformazioni birazionali involutorie dello spazio associate a un complesso lineare. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **24**, 36—45 (1954).

La transformation en question est une transformation (3, 3) particulière. Critique des travaux antérieurs de Montesano, Snyder et Baudoux.

L. Godeaux.

Dedò, Modesto: Una dimostrazione del teorema di Lüroth. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 141—143 (1954).

Sopra una retta,  $r$ , si abbia una serie algebrica irriducibile,  $\gamma_n^1$ , semplicemente infinita, di gruppi di  $n$  punti, tale che per il punto generico della  $r$  passi un solo gruppo della  $\gamma_n^1$ . Il teorema del Lüroth [Math. Ann. **9**, 163 (1876)] afferma che la  $\gamma_n^1$  è razionale, cioè costituisce una serie lineare,  $g_n^1$ . Per giungere a dimostrarlo, il Dedò prende in esame la  $\gamma_n^1$  ed una seconda serie  $\delta_n^1$ , per la quale valga pure la proprietà che il punto generico della  $r$  appartenga ad un solo gruppo della  $\delta_n^1$ . Due tali serie posseggono  $(n-1)^2$  coppie di punti comuni. Allora, se confrontiamo, la

$\gamma_n^1$  con la  $g_n^1$  determinata da due gruppi della  $\gamma_n^1$  stessa, si riconosce che la  $\gamma_n^1$  e la  $g_n^1$  hanno almeno  $n(n-1) - (n-1)^2$  coppie in comune, e quindi coincidono (data l'irriducibilità della  $\gamma_n^1$ ).  
L. Campedelli.

**Barlotti, Adriano:** Alcuni criteri di irriducibilità per le curve algebriche piane. *Archimede* 6, 250—252 (1954).

**Thalberg, Olaf M.:** Some properties of algebraic curves with a  $(n-2)$ -ple point. *Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I* 1954, Nr. 2, 8 p. (1954).

L'A. considère une courbe  $C$  d'ordre  $n$  ayant un point  $P$ ,  $(n-2)$ -uple ordinaire, les points de contact  $T$  des tangentes à la courbe passant par  $P$  et les points de rencontre  $S$  de la courbe avec ses tangentes en  $P$ . Il établit de nombreuses relations entre les courbes passant par  $P$  et les points  $T$  et les courbes passant par les points  $S$ . Par exemple, si  $n=6$ , par les points  $T$  passent  $\infty^2$  quartiques ayant un point double en  $P$ ; chacune d'elles coupe encore  $C$  aux six points de contact des tangentes menées par  $P$  à la quartique. La cubique polaire de  $P$  par rapport à la quartique passe par les points  $S$ .  
L. Godeaux.

**Fava, Franco:** Contributi allo studio della riflessione rispetto ad una curva. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 13, 225—241 (1954).

Es wird eine ebene algebraische Kurve  $C$  betrachtet,  $n$  sei ihre Ordnung,  $I$  und  $J$  seien Punkte, die in der Ebene von  $C$ , aber nicht auf  $C$  liegen. Ist  $P$  ein beliebiger Punkt, so projiziert man von  $J$  aus die Schnittpunkte von  $IP$  mit  $C$  und von  $I$  aus die Schnittpunkte von  $JP$  mit  $C$ . Die  $n^2$  Schnittpunkte, die sich so ergeben, lasse man  $P$  entsprechen. Diese Korrespondenz heiße Spiegelung an  $C$ . Wenn  $I$  und  $J$  die Kreispunkte sind, fällt sie mit der Schwarzschen Symmetrie von Kasner zusammen. Verf. untersucht das Spiegelbild eines Elementes in allgemeiner Lage, approximiert es bis zur 3. Ordnung und erörtert verschiedene Spezialfälle, wobei insbesondere auf die Korrespondenz zwischen den Tangenten eingegangen wird. Diese Untersuchungen wendet Verf. an auf die Bestimmung der Klasse des Spiegelbildes einer algebraischen Kurve. Besonders eingehend wird der Fall behandelt, daß  $C$  ein Kegelschnitt und die zu transformierende Kurve eine Gerade oder ein Kegelschnitt ist, dabei werden bekannte Ergebnisse gewonnen bzw. vervollständigt.  
J. Teixidor.

**Legrain-Pissard, Mme.:** Sur les réseaux homaloïdaux de courbes. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 23, 426—434 (1954).

Verf. betrachtet in einer Ebene ein homaloidisches Netz  $A$  von Kurven  $n$ -ter Ordnung mit  $\nu+1$  Grundpunkten  $O, O_1, \dots, O_\nu$  von den Ordnungen  $k, s_1, \dots, s_\nu$ , wobei  $k \geq s_1 \geq \dots \geq s_\nu$  ist. Unter der Klasse eines Netzes in einem Punkt versteht sie nach D. Montesano die Differenz zwischen der Ordnung der Kurven und ihrer Multiplizität in diesem Punkt. Das Netz  $A$  hat also im Punkt  $O$  die Minimalklasse  $h = n - k$ . Sie entwickelt nun ein Verfahren, das es gestattet, mit Hilfe von Jonquièresschen Transformationen die homaloidischen Netze von gegebener Minimalklasse zu erhalten, und zwar jedes von ihnen nur ein einziges Mal. Dieses Verfahren beruht auf folgendem Satz, der abgeleitet wird: Die Netze  $A$  von der Minimalklasse  $h$  sind die Jonquièresschen Transformaten von Netzen  $B$ , die wenigstens drei Grundpunkte von niedrigerer Klasse als  $h$  und einen Punkt mit der Klasse  $h$  besitzen, der der mehrfache Fundamentalpunkt der Jonquièresschen Transformation ist. Außerdem ist die Summe der Multiplizitäten zweier Grundpunkte eines Netzes  $B$  niemals größer als  $h$ ; sie ist kleiner als  $h$ , wenn diese Punkte Fundamentalpunkte der Transformation sind. Zum Schluß wird das Verfahren an einigen Beispielen illustriert.  
E. Löffler.

**Brusotti, Luigi:** Fasci reali di curve algebriche a curva reale generica massimale. *Rend. Mat. e Appl., V. Ser.* 14, 239—251 (1954).

Si prendono in esame fasci  $\Phi$  reali di curve di genere  $p$ , la cui parte reale sia massimale, abbia cioè parte reale dotata di  $p+1$  circuiti, massimo numero com-



patibile col genere. — Supposte condizioni generiche, ed interpretate le eventuali singolarità della parte reale  $\Sigma$  della superficie sostegno di  $\Phi$  in modo che la  $\Sigma$  venga ognora presentata come priva di singolarità, utilizzando la teoria topologica dei fasci di curve grafiche elaborata dallo stesso A. [Ann. Mat. pura appl., III. Ser. **23**, 67—109 (1946)], si ravvisa che  $\Phi$  è privo di centri critici reali e che  $\Sigma$  consta di  $m \geq 1$  falde  $\Sigma$  dei tipi: „sfera“ o „piano proiettivo“ o „rigata cubica razionale reale“ o „toro“. — Su ciascuna  $\Sigma$  i gruppi di circuiti pertinenti alle singole curve reali di  $\Phi$  costituiscono una involuzione topologica  $\Omega$ , priva di elementi uniti e d'ordine  $n$  ( $1 \leq n_i \leq p-1$ ). — Si approfondisce lo studio dei fasci  $\Phi_0$  razionali, per quali pure si forniscono teoremi esistenziali nel caso in cui  $\Sigma$  abbia il numero massimo di falde, oppure una sola falda, e nel caso in cui sia massimo il numero di involuzioni  $\Omega$  d'ordine pari. — Infine, ammessa la presenza di incroci dapprima esclusa, si perviene ad un teorema che può ricevere assai larga applicazione in questioni esistenziali.

V. E. Galafassi.

Burniat, Pol: Sul genere lineare delle superficie algebriche. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 23—29 (1954).

Construction d'une surface algébrique de genre géométrique  $p_g \geq 4$ , régulière, de genre linéaire  $p^l = 8p_g - 1$  et d'une surface irrégulière de genre linéaire  $p^l = 8p_g + 9$ . Les sections hyperplanes de ces surfaces forment la partie variable du système canonique.

L. Godeaux.

Godeaux, Lucien: Sur les surfaces algébriques touchant un plan le long d'une droite. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 1194—1198 (1954).

Lorsqu'une surface algébrique d'ordre  $n$  est tangente à un plan le long d'une droite  $a$ , celle-ci contient en général  $(n-1)$  points doubles distincts de la surface. Si la polaire d'un point quelconque par rapport à la surface a en un point  $A$  de  $a$ , un contact d'ordre  $(k-1)$ , il y a en  $A$ ,  $(k-1)$  points doubles infiniment voisins, biplanaires sauf le dernier qui est conique. La propriété est réciproque. L'A. donne également une extension au contact de deux surfaces, qui paraît devoir comporter quelques réserves.

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur l'existence de surfaces multiples possédant des points de diramation de structure donnée. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 42—47 (1954).

Considérons un nombre premier:  $p = 2r + 1 = a_1x + b_1 = b_2\beta + a_2$  ( $x$  et  $\beta$  positifs donnés tels que  $x\beta \equiv 1 \pmod{p}$ ) et les solutions  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  des équations  $\lambda + x\gamma \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\mu + \beta\lambda \equiv 0 \pmod{p}$  rangées selon l'ordre croissant de la somme  $\lambda + \mu$ ; le premier couple de solutions vérifie  $\lambda_1 + x\mu_1 = h_1p$ ,  $\mu_1 + \beta\lambda_1 = h_2p$ , et introduit  $m$  et  $n$  tels que  $m = h_1b_1 + (m-1)x$ ,  $n = h_2a_2 + (n+1)\beta$ . Comme il y a  $r+2$  solutions, considérons dans l'espace à  $r+4$  dimensions, l'homographie cyclique de période  $p$ ,  $H$ :

$$x'_1 : x'_2 : \dots : x'_{r+3} : x'_{r+4} = x_1 : x_2 : \dots : x_{r+2} = \varepsilon x_{r+3} : \varepsilon^x x_{r+4} \quad (\varepsilon^p = 1).$$

Soit  $q(x_1, x_2, \dots, x_{r+2})$  une forme de degré  $\lambda_i + \mu_i$ . La surface  $F$  d'équations:

$$x_{i-3}x_{i-4} = q_1, \quad x_{i-3}^2x_{i-4}^2 = q_2, \quad x_{i-3}^3x_{i-4}^3 = q_3, \quad x_{i-3}^4x_{i-4}^4 = q_4, \quad x_{i-3}^5x_{i-4}^5 = q_5, \quad x_{i-3}^6x_{i-4}^6 = q_6, \quad x_{i-3}^7x_{i-4}^7 = q_7, \quad x_{i-3}^8x_{i-4}^8 = q_8$$

est conservée par  $H$  qui y induit une involution  $I$ , d'ordre  $p$  ayant des points unis de seconde espèce en nombre fini si les  $q_i$  sont convenablement choisis. Sur la surface  $\Phi$  image de l'involution, obtenue en projetant  $F$  à partir de la droite  $0_{r+3}0_{r+4}$  sur l'espace  $S_{r+2}$  ( $x_{i-3} = x_{i-4} = 0$ ), les points de diramation sont de multiplicité  $a_1 + m + n + b_2$ , leur cône tangent est décomposé en quatre cônes rationnels d'ordre  $a_1, m, n, b_2$ , chacun rencontrant le suivant selon une droite, ces trois droites étant les seules courbes communes aux quatre cônes.

B. d'Orgeval.

Terracini, Alessandro: Una classe di superficie razionali iperspaziali con asintotiche razionali normali. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **13**, 263—270 (1954).

Si considerino sopra una curva razionale normale  $C^r$  di  $S_r$  due punti  $A$  ed  $M$ : esiste un sistema  $\infty^{r-1}$  di curve razionali normali aventi in comune con  $C^r$  gli

spazi osculatori di tutte le dimensioni nei punti  $A$  ed  $M$ . L'A. considera il sistema  $I^\infty$  di curve razionali normali che ne deriva per  $M \rightarrow A$  e determina (a meno di omografie) le equazioni di tutte le superficie di  $S_r$  aventi le asintotiche di una famiglia in un sistema  $I'$ : dette superficie sono di ordine  $r(r-1)/2$ , contengono con molteplicità  $r-1$  il punto comune a tutte le asintotiche del sistema  $I'$  e ammettono un gruppo continuo  $\infty^3$  di omografie in sè. Per  $r=3$  si ritrova la rigata cubica di Cayley. P. Buzano.

**Segre, Beniamino:** *Intorno ad alcune generalizzazioni di un teorema di Noether.* Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 75—84 (1954).

Der im Titel genannte Noethersche Satz ist derjenige, welcher die Rationalität einer algebraischen Fläche behauptet, sobald sie ein rationales Büschel rationaler Kurven aufweist; der Satz hat seinen Grund in der Existenz einer Kurve, welche die Kurven des Büschels je in einem Punkte schneidet. Von diesem Satze sind viele Verallgemeinerungen von U. Morin, F. Conforto, M. Baldassarri angegeben worden. Verf. betrachtet hier, noch allgemeiner, ein algebraisches und irreduzibles  $\infty^d$ -System  $\Sigma$  von algebraischen Mannigfaltigkeiten  $V$ , so daß jede  $V$  einem (festen oder beweglichen) Raum  $S_r$  angehört und Schnitt von  $k \geq 1$  Formen dieses Raumes, der Ordnungen  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , ist ( $n_i \geq 2$ ): ist dann  $r \geq n_1^d + n_2^d + \dots + n_k^d$ , so gibt es eine algebraische Mannigfaltigkeit  $W$ , welche mit jeder  $V$  einen Punkt gemein hat, und so, daß dieser Punkt von der entsprechenden  $V$  rational bestimmt wird. Der Beweis ist sehr einfach, kann aber hier nicht wiedergegeben werden. Man kann auch, noch allgemeiner, fragen, ob es möglich ist, auf jeder  $V$  von  $\Sigma$  rational einen Raum  $S_s$  ( $s \geq 0$ ) zu wählen: man findet, daß diese Wahl möglich ist immer, wenn  $r$  groß genug im Vergleich mit  $s, d, k, n_1, n_2, \dots, n_k$  ist; setzt man insbesondere alle  $n_i$  gleich 2, so lautet eine untere Schranke für  $r$  folgendermaßen:  $r \geq (s + 2^k)d + s$ . In demselben Falle (alle  $n_i$  gleich 2), wenn man noch voraussetzt, daß  $V$  die Ordnung  $2^k$  und die reguläre Dimension  $r - k$  hat, und wenn man  $s = k - 1$  setzt, findet man, daß  $W'$  existiert, sobald  $r \geq 2^d k + k^2 - 1$ ; für  $r = 2$  und  $k = d = 1$  hat man den Noetherschen Satz; für  $k = 1$  hat man bekannte Sätze von F. Conforto. Schließlich noch eine Anwendung auf eine algebraische  $W_3$ , die ein Büschel von kubischen Flächen enthält, deren jede nur drei Doppelpunkte besitzt; eine solche  $W_3$  kann immer in einen Ort von  $\infty^1$  Ebenen birational transformiert werden. E. Togliatti.

**Zariski, O.:** *Interprétations algébrique-géométriques du quatorzième problème de Hilbert.* Bull. Sci. math., II. Sér. **78**, 155—168 (1954).

Le XIV problème de Hilbert est une conséquence de la proposition algébrique-géométrique suivante: Soit, sur une variété normale  $V/k$  de dimension  $r$ , un cycle effectif  $D$ , défini sur  $k$ , de dimension  $r-1$ . Soit  $R[D]$  l'anneau des fonctions  $\xi$  sur  $V/k$  telles que, pour un entier convenable  $i$ ,  $(\xi) - iD$  est un cycle effectif. Alors  $R[D]$  est un domaine fini sur  $k$ . Du point de vue géométrique, cette proposition semble plus plausible que le problème de Hilbert. Pour  $r=1$ , elle est une conséquence immédiate du théorème de Riemann-Roch. Pour  $r=1$ , la difficulté de sa démonstration résulte du fait de la possible existence de points base accidentels dans chacun des systèmes complets  $|iD|$ ,  $i=1, 2, \dots$ . Mais peut-être cette éventuelle complication dépend de la variété  $V/k$  et n'a pas de signification invariante pour le corps  $F$  des fonctions rationnelles sur  $V/k$ . Cette remarque amène l'A. à considérer le problème d'un point de vue invariant (birationnel) en faisant intervenir la surface de Riemann  $\mathfrak{M}$  de  $F$ . Soit alors  $M(D)$  l'ensemble de toutes les places  $p$  de  $F/k$  telles qu'il existe au moins une fonction  $\xi$  de  $R[D]$  qui est infinie en  $p$ . L'A. réduit la démonstration de sa proposition à celle de la propriété suivante:  $M(D)$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathfrak{M}$ . Sous cette forme et utilisant le théorème de l'uniformisation locale il obtient la solution du problème de Hilbert pour le cas des surfaces ( $r=2$ ) sur un corps  $k$  de caractéristique nulle. La solution du problème de Hilbert pour  $r \geq 3$

semble requérir des connaissances plus approfondies sur la théorie des variétés de dimension quelconque que celles dont on dispose dans l'état actuel de la géométrie algébrique.

G. Ancochea.

**Conforto, Fabio:** Sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard. Arch. der Math. 5, 282—291 (1954).

Es sei  $V_p$  eine Picardsche Mannigfaltigkeit (P. M.) von  $p$  komplexen Dimensionen.  $\Sigma$  das  $\infty^{p-1}$ -fache lineare System von Picardschen Differentialen erster Gattung auf  $V_p$  und  $\omega$  die zugehörige Riemannsche Periodenmatrix. Verf. betrachtet ein in  $\Sigma$  enthaltenes  $\infty^{q-1}$ -faches ( $q \leq p$ ) lineares System  $\Sigma_{q,r}$  von Differentialen mit  $r$  reduzierten Perioden und zeigt zuerst, daß immer  $r \geq 2q$  gilt. Wenn  $r = 2q$  ist, so heißen die  $\Sigma_{q,r}$  „reguläre“ Systeme von Differentialen mit reduzierten Perioden, welche oft in der mathematischen Literatur betrachtet wurden. Das Problem der Existenz von Systemen  $\Sigma_{q,r}$  mit  $r = 2q$ , d. h. von „irregulären Systemen“ von Differentialen mit reduzierten Perioden, wird erstmals in dieser Arbeit angegriffen und in bejahender Weise gelöst. Dazu bemerkt Verf., daß triviale irreguläre Systeme  $\Sigma_{q,r}$  zu jeder P. M. gehören können; dann zeigt er aber durch ein Beispiel für den Fall  $p = 3$ , daß auch nichttriviale irreguläre Systeme, d. h. nur für „spezieller“ P. M. auftretende Systeme, existieren. (Ein Teil des Beweises wird ausdrücklich auf eine weitere Arbeit verschoben, vgl. folgend. Referat.) Dieses Beispiel ist höchst interessant, weil die betrachtete 3-dimensionale P. M. demnach eine Riemannsche Matrix mit dem Index der Singularität und Multiplikabilität Eins im Sinne von G. Scorza — d. h. eine allgemeine Matrix nach G. Scorza — hat. [S. G. Scorza, Rend. Circ. Mat. Palermo 41, 263—380 (1916).]

M. Rosati.

**Conforto, Fabio:** Complemento ad una ricerca sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 119—125 (1954).

In dieser Arbeit, die nach dem Tode des Verf. erschienen ist, wird ein früherer Beweis über die Existenz von nichttrivialen irregulären Systemen von Picardschen Differentialen erster Gattung auf einer  $p$ -dimensionalen Picardschen Mannigfaltigkeit (P. M.)  $V_p$  zu Ende geführt (vgl. vorhergehend. Referat). Genauer wird unter Bezugnahme auf ein Beispiel für  $p = 3$  gezeigt, daß eine P. M., die ein oben genanntes System besitzt, wirklich „speziell“ ist, d. h. daß nicht jede P. M. ein solches System besitzt. Trotzdem hat die P. M. des Beispiels eine Riemannsche Periodenmatrix, die „allgemein“ nach G. Scorza ist.

M. Rosati.

**Segre, Beniamino:** Sui sistemi di forme quadratiche nel campo reale. Commentarii math. Helvet. 28, 288—300 (1954).

Es wird hier zunächst folgende Aufgabe gestellt: in einem projektiven reellen  $n$ -dimensionalen Raume  $S_n$  ( $n \geq 1$ ), betrachtet man ein  $\infty^\delta$  Linearsystem  $\Sigma$  von reellen Quadriken ( $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}n(n+3)-1$ ); es wird die größte ganze Zahl  $q = q(n, \delta)$  gesucht, so daß auf irgend einer Quadrik eines jeden  $\Sigma$  ein reeller Raum  $S_q$  enthalten ist. Es wäre dasselbe, die kleinste ganze Zahl  $\delta = \delta(n, q)$  zu bestimmen, so, daß in jedem  $\Sigma$  irgendeine Quadrik mit reellen Räumen  $S_q$  ( $0 \leq q \leq n-1$ ) vorhanden ist. Setzt man  $q = n-1$ , so ist man, nach einigen einfachen Änderungen, zu folgender anderen Aufgabe geführt: Es wird die größte ganze Zahl  $d = d(n)$  gesucht, so daß die Quadriken eines jeden  $\infty^d$  Linearsystems von reellen Quadriken im Raume  $S_n$  wenigstens ein gemeinsames Paar reeller konjugierter Punkte aufweisen. Diese letzte Aufgabe ist von H. Hopf gestellt worden (vgl. dies. Zbl. 23, 383), welcher die Zahl  $N(n+1) = d(n) + 2$  betrachtet und für sie folgende besondere Werte angibt:  $N(2) = 2$ ,  $N(3) = 5$ ,  $N(4) = 6$ . Es ist nicht leicht, solche Fragen ganz allgemein zu beantworten. Nach einigen vorbereitenden Betrachtungen beweist hier Verf. unter anderen folgende Ungleichungen:  $\frac{1}{2}(2q - n + 1)(2q - n + 2) \leq \delta(n, q) \leq \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$ ;  $\delta(n+1, q+1) \leq \delta(n, q) + n + 2$ . Das Hauptergebnis der vorliegenden Abhandlung ist, daß  $\delta(n, q)$



seinen kleinstmöglichen Wert  $\frac{1}{2}(2q - n + 1)(2q - n + 2)$  erreicht, wenn  $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \leq q$   $n$  und wenn außerdem eine gewisse ganze Zahl  $\kappa_{n,r}$  ungerade ist. Diese Zahl  $\kappa_{n,r}$  ist ein komplizierter Fakultätenausdruck; man kann aber die Sachen vertiefen; und so findet man schließlich, daß alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, wenn  $n$  und  $q$  eine der beiden folgenden Formen haben: entweder  $n = 2^h$ ,  $(k-1)2^{h+1}$  und  $q = k2^h - 1$ , oder  $n = 2^h + k2^{h+1} - 1$  und  $q = (k+1)2^h - 1$ , wo jetzt  $h, k$  beliebige positive ganze Zahlen bedeuten. Für  $k = 1$  hat man insbesondere  $d(2^h) = 2^{h+1} - 1$  für jede ganze positive Zahl  $h$ ; daraus zieht man  $N(r) > r$  für jedes  $r \geq 3$ ; und das ist mit einem Satze von H. Hopf (l. c.) über reelle Algebren gleichbedeutend. Es folgen noch weitere besondere Fälle und Anwendungen.

*E. Togliatti.*

**Segre, Beniamino:** Alcune questioni di realtà. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **13**, 31—32 (1954).

Kurze Zusammenfassung der voranstehenden Abhandlung. *E. Togliatti.*

**Segre, Beniamino:** Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **37**, 139—155 (1954).

L'A. reprend dans ce travail l'étude de ses covariants d'immersion [Ann. Mat., IV. Ser. **35**, 1—128 (1953)] par des procédés topologiques, en correction d'un paragraphe de ce travail antérieur [voir aussi la revue de W. V. D. Hodge dans Math. Reviews **15**, 822—823 (1945)]. Le résultat est maintenant le suivant: Considérons une variété algébrique irréductible et sans singularités  $V'$  de dimension  $v$ , et une sous-variété  $P'$  de dimension  $p$ , effective, irréductible et non singulière. On peut transformer  $V'$  par une transformation monoidale  $T$  (dilatation) en une variété  $V$ , également de dimension  $v$ , et telle que  $P'$  soit transformé dans une hypersurface  $P$ , la dilatation étant topologique au dehors de  $P'$ . Les puissances des intersections d'une variété avec elle-même dans  $V$  sont indiquées par des puissances entre crochets. On a alors  $P'_{V,i} = (-1)^{v-p+i-1} T^{-1} P^{[v-p+i]}$ . (Remarques du réf.: Un travail récent de Vesentini [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. math. natur., VIII. Ser. **17**, 195—203 (1954)] montre que les propriétés formelles des covariants d'immersion, ainsi que leur interprétation en termes de classes caractéristiques restent vraies si on considère des variétés avec singularités, ce qui permet leur identification aux carrés de Steenrod dans le cas virtuel [cf. un travail du réf., Rend. Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser. **16**, 331—334 (1954)], il paraît probable que la formule de ce travail reste aussi valable dans des cas plus généraux. D'autre part, la notion de dilatation ne désigne pas une transformation birationnelle univoquement définie pour  $v \geq 3$ , il serait intéressant de pouvoir exprimer les  $P'_{V,i}$  en termes d'invariants de la structure fibrée de  $P$ . D'autre part, il semble probable que toute la théorie puisse être établie pour des domaines de Riemann généraux.) La démonstration se fait par induction, en considérant un certain nombre d'hypersurfaces qui passent par  $P$ . L'intersection résultante après  $T$  est alors calculée une fois directement, et deuxièmement par les  $P'_{V,i}$  en utilisant des formules du premier travail; ce qui donne le résultat. Le reste du travail est consacré à l'étude de la variation des variétés canoniques de  $V$  dans une dilatation de la variété  $V'$ . La formule fondamentale permet d'indiquer un méthode d'induction qui en principe résout le problème pour tous valeurs  $v$  et  $p$ . L'A. donne les formules pour les cas suivantes:  $v$  quelconque,  $p = 0$ ,  $i$  quelconque;  $v$  quelconque,  $p$  quelconque,  $i = 1, 2, 3$ . Le processus devient extrêmement compliqué pour des indices plus grands. Le seul cas simple est celui  $i = v$  des groupes de points canoniques (dans ce cas les formules données se réduisent à des théorèmes connus sur la caractéristique d'Euler-Poincaré).

*H. Guggenheimer.*

**Goto, Morikuni:** On algebraic homogeneous spaces. Amer. J. Math. **76**, 811—818 (1954).

Le but de ce travail est de montrer qu'un espace homogène complexe, connexe, compact  $M$ , à groupe fondamental fini, et dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est  $\neq 0$ , est une variété algébrique rationnelle. D'après H. C. Wang (ce Zbl. **55**, 166) on a, lorsque  $M$  est simplement connexe,  $M = G/H$ , où  $G$  est semi-simple complexe, de centre réduit à l'identité,  $H$  un sous-groupe complexe fermé, connexe, qu'il décrit complètement (caractérisé par le fait qu'il contient un sous-groupe résoluble connexe maximal de  $G$ ). On identifie  $G$  à son groupe adjoint, donc à un sous-groupe du groupe linéaire général  $GL(n, \mathbb{C})$ , ( $n =$  dimension complexe de  $G$ ). L'A. prouve que  $H$  est égal à son normalisateur, donc que les espaces envisagés sont forcément simplement connexes, et que c'est le sous-groupe de  $G$  laissant un certain  $k$ -plan invariant. Il en résulte immédiatement une application  $f$  biunivoque et bi-holomorphe de  $G/H$  sur une sous-variété de la grassmannienne des  $k$ -sous-espaces de  $\mathbb{C}^n$ , d'où une structure de variété algébrique. Soit  $P(n)$ ,

[resp.  $N(n)$ ], le sous-groupe de  $GL(n, C)$  forme des matrices triangulaires supérieures, (resp. inférieures à valeurs propres égales à 1), et soit  $P = G \cap P(n)$ ,  $N = G \cap N(n)$ . Il est élémentaire que  $N(n) \cdot P(n)$  est un ouvert de Zariski de  $GL(n, C)$ , (i. e. son complément est une sous-variété algébrique propre). De cela, du fait que  $G$  est algébrique et des propriétés usuelles des racines de  $G$ , l'A. tire que, relativement à une base convenable de l'algèbre de Lie de  $G$ , l'ensemble  $N \cdot P$  contient un ouvert de Zariski de  $G$ ; de plus  $P = H$  et  $N = N_1 \cdot N_2$  où  $N_1$  est un idéal de  $N$  et où  $N_2 = H \cap N$ . Il s'ensuit que  $t$  est biunivoque sur  $N_1$  et que  $t(N_1)$  contient un ouvert de Zariski de  $t(G/H)$ . Comme  $N_1$  est un sous-groupe complexe de  $N$ , il est birationnellement et birégulièrement équivalent à un espace affine complexe, d'où la rationalité de  $t(G/H)$ . *A. Borch.*

## Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Klamkin, M. S.: On the vector triple product. Amer. math. Monthly **61**, 705—707 (1954).

Pais, A.: Spherical spinors in a Euclidean 4-space. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 835—841 (1954).

Varini, Bruno: Il calcolo tensoriale da un punto di vista elementare. Archimede **6**, 140—149 (1954).

Dies ist eine kurze Auseinandersetzung über ko- und kontravariante Vektoren und Tensoren für Anfänger. Merkwürdigerweise wird von den Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors nur eine metrische geometrische Deutung gegeben und nicht die viel einfachere affine. *J. A. Schouten.*

Yano, K. e E. T. Davies: Contact tensor calculus. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **37**, 1—36 (1954).

Es wird eine Tensorrechnung für (homogene) Berührungstransformationen entwickelt aus der Theorie der eingespannten  $X_N^n$  in  $X_N$  (hier  $V_n$  genannt). Eine kurze Übersicht einiger Punkte dieser Theorie wird in den ersten drei Paragraphen zusammengefaßt. Es handelt sich dabei nur um Zerlegung der Differentiationsformeln in  $X_N$  mittels der v. d. Waerden-Bortolottischen Operatoren, die hier mit  $V$  bezeichnet werden, und die Größen der Unterraume kommen nicht zur Sprache. In § 4 wird der Kontakt mit den Berührungstransformationen gelegt, indem auf  $N = 2n$  spezialisiert wird, und in § 5 wird eine Metrik eingeführt. Der  $C$ -Raum, wo ein kovariantes Vektorfeld zugrunde liegt (im Gegensatz zu einer Vektordichte im Cartanschen Raum) und der Finsler-Raum, wo das zugrunde gelegte Vektorfeld kontravariant ist, werden in den §§ 6 und 7 mittels homogener Berührungstransformationen aus der  $V_2$  entwickelt. Man vergleiche Davies, dies. Zbl. **50**, 163; Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. **52**, 11—15 (1953). *J. A. Schouten.*

Haantjes, J.: On the notion of geometric object. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 77—81 (1954).

Der Verf. informiert darüber, wie der Begriff des geometrischen Objektes gewonnen hat durch die Verallgemeinerung der Definition auf die Faserräume. Zunächst wird in einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit die topologische Gruppe  $I_n^s$  (es bedeutet eine bestimmte natürliche Zahl) definiert. Nachher wird der Begriff eines Bündels von geometrischen Objekten in dem Faserraum erklärt. Weiter definiert der Verf. den Begriff der Äquivalenz von zwei Bündeln (diese Definition stimmt nicht mit der Steenrodschen Definition der Äquivalenz von zwei „fibre bundles“ überein). Am Ende gibt der Verf. die Lösung eines der Klassifikationsprobleme an, und zwar bestimmt er alle (transitiven) Bündel von geometrischen Objekten erster Klasse im eindimensionalen Raum. Es ergibt sich eine unendliche Menge von nicht äquivalenten (das Resultat wurde zusammen mit G. Laman gewonnen). *St. Golub.*

Yano, Kentaro and Yoshihiro Tashiro: Some theorems on geometric objects and their applications. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. **2**, 134—142 (1954).

Die Verff. erinnern zunächst an den Begriff der Lieschen Ableitung für allgemeine geometrische Objekte (von beliebiger Klasse  $p$ , mit beliebiger Anzahl  $N$  von Komponenten und in beliebiger

dimensionalen Räumen  $X_n$ ) und an die Definition eines linearen und homogenen Objektes. Ist im Raume  $X_n$  eine  $r$ -gliedrige Transformationsgruppe  $G_r$  gegeben ( $c_{ba}^a$  bezeichne die Strukturkonstanten der Gruppe) und sind in  $X_n$   $r$  Objekte  $\Phi_a^A$  ( $A = 1, \dots, N$ ;  $a = 1, \dots, r$ ) von demselben Typus (law of transformation, Transformationsregel der Komponenten) gegeben, bezeichnen weiter  $X_a$  die infinitesimalen Operatoren der Gruppe  $G_r$ , so sagen die Verf., daß die  $\Phi_a^A$  ein komplettes System (in bezug auf  $G_r$ ) bilden, falls die Beziehung  $2X_{[b} \Phi_{a]}^A = c_{ba}^c \Phi_c^A$  erfüllt ist. Die Verf. lösen das Problem der Existenz eines Feldes von Objekten  $\Omega^A$ , welche die Gleichung  $X_a \Omega^A = \Phi_a^A$  im Sinne „completely integrable“ erfüllen. Die Sätze 1, 2, 3 geben in dieser Richtung hinreichende Bedingungen an. Im Satz 1 setzt man voraus, daß der Rang der Matrix  ${}_{[b} \xi_{a]}^i$  (die Vektorfelder  $\xi_a^i$  bestimmen eben die Gruppe  $G_r$ ) genau gleich  $r$  ist. Im Satz 2 setzt man voraus, daß  $G_r$  nichttransitiv ist und daß der Rang der obigen Matrix kleiner als  $r$  ist, im Satz 3, daß die Gruppe  $G_r$  mehrfach transitiv ist. In Anwendungen (wobei durchaus vorausgesetzt wird, daß der Rang der obigen Matrix gleich  $r$  ist) zitieren die Verf. einen Satz von Knebelman, der eine konforme Transformation des gegebenen Riemannschen Raumes  $V_n$  von der Art betrifft, daß der transformierte Raum die gegebene Gruppe als Gruppe von Bewegungen zuläßt. Weiter wird ein Satz von Levine verallgemeinert. Drei weitere Sätze stehen in Verbindung mit  $r$ -gliedrigen Gruppen in  $X_n$ . St. Golab.

**Bottema, O.:** Zur Kinematik des Rollgleitens. Arch. der Math. 6, 25–28 (1954).

In Ergänzung der Betrachtungen des Ref. (dies. Zbl. 51, 151) hebt Verf. den Unterschied zwischen dem Rollgleiten eines Kurvenpaares mit der Rollgleitzahl  $\lambda \neq 1$  und dem reinen Rollen ( $\lambda = 1$ ) der Polbahnen hervor. Für die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der rollgleitenden Kurvenpaare legt Verf. eine Figur niedrigerer Ordnung (Wendekreis statt Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen) zugrunde. Mittels der Euler-Savaryschen Formel werden aus einer vom Ref. abgeleiteten Formel zwei weitere, ähnliche Formeln hergeleitet, die ebenfalls Doppelverhältnisse ausdrücken und in die der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve des in der Gangebene festgehaltenen Berührungspunktes der rollgleitenden Kurven eingehen. H. R. Müller.

**Biran, Lutfi:** Sur le roulement des surfaces réglées. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 19, 61–66 (1954).

Verf. betrachtet unter Verwendung dualer Größen (Study'sches Übertragungsprinzip der Liniengeometrie) zwei Schraubenbewegungen um feste Achsen und untersucht die Achsenflächen, die zur gegenseitigen Bewegung der beiden verschraubten Körper gehören. Es wird gezeigt: Diese Achsenflächen sind von fester dualer Neigung, wenn das Verhältnis der Drehgeschwindigkeiten der beiden Schraubungen und die Differenz ihrer Parameter fest sind. Für den allgemeinen Fall wird eine Darstellung der einen Achsenfläche hergeleitet, wenn die der anderen bekannt ist. Es sei bemerkt, daß Verf. die Bezeichnung „Rollung“, d. h. „roulement“, statt „Schrotung“, also „viriation“, gebraucht. H. R. Müller.

**Horninger, H.:** Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubenflächen. Monatsh. Math. 58, 193–212 (1954).

Wird ein Gelenkparallelogramm  $FAPB$  derart bewegt, daß  $FA$  und  $FB$  zwei koaxiale Wendelflächen beschreiben, so bewegen sich  $F$  auf der Achse,  $A$  und  $B$  auf je einer Schraubenlinie und  $P$  auf einer transitivenden Raumkurve, die Verf. Trochoidenschraublinie (TSL) nennt. Auf eine zur Achse senkrechte Ebene projiziert sich die TSL als Trochoide, auf eine die Achse enthaltende Ebene als Kurve, die sich durch Überlagerung zweier Sinuslinien ergibt. Eine Trochoide läßt sich als gemeinsame Bahnlinie zweier Kreisrollungen darstellen, deren feste Kreise konzentrisch liegen. Setzt man eine Kreisrollung mit einer zum Rollwinkel proportionalen Verschiebung senkrecht zur Kreisebene zusammen, so entsteht eine Zylinderschrotung, die Verf. Trochoidenschraubung (TS) nennt. Sie läßt sich auch aus einer Schraubung und einer Drehung zusammensetzen. Eine TSL ist also gemeinsame Bahnlinie zweier TS. Hieraus leitet Verf. außer einer einfachen Tangentenkonstruktion eine große Zahl



weiteren Eigenschaften der TSL, aber auch Eigenschaften der geraden Kreisschraubflächen her.  
*G. Lochs.*

**Noli, Walter:** Über Schraubenabbildungen. Mitt. math. Sem. Gießen **51**, 66 S. (1954).

Bei der Entwicklung einer kombinierten Grob- und Feineinstellung eines Mikroskops trat die Forderung auf, zwei Schraubflächen (Schraubenmutter und Schraubenspindel) mit gleichen Ganghöhen und parallelen Achsen  $a_1, a_2$  zu bestimmen, die einander längs einer Kurve  $k$  berühren. Sollen z. B. die Abstände der Punkte von  $k$  bis  $a_1$  und  $a_2$  festes Verhältnis haben, so ergibt sich darstellend-geometrisch für  $k$  eine Schraubenlinie mit derselben Ganghöhe und mit einer Achse, die mit  $a_1$  und  $a_2$  komplanar und parallel liegt; die gesuchten Schraubflächen besitzen Kreise als Normalschnitte. In einem anderen Fall sind Mutter und Spindel schiefe, offene Regelschraubflächen. — Dies führt auf eine „Schraubenabbildung“: Eine Schraubung sei durch die Achse  $a$  und den Parameter  $c$  gegeben. Ein Punkt  $P$  habe den Schraubradius  $r$ , auf der orientierten Schraubtangente  $t$  von  $P$  sei die Strecke  $\sqrt{r^2 + c^2}$  von  $P$  bis  $T$  aufgetragen. Bei festem  $P$  und  $c$  ist die Abbildung von  $a$  auf  $T$  eindeutig. Umgekehrt entsprechen einem Punkt  $T \in$  Achsen  $a$ , die eine Regelschar eines einschaligen Drehhyperboloids mit der Achse  $PT$  und der Mitte  $P$  bilden. In zahlreichen Einzelfällen wird eingehend untersucht: a) die Änderung von  $T$ , wenn  $a$  bestimmte Bewegungen ausführt, b) die zu bestimmten Mannigfaltigkeiten der  $a$  gehörenden Mannigfaltigkeiten der  $T$ , c) die Strahlkongruenzen bzw. Strahlkomplexe der  $a$ , die entstehen, wenn  $T$  an eine bestimmte Kurve oder Fläche gebunden ist.

*F. Hohenberg.*

• **Koževnikov, S. N.:** Theorie der Mechanismen und Maschinen. 2. verbess. u. erweit. Aufl. Kiev: Wissenschaftlich-technischer Staatsverlag für Maschinenbau-Literatur, Ukrainische Abteilung 1954. 644 S. R. 15,80 [Russisch].

• **Levenson, L. B.:** Theorie der Mechanismen und Maschinen. Kinematik und Dynamik der Mechanismen. 2. umgearb. Aufl. Moskau: Wissenschaftlich-technischer Staatsverlag für Maschinenbau-Literatur 1954. 504 S. R. 12,70 [Russisch].

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Parodi, Maurice:** Sur une propriété des courbes planes dont le rayon de courbure est une fonction rationnelle de l'abscisse ou de l'ordonnée. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1177—1178 (1954).

Es handelt sich um die ebenen Kurven  $y = y(x)$ , deren Krümmungsradius  $R$  die Gestalt  $R = |y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n|/|b_1 y^{n-1} + \dots + b_n|$  hat ( $a_i, b_i$  reelle Konstanten) und die Ordinatenmengen, die zu festem  $R$  gehören. Wenn  $R$  der Ungleichung  $a_1 - \varepsilon b_1 R = 1 + \sum_{i=1}^n a_i - \varepsilon b_i R$  genügt ( $\varepsilon = \pm 1$ ), dann liegen alle Punkte mit  $|y| = 1$  mit diesem festen  $R$  auf zwei Parallelen, die zur  $x$ -Achse symmetrisch sind. Ist überdies  $n$  gerade, so gibt es auch Punkte  $|y| = 1$  mit diesem festen  $R$ .  
*K. Strubecker.*

**Bilinski, Stanko:** Einige Eigenschaften sphärischer Evoluten und sphärischer Evolventen. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **9**, 109—113 und kroatische Zusammenfassg. 113—114 (1954).

$C$  sei eine Kurve auf der Kugel  $K$ . Der Krümmungskreis von  $C$  (im Punkte  $T$ ) ist der Schnittkreis der Schmiegeebene von  $C$  mit  $K$ . Projiziert man seinen Mittelpunkt vom Mittelpunkt von  $K$  aus auf  $K$ , so erhält man zwei diametrale Punkte, welche die „linke“ und „rechte“ Evolute beschreiben, wenn  $T$  die Kurve  $C$  durchläuft. Diese Evoluten haben ähnliche Eigenschaften wie bei ebenen Kurven, insbesondere erhält man die Ausgangskurve durch Abwicklung eines Fadens von der

Evolute, nur muß dieser längs einer geodätischen Linie auf der Kugel gespannt werden.  
H. Gericke.

Tenca, Luigi: Una particolare elica sferica. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 9, 451—454 (1954).

Deaux, R.: Sur la spirale conique. Mathesis 63, 328—334 (1954).

Die bereits im Altertum bekannt gewesene konische Spirale  $\sigma$  wird durch die Parameterdarstellung  $(a v \cos v, a v \sin v, b v)$  definiert. Es werden in dieser Arbeit u. a. folgende meist bekannte Tatsachen über die Kurve erneut einfach abgeleitet:  $\sigma$  ist Ort der Fußpunkte der vom Ursprung auf die Schmiegebenen einer gewissen Schraubenlinie gefällte Lote; die Tangentenfläche von  $\sigma$  wird durch die  $(x, y)$ -Ebene in einer Galileischen Spirale von der Polargleichung  $r = -a \varphi^2$  geschnitten;  $\sigma$  erzeugt bei einer Schraubenbewegung eine Schraubenfläche  $\varrho$  und definiert auf ihr eine Kurvenschar, deren Orthogonaltrajektorien durch die Zylinder mit einer Kappakurve  $r = k \operatorname{tg}(\varphi + C)$  als Profil aus  $\varrho$  ausgeschnitten werden.  
W. Burau.

Semin, F.: Sur les sections d'une surface sursculées par leurs cercles de courbure. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 19, 34—44 (1954).

Nach G. Darboux, Bull. Sci. math., II. Sér. 4, 348—384 (1880) hüllen die Ebenen durch einen beliebigen Punkt  $P$  einer Fläche, deren Schnitt mit der Fläche in  $P$  einen Scheitel aufweist, im allgemeinen einen Kegel fünfter Klasse ein, für den die Tangentenebene der Fläche vierfache Ebene ist. Verf. begründet dieses Ergebnis neu und gibt Flächenklassen an, bei denen der Kegel in jedem Punkt in der gleichen Weise (durch Abspalten eines Ebenenbüschels oder mehrerer solcher Büschel) ausartet.  
G. Bol.

Vaccaro, Giuseppe: Cerchi iperosculatori ad una superficie in un punto e questioni connesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 16, 35—41 (1954).

Verf. berichtet ein Ergebnis von A. Corio, Atti Accad. Sci. Torino 87 (1952—53); die Zahl der ebenen Schnitte durch einen Punkt  $P$  einer Fläche des  $S_3$ , die einen in  $P$  fünfpunktig berührenden Kreis besitzen, ist 10, nicht 12 [vgl. G. Darboux, Bull. Sci. math., II. Sér. 4, 348—384 (1880)]. Der Nachweis erfolgt auf zwei Wegen, einerseits unter Verwendung der Anzahl der 4-punktig berührenden Geraden in den Punkten einer Geraden  $g$  auf einer algebraischen Fläche  $n$ -ter Ordnung, andererseits wird der Satz mittels stereographischer Projektion zurückgeführt auf die Tatsache, daß durch einen allgemeinen Punkt einer zweidimensionalen Fläche des  $S_4$  zehn 5-punktig berührende Ebenen gehen.  
G. Bol.

Backes, F.: Sur la courbure géodésique. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 40, 1080—1089 (1954).

Verf. leitet einige Beziehungen her zwischen den Ableitungsvektoren 1. Ordnung der Einheitsvektoren eines zweifach unendlichen Systems von orthonormalen Dreibeinen und wendet diese dann an auf die Gewinnung der Gauß-Bonnetschen Integralformel, die Bonnetsche Formel für die geodätische Krümmung sowie auf eine Frage der Spannung flüssiger Membranen.  
J. Teixeira.

Chern, Shing-Shen, Philip Hartman and Aurel Wintner: On isothermic coordinates. Commentarii math. Helvet. 28, 301—309 (1954).

If the coefficients  $g_{ik}$  in  $(1) ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2$  are of class  $C^1$  on a simply connected domain  $D$ , then we can write  $ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$  where  $\omega_i$  are Pfaffian forms each having coefficients of class  $C^1$  and, furthermore, there exists a unique Pfaffian form  $\omega_{12}$  with continuous coefficients satisfying  $d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2$ ,  $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$ . If there exists a continuous function  $K(u, v)$  such that  $\int_J \omega_{12} = - \int_B K \omega_1 \wedge \omega_2$  holds for every domain  $B$  bounded by a piecewise smooth Jordan curve  $J$  in  $D$ , then  $(1)$  is said to possess a continuous curvature  $K$  in the sense of

Weyl. The authors prove that in this case there exist mappings (2)  $u = u(U, V)$ ,  $v = v(U, V)$  of class  $C^1$  and non-vanishing jacobian, which transform (1) into the isothermic form (3)  $ds^2 = \gamma (dU^2 + dV^2)$  [ $\gamma(U, V) \neq 0$ ] and every mapping with these properties is of class  $C^2$ , so that  $\gamma$  is of class  $C^1$ . The assertion becomes false if the assumption concerning the existence of a continuous curvature is omitted. In the last part of the paper the authors give an example which answers in the negative the question whether or not a surface  $X = X(u, v)$  of class  $C^1$  always has a parametrization  $X = X(U, V)$  of class  $C^1$  in which its first fundamental form has the isothermic form (3).

L. A. Santaló.

Sansone, Giovanni: Sul problema del Bianchi dell'applicabilità sopra una superficie isoterma. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20–26 Sett. 1953, 332–338 (1954).

Es seien die Krümmungslinien einer Fläche Parameterkurven. Verf. leitet eine Bedingung dafür ab, daß das Bogenelement  $ds^2 = E(da^2 + db^2)$  wird. Aus den Gauß-Codazzischen Gleichungen werden durch Einführung einer Funktion  $\omega$  zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet, deren Integrabilitätsbedingung auf eine quadratische Gleichung für  $\omega$  führt, woraus die Bedingung für  $E$  in Form einer Determinante gewonnen wird. Die Möglichkeit, daß die quadratische Gleichung für  $\omega$  identisch verschwindet, wird nicht in Betracht gezogen. O. Volk.

Radon, Johann: Gleichgewicht und Stabilität gespannter Netze. Arch. der Math. 5, 309–316 (1954).

Ergänzung der Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 23, 164) durch Stabilitätsbetrachtungen. O. Volk.

Bagechi, Haridas: Note on systems of equi-potential  $n$ -surfaces (especially  $n$ -ellipsoids) in an  $(n+1)$ -space. Bull. Calcutta math. Soc. 46, 25–28 (1954).

Der Ort der Fokulpunkte einer  $n$ -Fläche  $F$  im  $(n+1)$ -dimensionalen Raum, erstere nach Plücker definiert, wird als zur Fläche  $F$  gehörige Fokal- $(n-1)$ -Fläche bezeichnet. Die vollständige Fokal- $(n-1)$ -Fläche besteht im allgemeinen aus  $n+1$   $(n-1)$ -Flächen. Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein System von  $n$ -Flächen in einem  $(n+1)$ -dimensionalen Raum ein System von isometrischen oder equipotentiellen  $n$ -Flächen darstellt. Definition des Systems von konfokalen  $n$ -Ellipsoiden, von dem gezeigt wird, daß es isometrisch ist.

O. Volk.

Wunderlich, Walter: Beitrag zur Kenntnis der Minimalspiralflächen. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 14, 1–15 (1954).

Lie und Darboux haben die Minimalspiralflächen erwähnt, aber erst die vorliegende Arbeit bringt eine explizite Darstellung und nähere Beschreibung dieser Flächen. — Eine Spiralfäche  $\Phi$  gestattet eine eingliedrige Gruppe von Ähnlichkeiten  $S$ , die eine bestimmte Achse  $z$  und auf ihr einen eigentlichen Punkt  $O$  festlassen. Jede Ähnlichkeit  $S$  entsteht durch Zusammensetzung einer Drehung um  $z$  durch  $\omega$  mit einer Streckung aus  $O$  auf das  $\mu$ -fache, wobei  $\mu = \exp p\omega$ . Die Bahnkurven (zylindrokonische Spiralen, im Grenzfall logarithmische Spiralen in der zu  $z$  normalen Ebene durch  $O$ ) liegen auf Drehkegeln mit der Spitze  $O$  und der Achse  $z$  und erscheinen im Normalriß in Richtung  $z$  als logarithmische Spiralen. —  $\Phi$  entstehe durch Ausübung der Ähnlichkeiten  $S$  auf eine Minimalkurve  $l$ .  $\Phi$  erweist sich dann und nur dann als Minimalsfläche, wenn  $l$  eine zylindrokonische (im Grenzfall eine logarithmische) Spirale mit  $z$ -paralleler Achse und mit dem Modul  $p$  ist. Dies liefert die Parameterdarstellung von  $\Phi$ , mit den Schiebkurven als Parameterlinien. Es folgt eine geometrisch sehr durchsichtige Begründung bekannter Formeln der Minimalflächentheorie (Darstellung als Ort der Mitten der Sehnen zwischen konjugiert komplexen Minimalkurven, sphärische Abbildung der Fläche nach Bonnet, Übergang zum geographischen Netz der Kugel und deren Mercatorbild, woden Krümmungslinien von  $\Phi$  die Achsenparallelen, den Asymptotenlinien das zugehörige Diagonal-



netz entspricht, Bonnetsche Biegungsreihe). Daraus ergibt sich eine reelle Parameterdarstellung von  $\Phi$ ; Parameterlinien sind die auf  $\Phi$  liegenden Bahnspiralen und die untereinander ähnlichen wahren Umrißkurven, die sich bei zu  $z$  normaler Sehrichtung ergeben. In anschaulichen Bildern werden einzelne Flächen der durch  $\Phi$  bestimmten Bonnetschen Biegungsreihe vorgeführt, darunter ein in Richtung  $z$  symmetrischer Typ und ein Typ mit der Symmetrieachse  $z$ . Zum Schluß werden die Krümmungs- und Asymptotenlinien von  $\Phi$  explizit angegeben. *F. Hohenberg.*

**Sauer, R.: Über Flächenklassen, bei denen sämtliche infinitesimale Verbiegungen durch Quadraturen darstellbar sind.** *Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—27 Set. 1953, 122—129 (1954).*

Die mittels der Legendreschen Transformation integrallos ermittelten Flächen  $z = z(x, y)$  sind dadurch ausgezeichnet, daß die Charakteristiken der Biegungsgleichung ein reelles bzw. imaginäres Rückungsnetz bilden: sie erfüllen bzw. die Beziehung  $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \mp 1$ . Diese Flächen, die schon vielfach untersucht sind [Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces* III. Paris 1894, p. 273; Scheffers, *Math. Z.* **5**, 112—117 (1919); Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Berlin 1923, S. 216; Strubecker, *dies. Zbl.* **51**, 126], werden durch die Sauerischen Betrachtungen in den weiteren Rahmen der projektiven Differentialgeometrie eingeordnet; die zu ihnen projektiven Flächen haben ebenso wie die Flächen selbst die Eigenschaft, daß alle infinitesimalen Verbiegungen durch Quadraturen dargestellt werden können. Die Flächen der ersten Klasse (mit negativem Krümmungsmaß) lassen sich durch die projektive Bedingung kennzeichnen, daß längs jeder Asymptotenlinie die Tangenten der Asymptotenlinien der anderen Schar eine gewisse Ebene in einer Punktschar treffen, die einen gewissen Punkt enthält: sie sind auch durch differenzengeometrische Modelle erklärt. Hinweis auf projektive Verallgemeinerung. [Ref. erlaubt sich darauf hinzuweisen, daß die direkte Einführung der Asymptotenlinien als Parameterkurven  $u, v$  ( $L = N = 0$ ) mit der Bedingung  $x = u + v, y = U' + V'$  unmittelbar auf das erhaltene  $z$  und  $z_{uv} = 0$  führt; auf diesem Wege kann man wohl wesentlich verallgemeinern.] *O. Volk.*

**Rembs, Eduard: Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen.** *Arch. der Math.* **6**, 55—58 (1954).

Verf. untersucht das Verhalten der Krümmung einer ebenen, geschlossenen und auf einer konvexen Fläche liegenden Kurve bei infinitesimalen Verbiegungen und zeigt: Die Variation  $\delta k$  der Krümmung erfüllt die drei Integralbedingungen

$$(*) \quad \oint \delta k \, ds = 0, \quad \oint x_1 \delta k \, ds = 0, \quad \oint x_2 \delta k \, ds = 0,$$

wobei  $x_1(s), x_2(s)$  die Parameterdarstellung der ebenen Randkurve in kartesischen Koordinaten ist (vgl. dazu die Arbeit des Ref., *dies. Zbl.* **51**, 125). Der Beweis wird durch Integration der Ableitung des Drehvektors bzw. Verschiebungsvektors längs der Randkurve einer infinitesimalen Verbiegung geführt. — Entsprechend dem Herglotzschen Beweis des Verschiebungssatzes folgert Verf. aus (\*) die Existenz von mindestens vier Punkten mit  $\delta k = 0$ . Anschließend beweist Verf. mittels der Gleichungen (\*) einen Satz von Efimov, wonach eine Fläche starr ist, die aus einer Eifläche durch Abschneiden endlich vieler Kalotten mit ebenen Rändern und Ersetzen der offenen Gebiete durch ebene Stücke entsteht. Zum Beweis ist die Voraussetzung nötig, daß bei einer infinitesimalen Verbiegung einer Eifläche, aus der endlich viele ebenberandete Kalotten ausgeschnitten sind, nicht auf allen Rändern die Krümmung stationär bleibt.

*Joachim Nitsche.*

**Dorfman, A. G.: Untersuchung der Möglichkeiten der Variation der Lösungen gewisser Klassen von Differentialgleichungen.** *Uspechi mat. Nauk* **9**, Nr. 4 (62), 167—174 (1954) [Russisch].

Zur Untersuchung der Verbiegbarkeit von Flächen mit isolierten Flachpunkten betrachtet Verf. Differentialgleichungen (1)  $H(f, z) = f_{xx}z_{yy} - 2f_{xy}z_{xy} + f_{yy}z_{xx} = 0$ :

(2)  $H(z, z) - H(f, f) = 0$ ; (3)  $H(z, z) - H(z, f) = 0$ . Dabei ist  $f(x, y) = 3a x^2 y + 3b x y^2 + 6c x^2 y^2$  eine gegebene Funktion, und  $z$  soll als Lösung einer der Differentialgleichungen bestimmt werden. Jede Lösung der ersten Gleichung liefert eine infinitesimale Verbiegung der durch  $(x, y, f(x, y))$  bestimmten Fläche. Hat die Funktion  $f$  in der Differentialgleichung (1), abweichend von dem gemachten Ansatz, Glieder zweiter Ordnung in  $x, y$ , so ist die Fläche verbiegbar, während eine Fläche bei  $f(x, y) = \sum a_{km} x^k y^m$  ( $k + m \geq 5$ ) in der Klasse der analytischen Flächen im allgemeinen unverbiegbar ist. — Von den Ergebnissen ist besonders hervorzuheben, daß die Differentialgleichung (1) bei dem genannten  $f$  eine von zwei Parametern abhängige analytische Lösungsschar besitzt, d. h. die zugehörige Fläche infinitesimal verbiegbar ist mit einer Willkür von zwei Parametern.

Joachim Nitsche.

Nitsche, Joachim: Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. II. Arch. der Math. 6, 13—17 (1954).

Es wird der Satz bewiesen:  $g(t, g)$  sei eine beliebige Funktion mit der Periode  $2\pi$ . Es gibt höchstens eine Biegefläche der Halbkugel, für die die Ableitung der Krümmung der Randkurve die Werte  $\mu$  besitzt.  $L, M, N$  seien die Fundamentalgrößen 2. Ordnung einer zur Halbkugel isometrischen Fläche. Schon im 1. Teil (dies. Zbl. 51, 125) dieser Arbeit war für  $U = M, V = (L - N)^2$  eine Integralrelation mit zwei noch willkürlichen Funktionen  $a, b$  aufgestellt worden. Es wird angenommen, zu demselben  $\mu$  gäbe es zwei verschiedene isometrische Flächen mit  $U_1, V_1$  und  $U_2, V_2$ . Bei Subtraktion der Formeln für die beiden Flächen erhält man ein Flächenintegral, dessen Integrand  $(U_1 - U_2) D_1 - (V_1 - V_2) D_2$  lautet, wo  $D_1, D_2$  gewisse in  $a, b$  und ihren ersten Ableitungen lineare Ausdrücke sind. Es gelingt zu zeigen, daß man Funktionen  $a, b$  bestimmen kann, so daß zugleich  $D_1, D_2$  beliebig vorgegebenen Funktionen  $t, g$  gleich werden und das Randintegral verschwindet. Dazu wird ein Satz von Johannes Nitsche angewendet. Aus der Willkür von  $f, g$  wird geschlossen, daß  $U_1 = U_2, V_1 = V_2$  und wegen der Gleichheit der Krümmungen in entsprechenden Punkten die Flächen kongruent oder symmetrisch sind. Für die Flächen wird dreimalige stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt und für die dritten Ableitungen das Bestehen einer Hölder-Bedingung.

E. Rembs.

Bompiani, E.: Deformazioni di superficie di uno spazio euclideo con linee e strisce rigide. Matematiche 9, 154—175 (1954).

Bekanntlich ist eine Verbiegung einer zweidimensionalen Fläche  $V_2$  des Euklidischen  $S_3$ , die eine Kurve festläßt, höchstens dann möglich, wenn diese eine Asymptotenlinie ist. Verf. gibt hiervon eine Begründung, die sich auf  $V_2$  des  $S_n$  verallgemeinern läßt: im  $S_4$  sind unter bestimmten Voraussetzungen die Ausnahmekurven Quasiasymptotische, also wieder projektiv invariant. Verf. spricht von einer  $r$ -Abwicklung, wenn nicht nur die Bogenlänge, sondern auch die räumlichen Krümmungen bis zur  $r - 1$ -ten einschließlich jeder Kurve der Fläche invariant sind; eine solche Abwicklung einer  $V_2$  der  $S_{r+1}$  kann im allgemeinen nur eine Kurve festlassen, wenn diese eine (gewöhnliche) Asymptotenlinie ist — die gibt es allerdings nicht auf jeder Fläche.

G. Bol.

Frey, Annemarie und Karl Strubecker: Die Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe [(11) (22)]. I. J. reine angew. Math. 193, 209—238 (1954).

Bedeutet  $x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, y = x_0 \sin t + y_0 \cos t, z = z_0 + p t$  die euklidischen Schraubungen vom Parameter  $p$  um die  $z$ -Achse, so rückt der Punkt  $x_0, y_0, z_0$  ( $t = 0$ ) in Richtung des Vektors  $dx dt|_{t=0} = y_0, dy dt|_{t=0} = -x_0, dz dt|_{t=0} = p$  fort. Die Linienkoordinaten  $p_k$  seiner Bahntangenten sind  $p_{01} = y_0, p_{23} = -p y_0, z_0 x_0, p_{02} = -x_0, p_{31} = p x_0, z_0 y_0, p_{03} = p, p_{12} = x_0 + y_0^2$ . Sie (und nur sie) genügen der Gleichung (\*)  $p_{01} p_{12} = p(p_{02} + p_{23}^2)$  der kollinearen Komplexen  $\mathfrak{K}_p$  der Segreschen Charakteristik [(11) (22)]. Der Komplex (\*) gestattet alle Schraubungen längs der Schraubenachse, ferner alle Drehungen und axialen Streckungen um diese Achse. Diese Operationen bilden zusammen die dreigliedrige Gruppe

projektiver Automorphismen

$$G_3: x'_0 = a_0 x_0, x'_1 = a_1 x_1 - a_2 x_2, x'_2 = a_2 x_1 + a_1 x_2, x'_3 = a_3 x_0 + a_0 x_3,$$

deren hyperkomplexe Darstellung durch  $x' = x a$ ,  $x = \sum_0^3 x_i e_i$ ,  $a = \sum_0^3 a_k e_k$  gegeben wird.

Dabei genügen die vier hyperkomplexen Einheiten  $e_0, e_1, e_2, e_3$  der Produkttafel II,b in der Studyschen Aufzählung hyperkomplexer Zahlensysteme.  $G_3$  ist kommutativ und daher ähnlich zur Gruppe  $T_3$  der räumlichen Translationen  $X' = X + A$ ,  $a = e^A$  oder wegen  $x = e^X = e^{\xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3}$ ,  $a = e^A = e^{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3}$  ähnlich zur Transformationsgruppe

$$x_1 = e^{\xi} \cos \eta, y = e^{\xi} \sin \eta, z = \zeta, a_1 = e^{\alpha} \cos \beta, a_2 = e^{\alpha} \sin \beta, a_3 = \gamma.$$

Damit sind transzendente Abbildungsformeln der Punkte des  $(x_1, x_2, x_3)$ -Raumes auf die Punkte des  $(\xi, \eta, \zeta)$ -Raumes gefunden, die das Gegenstück zu S. Lies logarithmischer Abbildung des allgemeinen tetraedalen Komplexes bilden. Mit der Abbildung der Punkte verknüpft ist eine Abbildung der Linienelemente, d. h. eine Transformation der Mongeschen Gleichungen der Komplexe. Aus  $(x dy - y dx) dz = p(dx^2 + dy^2)$ , ( $p \neq 0$ ), der Mongeschen Gleichung der Komplexe  $\mathfrak{K}_p$ , entsteht  $d\eta dz = p(d\xi^2 - d\eta^2)$ , als Mongesche Gleichung des Bildkomplexes. Durch die transzendente Abbildung entsprechen sich die eingliedrigen stetigen Untergruppen  $G_1$  und  $T_1$  der Automorphiengruppe  $G_3$  und der Translationsgruppe  $T_3$ . Die Diskussion dieser Zuordnung führt auf acht verschiedene Arten von Bahnkurven: (1) logarithmische Wendelspiralen, ( $\alpha \beta \gamma \neq 0$ ), (2) gemeine Schraubenlinien ( $\alpha = 0, \beta \gamma \neq 0$ ), (3) logarithmische Linien in Ebenen  $y = c$  ( $\alpha \gamma \neq 0, \beta = 0$ ), (4) logarithmische Spiralen in Ebenen  $z = c$  ( $\alpha \beta \neq 0, \gamma = 0$ ), (5) Normalen der  $z$ -Achse ( $\alpha \neq 0, \beta = \gamma = 0$ ), (6) Kreise in Ebenen  $z = c$  ( $\alpha = \gamma = 0, \beta \neq 0$ ), (7) Parallelen zur  $z$ -Achse ( $\alpha = \beta = 0, \gamma \neq 0$ ), (8) alle Punkte fest ( $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ). Zwei Linienelemente haben die gleiche Gattung, wenn für beide die Verhältnisse

$$[(x dx + y dy)/(x^2 + y^2) : (x dy - y dx)/(x^2 + y^2)] : dz$$

die gleichen Werte haben. Solche Linienelemente haben das gleiche Bildelement

$$d\xi : d\eta : dz = t(1 + t^2)^{-1} : (1 + t^2)^{-1} : p \text{ oder } d\xi = tF(t)(1 + t^2)^{-1} dt, d\eta = F(t)(1 + t^2)^{-1} dt, dz = pF(t) dt.$$

Ersetzt man die willkürliche Funktion  $F(t)$  durch  $F(t) = (1 + t^2) \Phi'''(t)$ , so ergibt sich die integrallose Darstellung der Bildkomplexkurven

$$\xi + i\eta = (t + i) \Phi''(t) - \Phi'(t) - \xi_0 - i\eta_0, z = p \{ (1 + t^2) \Phi''(t) - 2t \Phi'(t) - 2\Phi(t) \} - z_0$$

bzw. die der Urbildkomplexkurven ( $\mathfrak{K}_p$ ):

$$x + iy = (x_0 + iy_0) e^{(t + i) \Phi''(t) - \Phi'(t)} - z = p \{ (1 + t^2) \Phi''(t) - 2t \Phi'(t) - 2\Phi(t) \} - z_0.$$

Als Gegenstück der tetraedalsymmetrischen Kurven von de la Gournerie ergeben sich so die komplexsymmetrischen Kurven  $c_m$  durch die Spezialisierung  $F(t) = (1 + t^2) \Phi'''(t) = m$  in der Parameterdarstellung  $x = \Re \{ (1 + i t)^m \}$ ,  $y = \Im \{ (1 + i t)^m \}$ ,  $z = m p t$ . Die kartesische Gleichung des Kurvengrundrisses  $c'_m$  lautet  $\Re [(x + i y)^{1/m}] = 1$  und die einfachste Potentialfläche  $\pi_m$ , welche durch  $c_m$  gelegt werden kann, hat die Gleichung  $z = m p \Im [(x + i y)^{1/m}]$ , ( $i^2 z^2 / \partial x^2 + i^2 z^2 / \partial y^2 = 0$ ). Diese Potentialflächen sind Spezialfälle der Minimalflächen des isotropen Raumes [vgl. K. Strubecker, dies. Zbl. 27, 253; Math. Z. 50, 1–92 (1944)]. Die Grundrisse  $c'_m$  der komplexsymmetrischen Kurven sind Sinusspiralen vom Index  $(-m)$ ;  $c_m$  und  $c_{-m}$  haben inverse Grundrisse.  $c'_{m-1}$  ist Fußpunktkurve von  $c_m$ ,  $c'_{m+1}$  ist negative Fußpunktkurve von  $c_m$ . Jede Fallinie der Potentialfläche  $\pi_m$  vom Grundriß  $\Re [(x + i y)^{1/m}] = \hat{p}/p = \text{const}$  ist Komplexkurve und genügt der Mongeschen Gleichung  $(x dy - y dx) dz = p(dx^2 + dy^2)$ . Weiterhin werden die rational komplexsymmetrischen Kurven  $m = p/q$  ( $p, q = 0$  und ganz,  $(p, q) = 1$ ) diskutiert und ihre Ordnung bestimmt. Nach Bestimmung der allgemeinen Eigenschaften der in Rede stehenden Komplexkurven (in nicht weniger als 11 Sätzen!) behandeln die Verf. die einfachsten Beispiele komplexsymmetrischer Kurven:  $m = 0$ , (die genormten Punkte  $c_0$  des Raumes),  $m = 1$  (Komplexstrahlen  $c_1$ ),  $m = 2$  (ebene Komplexparabeln zweiter Ordnung  $c_2$ ),  $m = 3$  (kubische Komplexparabeln  $c_3$  dritter Ordnung),  $m = 4$  (Komplexparabeln vierter Ordnung  $c_4$  und fünfter Klasse),  $m = -1$  (Komplexkurven  $c_{-1}$  dritter Ordnung und Klasse),  $m = -2$  (Komplexkurven  $c_{-2}$  fünfter Ordnung, vierter Klasse),  $m = -3$  (Komplexkurven  $c_{-3}$  siebenter Ordnung, fünfter Klasse),  $m = -4$  (Komplexkurve  $c_{-4}$  neunter Ordnung, sechster Klasse). Sodann untersuchen die Verf. die interessanten komplexsymmetrischen Kurven  $c_m$  mit halben Indizes  $m = (2\mu + 1)/2$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) und beschreiben als einfachste Fälle  $m = 1/2$  (Komplexkurven  $c_{1/2}$  der Ordnung 4 und Klasse 6),  $m = -1/2$  (Komplexkurven  $c_{-1/2}$  der Ordnung 8 und Klasse 16),  $m = 3/2$  (Komplexkurven  $c_{3/2}$  der Ordnung 6 und Klasse 4),  $m = -3/2$  (Komplexkurven  $c_{-3/2}$  der Ordnung 16 und Klasse 14). Für den zweiten Teil der ganzen Untersuchung wird eine Behandlung der nichtprojektiven Automorphismen der Komplexe [(11) (22)] und Potentialflächen  $z = m \Im [(x + i y)^{1/m}]$ , der kubischen Nullsysteme der euklidischen Schraubungen, der Asymptotenlinien der Potentialflächen  $z$  und der allgemeinen Komplexflächen angekündigt.

M. Pöhl.



## Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Süss, Wilhelm: Über affine und Minkowskische Geometrie. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 55—63 (1954).

Let  $x = x(u^1, u^2)$  be a surface in  $E_3$  and let  $x_1, x_2$  denote partial derivatives. If we write  $p = x_1 + x_2$  and consider the variational problem  $\delta \int f(p) du^1 du^2 = 0$  ( $f$  positive and homogeneous of the 1. degree) the corresponding indicatrix and figuratrix are  $E = p f(p)$ ,  $e = f_1(p)$  and with respect to  $e$  as gauge surface the extremal surfaces are relative minimal. An extremal surface  $x$  and the surface  $X$  such that  $X_i = x_i \wedge e$  are related by certain involutory relations and are called adjoint surfaces. The question if an analogous adjunction is also possible for the more general problem  $\delta \int f(x, p) du^1 du^2 = 0$  is considered and discussed. The case of adjoint variational problems on the plane (problems for which the role of figuratrix and indicatrix in corresponding points are interchanged) is treated in detail and some particular cases and applications are given. The author finds, for instance, the adjoint of the variational problem  $\delta \int f(x, r) dt = 0$  ( $f$  positive and homogeneous of the 1. degree with respect to  $r$ ) and deduces some consequences. L. A. Santaló.

Vaona, Guido: Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve omografiche od affini. Boll. Un. mat. Ital., III, Ser. 9, 250—264 (1954).

Sia  $T$  una trasformazione puntuale fra due piani e siano  $C, C'$  due curve corrispondenti in  $T$ . Se esiste un'omografia fra i due piani nella quale le curve  $C, C'$  si corrispondono e che subordina fra le due curve la stessa corrispondenza subordinata da  $T$ , si dice che le due curve  $C, C'$  sono omografiche (in particolare, se l'omografia è un'affinità, che le due curve sono affini). L'A. dimostra dapprima che: se una trasformazione fra due piani possiede  $\infty^3$  coppie di curve corrispondenti omografiche (affini) con  $h = 3$ , essa è un'omografia (un'affinità). Dimostra successivamente che le trasformazioni fra due piani  $\pi, \pi'$  che posseggono  $\infty^3$  coppie di curve corrispondenti affini sono tutte e sole quelle che si ottengono con la seguente costruzione: In uno spazio  $S_3$  (contenente  $\pi, \pi'$ ) si fissino una superficie  $F$  e due punti all'infinito  $P_\infty, P'_\infty$  non appartenenti a  $\pi, \pi'$  rispettivamente. Si associno coppie di punti di  $\pi, \pi'$  che sono le proiezioni da  $P_\infty, P'_\infty$  di uno stesso punto di  $F$  (Le  $\infty^3$  coppie di curve affini sono manifestamente quelle che si ottengono proiettando le  $\infty^3$  sezioni piane di  $F$ ). Se  $F$  è sviluppabile oppure se è rigata con retta direttrice la  $P_\infty, P'_\infty$  la trasformazione puntuale che si ottiene è di seconda specie (cioè in un punto generico due delle tre rette caratteristiche coincidono). Se  $F$  è un cilindro col vertice appartenente alla retta  $P_\infty, P'_\infty$  la trasformazione puntuale è di terza specie (cioè in un punto generico le tre direzioni caratteristiche coincidono). M. Villa.

Mastrogiacomo, Pasquale: Trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche di terza specie particolari. Rend. Mat. e Appl., V, Ser. 12, 285—298 (1954).

È noto (Villa, questo Zbl. 27, 129) che una trasformazione puntuale  $T$  fra due spazi proiettivi  $S_3, S_3$  non è, in generale, approssimabile sino all'intorno del 2° ordine di una coppia regolare  $O, O'$  di punti corrispondenti, mediante una trasformazione quadratica. Scegliendo opportunamente i riferimenti proiettivi, le equazioni di  $T$  nell'intorno di  $O, O'$  sono  $x_i = x'_i + q_i(x_1, x_2, x_3) + [3]$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le  $q_i$  essendo forme quadratiche in  $x_1, x_2, x_3$  e indicando con  $[3]$  l'insieme dei termini di grado  $\geq 2$ . Le rette caratteristiche di  $T$  sono le rette base del sistema  $\Sigma \infty^2$  di coni cubici

$$\lambda_1(x_2 \varphi_3 - x_3 \varphi_2) + \lambda_2(x_3 \varphi_1 - x_1 \varphi_3) + \lambda_3(x_1 \varphi_2 - x_2 \varphi_1) = 0.$$

È noto (Cossu, questo Zbl. 44, 363) che se  $\Sigma$  ha una retta base doppia e tre rette base semplici in posizione generica,  $T$  è osculabile con  $\infty^3$  trasformazioni quadratiche

di 3<sup>a</sup> specie generali (Le trasformazioni quadratiche di 3<sup>a</sup> specie sono quelle che si ottengono riferendo proiettivamente ai piani di  $S_3$  le quadriche di  $S_3$  passanti per tre punti  $P_1, P_2, P_3$  e tangenti in altro punto generico  $P$  ed un piano fisso. Da particolari relazioni di avvicinamento fra  $P_1, P_2, P_3$  e  $P$  si hanno i cinque tipi particolari di trasformazioni quadratiche di 3<sup>a</sup> specie). L'A. determina le condizioni di avvicinamento fra la retta base doppia e le tre rette base semplici di  $\Sigma$ , necessarie e sufficienti affinché la  $T$  sia osculabile con trasformazioni quadratiche di 3<sup>a</sup> specie di ciascuno dei cinque tipi particolari. In ciascuno dei cinque casi sono determinate le equazioni delle  $\infty^3$  trasformazioni quadratiche osculatrici e si considerano riferimenti proiettivi intrinseci.

*M. Villa.*

**Godeaux, Lucien:** *Quadriques et coniques de Moutard.* Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 152—161 (1954).

Untersuchung der Moutardschen Quadriken und Koniken unter Anwendung der Cremona-Transformation.

*O. Volk.*

**Blaschke, Wilhelm:** Sulla geometria proiettivo differenziale delle superficie  $V_2$  nello spazio  $P_4$ . Rend. Circ. mat. Palermo **3**, 193—197 (1954).

Given in a projective 4-dimensional space  $P_4$  a surface with a conjugate net, the section of its tangent planes with a 3-dimensional space  $P_3$  is a congruence of lines. The condition is derived that the asymptotic tangents of the focal surfaces of the congruence at corresponding points (on a line of the congruence) do correspond. This condition defines a  $W$ -congruence when satisfied for all pairs of corresponding points. The question is raised of finding the surfaces admitting the maximum numbers of spaces  $P_3$  determining  $W$ -congruences. Integral invariants and a Weyl connection for the surface are also indicated.

*E. Bompiani.*

**Godeaux, Lucien:** Alcune osservazioni sulle congruenze  $W$ . Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **13**, 39—46 (1954).

Bericht über ältere Ergebnisse des Verf. zur geradengeometrischen Behandlung der  $W$ -Kongruenzen, bei denen die Godeauxkette einer Brennfläche abbricht. Man vgl. Ref., Projektive Geometrie, II., Göttingen 1954, § 128.

*G. Bol.*

**Rozet, O. et N. Legrain-Pissard:** Sur les congruences  $W$  dont une des nappes focales est une surface ayant ses asymptotes des deux familles dans des complexes linéaires. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **23**, 280—296 (1954).

Les AA. étudient les congruences  $W$  dont une nappe focale a ses asymptotiques  $u, v$  appartenant à des complexes linéaires, surfaces déterminées par M. Terracini (Fubini-Čech, Geometria proiettiva-differenziale, Bologna 1927, tome II, appendice 4). Les réglées asymptotiques (lieux des tangentes à une courbe  $v$  aux points d'une courbe  $u$  et vice-versa) de la seconde nappe focale appartiennent en général à des complexes linéaires. Etude détaillée des différents cas qui peuvent se présenter.

*L. Godeaux.*

**Vincensini, Paul:** Sur l'application d'une représentation hyperspatiale de l'espace réglé à l'étude de certaines questions de géométrie différentielle. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **40**, 1090—1105 (1954).

L'A., utilisant une construction géométrique de la transformation de Lie (ce Zbl. **56**, 150) étudie des questions de géométrie réglée projective en les ramenant à des questions de géométrie métrique. Il considère les surfaces de Wilczynski (contenant un réseau conjugué dont les deux familles de courbes appartiennent chacune à un complexe linéaire) et montre qu'une transformation de Lie (sphères en droites) les ramène à des surfaces dont les différents couples de centres de courbure associés sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points où les rayons qui les portent coupent deux plans fixes. Les surfaces dont les courbures totale et moyenne sont liées par une relation linéaire à coefficients constants rentrent également dans la famille des transformées des surfaces de Wilczynski. Nombreuses propriétés.

*L. Godeaux.*

**Gejdel'man, R. M.:** Die Stratifizierung  $k$ -parametriger Familien von  $(k-1)$ -dimensionalen Ebenen. Mat. Sbornik, n. Ser. **34** (76), 499–524 (1954) [Russisch].

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung des Stratifizierungsproblems eines Paares von zwei Strahlenkongruenzen im projektiven dreidimensionalen Raume  $P_3$ , das zuerst von G. Fubini [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **1**, 241–257 (1924)] und L. Bianchi [Rend. Accad. Lincei, V. Ser. **33**, fasc. 10, 369–377 (1924)] gestellt und neuerdings vor allem von russischen Geometern untersucht wurde im Falle  $k$ -parametriger Familien von  $(k-1)$ -dimensionalen Ebenen im  $n$ -dimensionalen Raume ( $n \geq 2k-1$ ). Der Ausgangspunkt ist die Betrachtung einer einseitigen Stratifizierung, denn die nicht-triviale zweiseitige Stratifizierung kann sich realisieren nur wenn  $n = 2k-1$ , und für  $k=2$  wird die geometrische Struktur des stratifizierten Paares nur durch die einseitige Stratifizierung bestimmt. Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird hauptsächlich die einseitige Stratifizierung zweiparametriger Strahlenfamilien im mehrdimensionalen projektiven Raume behandelt, und die folgenden geometrischen Ergebnisse werden erhalten: (1) Wenn eine zweiparametrische Familie von Strahlen  $(A_1A_2)$  irgendeine Familie  $(A_3A_4)$  stratifiziert, dann ist die Familie  $(A_1A_2)$  eine Kongruenz, d. h. dieselbe muß in einem drei-dimensionalen Unterraum liegen. (Bei der zweiseitigen Stratifizierung müssen deswegen die zwei Strahlenfamilien des Paares in einen dreidimensionalen Raum eingebettet sein.) (2) Wenn die Strahlenkongruenz  $(A_1A_2)$  die andere  $(A_3A_4)$  stratifiziert, dann entsprechen ihre abwickelbaren Flächen einander, die Brennpunkte der stratifizierten Kongruenz  $(A_3A_4)$  liegen auf den Brennebenen der stratifizierenden Kongruenz  $(A_1A_2)$ , und die stratifizierenden Flächen haben die zusammenhängenden Netze, die den abwickelbaren Flächen beider Kongruenzen entsprechen. (3) Wenn eine parabolische Kongruenz  $(A_1A_2)$  eine Kongruenz  $(A_3A_4)$  stratifiziert, dann ist die letztere  $(A_3A_4)$  auch parabolisch in der Weise, daß deren Brennpunkte auf den entsprechenden Brennebenen der stratifizierenden Kongruenz liegen und die abwickelbaren Flächen der beiden Kongruenzen einander entsprechen. In diesem Falle tragen alle stratifizierenden Flächen die Familien von asymptotischen Linien, in denen die abwickelbaren Flächen der Kongruenz  $(A_1A_2)$  die stratifizierenden Flächen schneiden. (4) Eine beliebige Kongruenz  $(A_3A_4)$  kann durch einen geeigneten dreidimensionalen Kegel stratifiziert werden. Im zweiten Teil behandelt der Verf. die Stratifizierung  $k$ -parametriger Familien von  $(k-1)$ -dimensionalen Ebenen, die das Hauptziel ist, und findet viele geometrische Ergebnisse in dieser Richtung, z. B. die folgenden: (1) Wenn eine Familie  $(L_1)$  irgendeine Familie  $(L_2)$  stratifiziert, dann ist  $(L_1)$  eine Brennfamilie. Dabei verstehen wir unter einer Brennfamilie eine solche Familie, die mindestens eine solche einparametrische Unterfamilie hat, daß ihre unendlich benachbarten Ebenen mindestens einen gemeinsamen Punkt haben (in diesem Falle nennt man die Unterfamilie eine Brennunterfamilie und den gemeinsamen Punkt einen Brennpunkt). (2) Zwei  $k$ -parametrische Familien von  $(k-1)$ -dimensionalen Ebenen seien bezogen aufeinander vermöge einer zweiseitigen Stratifizierung, dann liegen die beiden Familien in einem  $(2k-1)$ -dimensionalen Unterraum. Und so weit die analogen Sätze zum ersten Teil. Die in dieser Arbeit benützte Methode ist ähnlich der von anderen russischen Geometern gebrauchten Cartanschen Methode des bewegten Bezugssystems  $(A_1A_2 \dots A_{n-1})$  und der äußeren Differentialformen.

A. Kawaguchi.

**Blaschke, Wilhelm:** Eine Abzählung in der Geometrie der Waben. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **19**, 28–33 (1954).

Durch eine Abzählung der topologischen und projektiven Invarianten wird plausibel gemacht, daß sich in einem beliebigen 3-Gewebe der Ebene die Umgebung achter Ordnung eines Punktes durch topologische Abbildung geradlinig machen läßt, während dazu in neunter Ordnung Bedingungen notwendig sind. G. Bol.



## Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

**Prvanovitch, Mileva:** Hyperlignes de Darboux appartenant à l'espace riemannien. Bull. Sci. math., II. Sér. **78**, 89—97 (1954).

Let  $V_n$  be an  $n$ -dimensional riemannian space and  $V_m$  an  $m$ -dimensional variety in it. Let  $C$  be a given congruence of curves in  $V_n$ . At each point  $P$  of a curve  $K$  contained in  $V_m$  we consider the tangent vector  $t$  and the normal vector  $r = R_1 N_1$  ( $dR_1/ds$ )  $R_2 N_2$  where  $N_1, N_2$  are respectively the first and second principal normal vectors of  $K$  and  $R_1, R_2$  the corresponding radii of curvature. The curves of  $V_m$  such that at each point  $P$  the geodesic surface determined by  $t$  and  $r$  contains the tangent vector to the corresponding curve of  $C$  are called by the author the hyperlines of Darboux of  $V_m$  with respect to  $C$ . The differential equations and some properties of that lines are given. L. A. Santaló.

**Prvanovitch, Mileva:** On Darboux lines in a sub-space of a Euclidean space. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A. **19**, 13—18 (1954).

Let  $V_n$  be a riemannian variety immersed in the euclidean space  $E_m$ . A curve of  $V_n$  is said to be a Darboux line if its osculating hyperspheres at each point are tangent to  $V_n$ . Following Semin, who considered the case  $n = 2, m = 3$  (this Zbl. **48**, 387) the author obtains the differential equation of the Darboux lines in terms of the coefficients of the two fundamental forms of  $V_n$  and their partial derivatives. The case  $n = m - 1$  is considered in detail. L. A. Santaló.

**Singal, M. K. and Ram Behari:** On the totally geodesic subspaces imbedded in a Riemannian space. Math. Student **22**, 37—41 (1954).

The authors try to prove the following theorem: If a riemannian space  $V_m$  admits a totally geodesic sub-space  $V_n$ , then the normals to  $V_n$  at a point are the Ricci principal directions for  $V_m$ . As the authors themselves have noted the proof based on the erroneous relation (2, 3) p. 37 is not valid. L. A. Santaló.

**Upadhyay, M. G.:** Congruences of curves in a Riemannian space. II. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **19**, 19—22 (1954).

Der Autor betrachtet ein System von  $m - n$  Kurvenkongruenzen durch die Punkte eines Teilraumes  $V_n$  einer Riemannschen  $V_m$  ( $m > n$ ), so daß durch jeden Punkt von  $V_n$  genau eine Kurve jeder Kongruenz geht. Im Anschluß an Teil I (1952) wird bewiesen: 1. Jede Kurve der Kongruenz berührt in allen ihren Brennpunkten die Fokallflächen. 2. Jede Hyperfläche der Kongruenz berührt die Fokallfläche in den Brennpunkten aller ihrer Kurven. K. Strubecker.

**Otsuki, Tominosuke:** A construction of closed surfaces of negative curvature in  $E^4$ . Math. J. Okayama Univ. **3**, 95—108 (1954).

By direct construction the author gives an example of closed surfaces everywhere with negative curvature and of genus 7 contained in the euclidean space of dimension 4. The following question, posed by the author, remains open: can a compact 2-dimensional  $V_2$  everywhere with non positive curvature be always isometrically imbedded in an euclidean space of dimension 4? L. A. Santaló.

**Kručković, G. I.:** Zu der Arbeit „Klassifikation der dreidimensionalen Riemannschen Räume nach den Bewegungsgruppen“. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 285 (1954) [Russisch].

In dem gleichbenannten Artikel (dies. Zbl. **55**, 402) war Fall III der Struktur der Gruppe  $G_4$  (Seite 10) unzureichend erörtert worden. Das von J. P. Jegorow bemerkte Versehen wird hier verbessert. K. Strubecker.

**Vranceanu, G.:** Sur les espaces  $V_4$  ayant comme groupe de stabilité un  $G_4$ . Publ. math., Debrecen **3**, 23—32 (1954).

Egoroff (this Zbl. **38**, 346) proved that 1) any Riemannian space  $V_n$  which is not Einstein can not have the group of motion whose parameters are more than  $N_1 = n(n-1)/2 + 1$  and there are spaces which attain this maximum. Egoroff

proved also that any Einstein space  $E_1(n-3)$  which is not of constant curvature can not have the group of motions whose parameters are more than  $n(n-1)/2 + 2$ . The author [Acad. Republ. popul. Române, Studii Cerc. mat. 2, 57 (1951)] proved that the latter maximum can be reduced to  $N_2 = (n-1)(n-2)/2 + 5$ . For  $n=5$ ,  $N_1 = N_2$ , for  $n=5$   $N_1 = N_2$ . However, for  $n=4$   $N_1 = 7 > N_2 = 8$ . The author (loc. cit.) gave an example of Einstein  $E_4$  whose group of motions is 8-parametric. It is a symmetric space in the sense of E. Cartan. In this paper the author proved that if  $V_4$  admits a transitive group  $G_4$  of motions, then it is a symmetric space. To obtain this he first considers  $ds^2$  of  $V_4$  whose group of stability (the subgroup of the group of motions which fixes a point of  $V_4$ ) is 4-parametric obtaining a canonical form of  $ds^2$  (the term in formula (11) should be omitted.) S. Sasaki.

**Tomonaga, Yasuro:** Note on Betti numbers of Riemannian manifolds. III. J. math. Soc. Japan 6, 37–39 (1954).

L'A. complète certains de ses résultats antérieurs [J. math. Soc. Japan 5, 59–64, 65–69 (1953)] concernant les vecteurs de Killing et les formes harmoniques des variétés riemanniennes compactes orientables, dans la voie des travaux de Bochner et du rapporteur. En ce qui concerne les vecteurs de Killing, il introduit une forme quadratique définie positive de coefficients  $A_{ij}$  et suppose que la forme quadratique de coefficients  $\frac{1}{2} I A_{ij} = A_{ik} B_j^k$  est soit définie, soit semi-définie négative. Dans le premier cas, la variété n'admet pas de vecteur de Killing, dans le second ceux-ci sont à dérivée covariante nulle. Le cas où  $A_{ij} = \varrho^2 g_{ij}$  est spécialement étudié, en particulier pour  $\varrho^2 = 1 + c^2 R^2$  ( $c = \text{const.}$ ) Des résultats symétriques sont donnés en ce qui concerne les formes harmoniques.

A. Lichnerowicz.

**Fuller, F. B.:** Harmonic mappings. Proc. nat. Acad. Sci. USA 40, 987–991 (1954).

For mappings of class two from a compact analytic Riemann manifold  $M^p$  into another  $N^q$ , energy can be defined. Mappings which minimize the total energy are called harmonic. They satisfy the Euler-Lagrange equation

$$\Delta y^i + \Gamma_{jk}^i (\text{grad } y^j, \text{grad } y^k) = 0.$$

In some special cases one can prove the existence of harmonic mappings in a given homotopy class. For instance if  $M^p$  is the circle with arc-metric, the harmonic mappings are geodesics. The Hopf mapping of the 3-sphere onto the 2-sphere is harmonic. Harmonic mappings into a torus can be completely studied.

H. Freudenthal.

**Hermann, Robert:** Sur les isométries infinitésimales et le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1178–1180 (1954).

L'A. énonce quelques résultats apparentés (a) au théorème de Yano disant que sur une variété riemannienne compacte, un groupe à un paramètre d'automorphismes de la connexion de Levi-Civita est un groupe d'isométries (Yano-Bochner, this Zbl. 51, 394, p. 58), (b) à une généralisation de la décomposition de Hodge des formes harmoniques sur une variété kählérienne compacte due à Chern, s'appliquant à une connexion sans torsion de groupe structural contenu dans le groupe orthogonal (à paraître). Son point de départ est une formule locale, concernant la dérivée de Lie de la  $q$ -ième dérivée covariante du tenseur de courbure d'une connexion, prise relativement à un champ de vecteurs engendrant un groupe d'automorphismes de la connexion.

L. Borel.

**Yano, Kentaro:** Geometria conforme in varietà quasi hermitiana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII, Ser. 15, 449–454 (1954).

Let  $V_{2n}$  be a  $2n$ -dimensional variety with the riemannian metric  $ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k$ . If there exists a field of antisymmetric tensors  $q_{jk}$  such that  $g^{bc} q_{ab} q_{lc} = g_{jk}$  then  $V_{2n}$  is said to be quasi-hermitian. If we define the tensors

$$t_{jk}^i = (\varphi_{a,j}^i - \varphi_{j,a}^i) \varphi_k^a - (\varphi_{a,k}^i - \varphi_{k,a}^i) \varphi_j^a, \quad \varphi_{ijk} = \varphi_{ij,k} + \varphi_{jk,i} + \varphi_{ki,j}$$

then the quasi-hermitian variety  $V_{2n}$  is called pseudo-hermitian if  $t_{jk}^i = 0$ , quasi-kählerian if  $\varphi_{ijk} = 0$  and pseudo-kählerian if  $t_{jk}^i = 0$ ,  $\varphi_{ijk} = 0$ . Let us put

$\varphi_i = \varphi_{ijk} \varphi^{jk}$ ,  $C_{ijk} = \varphi_{ijk} - [1/2(n-1)](\varphi_{ji} \varphi_k + \varphi_{jk} \varphi_i + \varphi_{ki} \varphi_j)$ ,  $C_{jk} = \varphi_{j, \kappa} - \varphi_{k, j}$ . The author proves the following theorems: 1. The necessary and sufficient condition that a quasi-hermitian variety be conform to a quasi-kählerian variety are  $C_{ijk} = 0$  for  $2n > 4$  and  $C_{kl} = 0$  for  $2n = 4$ ; 2. The necessary and sufficient conditions for a pseudo-hermitian variety be conform to a pseudo-kählerian variety are that  $C_{ijk} = 0$  for  $2n > 4$  and  $C_{kl} = 0$  for  $2n = 4$ . L. A. Santaló.

**Yano, Kentaro:** Sur la correspondance projective entre deux espaces pseudo-hermitiens. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1346—1348 (1954).

Dans les espaces pseudo-hermitiens il existe plusieurs connexions métriques avec torsion; le problème de la correspondance projective entre eux dépend du choix de ces connexions (résumé de l'A.). H. Guggenheimer.

**Lichnerowicz, André:** Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kählériennes. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 1344—1346 (1954).

En utilisant des méthodes développées antérieurement par lui [see Zbl. **51**, 131; Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. **52**, 171—184 (1953)], l'A. prouve les théorèmes suivants: Si  $V_{2n}$  est une variété kählérienne avec  $\|R_{ik}\| = 0$ , le plus grand groupe connexe d'isométries de  $V_{2n}$  préserve sa structure analytique. — Sur une variété complexe à métrique Einsteinienne ( $R \neq 0$ ) de dimension  $2n$ , l'équation  $\Delta q = \lambda q$  n'admet pas de valeur propre  $\lambda < R/n$  ( $q$  scalaire); il existe un isomorphisme entre l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de la variété et une algèbre définie sur l'espace des solutions de l'équation  $\Delta q = (R/n)q$ . L'isomorphisme est donné par  $-1/dq \cdot \tau$  ( $q$  scalaire,  $\tau$  vecteur de Killing), l'algèbre sur les fonctions  $q$  est donnée par  $[q, \psi] = F^{ij} \partial_i q \partial_j \psi$ ,  $F_{ik}$  étant la forme alternée associée à la métrique. H. Guggenheimer.

**Moór, Arthur:** Ergänzung zu meiner Arbeit: „Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen“. Acta math. **91**, 187—188 (1954).

In dem Referat zu der genannten Arbeit (dies. Zbl. **51**, 130) hat der Ref. bemerkt, daß sich die Ergebnisse des Verf. auf Riemannsche Räume beziehen, da er Finslersche Räume mit verschwindendem Torsionsvektor  $A'$  betrachtet (Deicke, Arch. der Math. **4**, 45—51 (1953)). In seiner Ergänzung verweist Verf. auf die Tatsache, daß es sogenannte Finslersche Räume mit nicht-positiv definierter Metrik gibt, für welche die Relation  $A' = 0$  nicht bedeutet, daß es sich um Riemannsche Räume handelt. Er läßt deshalb die Bedingung einer positiv definiten Metrik fallen, und seine Ergebnisse beschränken sich somit auf Teilgebiete solcher Räume, in denen die Grundfunktion positiv ist. H. Rund.

**Barthel, Woldemar:** Über Minkowskische und Finslersche Geometrie. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 71—76 (1954).

The present paper is mainly devoted to a resumé of the author's earlier papers [Arch. der Math. **4**, 346—354, 355—365 (1953)]. In the final section the author uses the theory of hypersurface strips rather than hypersurface curves to discuss the geometry of a hypersurface  $\Sigma$  of a Finsler space  $F_n$ . The normal curvature of the strip is defined such as to lead to a quadratic second fundamental form from which  $(n-1)$  principal directions of curvature may be derived. It is stated how these may be interpreted in terms of the spherical image of the unit normal to  $\Sigma$ . According to the author this new method is more suitable for the investigation of curvature properties of  $\Sigma$  rather than the usual method of studying curves on  $\Sigma$ . H. Rund.

**Barthel, Woldemar:** Über die Minimalflächen in gefaserten Finslerräumen. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **36**, 159—190 (1954).

Unter einem „gefaserten“ Finslerschen Raum versteht Verf. einen Raum von orientierten Linienelementen mit Finslerscher Metrik und ausgezeichnetem



Stützelement (im Sinne Cartans). Es wird betont, daß, obwohl in der Cartanschen Theorie die geodätischen Linien gleichzeitig die Autoparallellkurven sind, die „Hyper-ebenen“ jedoch nicht mehr Minimalflächen sind (dabei bedeutet Hyper-ebene eine Hyperfläche, deren zweite Fundamentalform verschwindet, während in der üblichen Oberflächenfunktion der Normalenvektor zur Hyperfläche als Stützelement auftritt). Verf. führt deshalb eine neue Vektorübertragung ein, die sich von der Cartanschen dadurch unterscheidet, daß anstatt der Symmetrie der Übertragungskoeffizienten  $I_{ikh}^*$  in  $i$  und  $h$  nun (\*)  $I_{ikh}^* - I_{hki}^* = l_i A_{kh} - l_h A_{ki}$  gesetzt wird, wobei  $A_k$  der Torsionsvektor und  $l_i$  der Einheitsvektor in der Richtung des Stützelementes ist. Die explizite Form der  $I_{ikh}^*$  wird wegen ihrer Kompliziertheit nicht berechnet. Es wird aber gezeigt, daß die geodätischen Linien wieder Autoparallellkurven sind. Die Hyperflächentheorie wird wie bei Węgner (dies. Zbl. 14, 367) und Berwald (dies. Zbl. 22, 55) nochmals eingehend behandelt. Das Postulat (\*) macht sich erst bei der Berechnung der ersten Variation der Oberfläche bemerkbar, denn es bewirkt, daß diese verschwindet, falls die zweite Fundamentalform der Hyperfläche verschwindet. Insofern sind die Hyper-ebenen Minimalflächen. Jedoch sind die Minimalflächen nicht allgemein durch das Verschwinden der mittleren Krümmung gekennzeichnet. Schließlich wird die zweite Oberflächenvariation von Minimalhyperflächen berechnet.

H. Rund.

Ohkubo, Takeo: On relations among various connections in Finslerian space. Kumamoto J. Sci., Ser. A 1, Nr. 3, 1—6 (1954).

Verf. stellt Vergleiche an zwischen den von Berwald, Cartan und dem Ref. eingeführten kovarianten Ableitungen in Finslerschen Räumen. Es werden einige Zusammenhänge zwischen verschiedenen metrischen, sonst willkürlichen Übertragungskoeffizienten untersucht (eine metrische Übertragung ist eine solche, für welche die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet). Verf. leitet eine neue Übertragung ab, indem er der Parallelverschiebung gewisse Bedingungen auferlegt, welche den vom Ref. eingeführten Bedingungen (dies. Zbl. 42, 404) recht ähnlich sind. Die entsprechenden Übertragungskoeffizienten werden nicht explizit berechnet, da sie unbestimmte Glieder enthalten, die jedoch gewissen Bedingungen genügen müssen. Die Ableitung jener Gleichungen erscheinen dem Ref. etwas zweifelhaft, da an einer Stelle [(3), (18)] in einer nicht ganz gerechtfertigten Weise vom Quotientensatz Gebrauch gemacht wird.

H. Rund.

Barthel, Woldemar: Über das Verhältnis der Vektorübertragung zu den Variationsproblemen in Cartanschen Räumen. Rend. Circ. mat. Palermo 3, 270—281 (1954).

Mit Hilfe der Fundamentalfunktion eines Cartanschen Raumes (E. Cartan, dies. Zbl. 8, 271) wird das Oberflächenmaß von Hyperflächen sowohl als auch das Längenmaß und die kovariante Ableitung von Vektoren definiert. Verf. verweist auf die Tatsache, daß die Autoparallellkurven im allgemeinen nicht mit den Extremalkurven identisch sind (vgl. Alardin, dies. Zbl. 34, 101). Es wird die Differentialgleichung für Minimalhyperflächen abgeleitet, und es zeigt sich, daß die Ebenen (d. h. Hyperflächen mit verschwindender 2. Fundamentalform) keine Extremaleigenschaften besitzen. Schließlich werden notwendige Bedingungen angegeben, welchen die Übertragungskoeffizienten einer neuen Übertragung genügen müssen, damit die Autoparallellkurven und die Ebenen die gewünschten Extremaleigenschaften besitzen. Die explizite Form jener Koeffizienten wird jedoch nicht berechnet. Die von Alardin (loc. cit.) angegebene Vektorübertragung befriedigt diese Bedingungen.

H. Rund.

Takano, Kazuo: Contact transformations and generalized metric spaces. Tensor, n. Ser. 4, 51—66 (1954).

Nach einer Einleitung, in der die Begriffe erstes und zweites „contact frame“, die auf Eisenhart und Knebelman (dies. Zbl. 15, 417) bzw. auf Muto (dies. Zbl. 19, 86) zurückgehen, wird gezeigt, wie sich die von Eisenhart aufgedeckten Beziehungen zwischen Berührungstransformationen und Cartan-Räumen zurückführen lassen auf die Beziehungen zwischen Berührungstransformationen und Finsler-Räumen, die von Muto und Yano (dies. Zbl. 21, 65) herrühren. Im letzten Abschnitt erfolgt dann ein Vergleich mit den Resultaten von Doyle (dies. Zbl. 25, 218) und Davies (dies. Zbl. 50, 163). *J. A. Schouten.*

**Tachibana, Syun-ichi:** On the imbedding of a projectively connected space in a projective space. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 5, 5—9 (1954).

Denote by  $P_N$  a projective space of dimension  $N = n + q$ . If an  $n$ -plane  $u$  and a  $q$ -plane  $v$  of  $P_N$  have in common only a point  $M$ , the triple  $S = (M, u, v)$  is called a bi-plane element. Theorem: An  $n$ -dimensional projectively connected space  $P_n$  can be imbedded locally in an  $(n^2 - n + 1)$ -dimensional projective space as an ordinary manifold of bi-plane elements. This notion of imbedding should be interpreted in the sense of O. Galvani [J. Math. pur. et appl., IX. Sér. 25, 209—239 (1946)]. Theorem: A  $P_n$  with vanishing curvature can be imbedded in a  $(2n - 1)$ -dimensional projective space as an ordinary manifold of bi-plane elements. *H. Rund.*

## Topologie:

**Geymonat, Ludovico:** La spazializzazione degli insiemi. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 13, 47—58 (1954).

Methodologische Erörterungen zur axiomatischen Einführung topologischer Raumbegriffe. *G. H. Müller.*

**Kowalsky, Hans-Joachim:** Limesräume und Komplettierung. Math. Nachr. 12, 301—340 (1954).

Die Fréchet'schen Limesräume versagen, da wesentlich auf dem Folgenbegriff beruhend, in der ihnen zugedachten Rolle, Bindeglied zwischen klassischer Grenzwerttheorie und Topologie zu sein, sobald man bei den topologischen Räumen auf Abzählbarkeitsforderungen verzichtet. Verf. gibt im ersten Teil seiner Arbeit eine Definition der Limesräume, welche die Mängel der Fréchet'schen Limesräume behebt. — Bezeichnungen:  $R$ : beliebige Grundmenge.  $R^*$ : Menge aller Filter  $\alpha$  in  $R$ , einschließlich des uneigentlichen Filters  $\emptyset$ ; bezüglich der mit  $b \subseteq a$  gleichbedeutenden Ordnungsrelation  $a \leq b$  ist  $R^*$  ein vollständiger Verband.  $\vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge$ : Zeichen für die verbandstheoretischen Operationen in  $R^*$ .  $\varphi M$ : durch  $M \subseteq R$  erzeugter Hauptfilter.  $z$ : die wie folgt definierte Abbildung von  $R^{**} = (R^*)^*$  in  $R^*$ :  $z\alpha^* = \bigwedge_{\tau \in \alpha^*} \bigvee_{\tau \in \alpha^*} \tau$ . — Definitionen. Limitierung von  $R$  heißt jede Abbildung  $T$ , die jedem  $x \in R$  ein Ideal  $Tx$  im Verband  $R^*$  so zuordnet, daß  $\varphi x \in Tx$  ist. Das Paar  $(R, T)$  heißt dann Limesraum.  $T$  heißt Hauptlimitierung, wenn  $Tx$  für alle  $x \in R$  ein Hauptideal in  $R^*$  ist.  $T$  heißt Diagonallimitierung, wenn für jede Abbildung  $\sigma: R \rightarrow R^*$  mit  $\sigma y \in Ty$  ( $y \in R$  beliebig) gilt: aus  $a \in Tx$  folgt  $z\sigma a \in Tx$  für jedes  $x \in R$ . — Hervorgehoben seien einige Sätze über den Zusammenhang zwischen Limitierung und Topologie. Als spezielle Limitierung kann jede mehrstufige Topologie angesehen werden. Eine solche ist durch eine Zuordnung  $\tau: R \rightarrow R^*$  definiert mit  $\varphi x \leq \tau x$  für jedes  $x \in R$ . Bezeichnet  $T_\tau x$  das von  $\tau x$  in  $R^*$  erzeugte Ideal, so ist  $T_\tau$  eine Hauptlimitierung. Vermöge der Zuordnung  $\tau \rightarrow T_\tau$  entsprechen einander eindeutig die mehrstufigen Topologien und die Hauptlimitierungen.  $\tau$  ist dann und nur dann einstufig, also eine klassische Topologie, wenn  $T_\tau$  eine Diagonallimitierung ist. — Der erste Teil der Arbeit enthält weiter Untersuchungen über die Verbandsstruktur aller Limitierungen von  $R$ , Bemerkungen über Limitierungen von Gruppen sowie die Einführung bekannter Trennungsaxiome für Limesräume. Beispielsweise heißt  $T$  eine  $T_1$ -Limitierung, wenn aus  $\varphi x \in Ty$  stets  $x = y$  folgt. — Der zweite Teil der Arbeit behandelt einen allgemeinen Komplettierungsprozeß für Limesräume. Bemerkenswert an diesem Prozeß ist, daß sich ihm einerseits der bekannte Komplettierungsprozeß für uniforme Räume als Spezialfall unterordnet und er andererseits ein Konstruktionsprinzip für ausgezeichnete Erweiterungen eines topologischen Raumes liefert. In der Natur der Sache liegt hierbei die Einschränkung, daß alle bei dieser Betrachtung zugelassenen Limesräume dem Axiom  $T_1$  genügen sollen. Definitionen. Eine Menge  $C^* \subseteq R^*$  heißt Ende, wenn aus  $b \leq a$ ,  $a \in C^*$ ,  $b \in R^*$  folgt  $b \in C^*$ . Das Ende  $C^*$  heißt fundiert, wenn wenigstens eine Fundament genannte Menge  $F^* \subseteq C^*$  mit folgenden Eigenschaften existiert: (1) aus  $a, b \in F^*$ ,  $a \vee b \in C^*$  folgt  $a = b$ ; (2) zu jedem  $a \in C^*$  existiert ein  $b \in F^*$  mit  $a \vee b \in C^*$ ; (3) aus

$c \in F^*$ ,  $a, c, b \in C^*$  ( $a, b \in R^*$ ), folgt  $a \cdot b \in C^*$ . Ein fundiertes Ende  $C^*$  heißt ein zu einer  $(T_1)$ -Limitierung  $T$  von  $R$  gehöriges Cauchysches Ende, wenn gilt: (4)  $Tx \subseteq C^*$  für alle  $x \in R$ ; (5) aus  $\varphi x \vee a \in C^*$  folgt  $a \in Tx$ . — Ein Limesraum  $(\tilde{R}, \tilde{T})$  heißt Erweiterung eines Limesraumes  $(R, T)$ , wenn  $R \subseteq \tilde{R}$  ist,  $\tilde{T}$  in  $R$  die Limitierung  $T$  induziert und zu jedem Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{R}$  ein Filter  $\tilde{a} \in R^*$  derart existiert, daß  $\tilde{y} = \tilde{x}$  das einzige Element  $\tilde{y} \in \tilde{R}$  mit  $\tilde{y} \in \tilde{T}\tilde{a}$  ist (hierbei wird  $\tilde{a}$  als Filterbasis in  $\tilde{R}$  gedeutet). An Sätzen seien erwähnt: Für jede Erweiterung  $(\tilde{R}, \tilde{T})$  von  $(R, T)$  ist die Vereinigungsmenge  $C^*$  aller Ideale  $\tilde{T}\tilde{x} \subseteq R^*(\tilde{x} \in \tilde{R})$  ein zu  $T$  gehöriges Cauchysches Ende. Ist umgekehrt  $C^*$  ein zu  $T$  gehöriges Cauchysches Ende, so existiert eine Erweiterung  $(\tilde{R}, \tilde{T})$ , die das Ende  $C^*$  in  $(R, T)$  induziert und auf die jede andere Erweiterung mit der gleichen Eigenschaft stetig abgebildet werden kann. Ist  $(R, T)$  speziell ein uniformer Raum, so bildet die Menge aller Cauchyschen Filter ein zu  $T$  gehöriges Cauchysches Ende  $C^*$ ; die zu  $C^*$  gehörige Erweiterung  $(\tilde{R}, \tilde{T})$  erweist sich als identisch mit der Komplettierung des uniformen Raumes im üblichen Sinne. Abschließend wird gezeigt, daß eine Reihe bekannter Erweiterungen topologischer Räume durch obigen Komplettierungsprozeß gewonnen werden können, wie etwa die Erweiterungen von H. Wallman und E. Čech, die hierbei sogar noch gewisse Verallgemeinerungen erfahren.

H. Bauer.

Tamari, D.: On a generalization of uniform structures and spaces. Bull. Res. Council of Israel 3, 417—428 (1954).

Remarques élémentaires sur la structure qu'on obtient en omettant l'axiome de symétrie dans la définition des structures uniformes (c'est-à-dire l'axiome affirmant que si  $U$  est un entourage, il en est de même de  $U^{-1}$ ). J. Dieudonné.

Kac, G. L.: Topologische Räume, in denen eine vollständige uniforme Struktur eingeführt werden kann. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 99, 897—900 (1954) [Russisch].

A completely regular space which admits a complete uniform structure is called a  $P$ -space. A completely regular space is a  $P$ -space if and only if it is complete in its universal uniform structure, i. e. the coarsest uniform structure which renders the bounded continuous functions uniformly continuous. A locally finite covering  $\{U_\alpha\}$  of a completely regular space is called an admissible covering if it contains a closed refinement  $\{V_\alpha\}$  such that  $V_\alpha$  and  $G - U_\alpha$  can be separated by a continuous function. The main result is: N. a. s. in order that a completely regular space  $G$  be a  $P$ -space is the condition that for each point  $x \in \beta G - G$  and each admissible covering  $\{U_\alpha\}$  of  $G$  there is a system of neighbourhoods  $\{V_\alpha\}$  of  $x$  with  $V_\alpha \cap U_\alpha = \emptyset$ . Here  $\beta G$  denotes the maximal compactification of  $G$ . A consequence is that any paracompact completely regular space is a  $P$ -space. Results of Dieudonné are derived and finally the separable  $P$ -spaces are characterized.

W. T. van Est.

Wille, R. J.: Sur les espaces faiblement rétractiles. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 57, 527—532 (1954).

Un espace  $R$  est appelé faiblement rétractile, si pour chaque ensemble fermé  $V$  de  $R$ , il existe un  $f: R \rightarrow V$ , tel que  $f(x) = x$  pour  $x \in V$  et  $f$  est continu aux points de  $V$  par rapport à l'espace entier. Les espaces faiblement rétractiles sont situés entre les espaces métrisables et les espaces complètement normaux. L'A. montre par des exemples que la classe des espaces faiblement rétractiles ne coïncide avec aucun des deux autres, même si l'on ajoute le postulat de dénombrabilité. Quelques exemples d'espaces normaux, mais non complètement normaux se trouvent à la fin de la note.

H. Freudenthal.

Sierpinski, W.: Sur les espaces métriques séparables contenant un nombre fini de points d'accumulation. Matematiche 9, 122—125 (1954).

L'A. prouve ce théorème: Pour chaque nombre naturel  $s$ , il existe  $s + 2$  ensembles linéaires dénombrables (1)  $E_1, E_2, \dots, E_{s+2}$  tels que: 1° chacun d'eux contient  $s$  de ses points d'accumulation; 2° chaque espace métrique séparable contenant  $s$  de ses points d'accumulation est homéomorphe à un et un seul terme de (1) [par conséquent, les ensembles dans (1) sont topologiquement distincts deux à deux]. Voici la définition de (1).  $N$  étant l'ensemble des nombres naturels, soient



$A = \{2^{-m} \mid m \in N\}$ ,  $B = \{2^{-m-n-2} + \frac{1}{4} \cdot 2^{-m-n} \mid m, n \in N\}$ . Pour  $j \in N$ , soit  $A_j = \{j\} \cup (A + j)$ ,  $B_j = \{j\} \cup (B + j)$ ; alors il suffit de poser pour  $k \in \{1, 2, \dots, s+1\}$ :  $E_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup B_k \cup B_{k+1} \cup \dots \cup B_s$ ,  $E_{s+2} = A_1 \cup E_{s+1}$ .

*G. Kurepa.*

**Shimrat, M.:** Embedding in homogeneous spaces. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 304—311 (1954).

Ein topologischer Raum  $S$  heißt homogen, wenn zu je zwei Punkten  $a, b \in S$  ein Homöomorphismus von  $S$  auf sich existiert, der  $a$  in  $b$  überführt. Über die bekannte Tatsache hinaus, daß jeder reguläre Raum in einen homogenen Raum eingebettet werden kann, beweist Verf., daß sogar jeder beliebige topologische Raum  $S$  so in einen homogenen Raum  $S^*$  eingebettet werden kann, daß  $S^*$  dieselben Trennungseigenschaften wie  $S$  besitzt, Zusammenhang und lokaler Zusammenhang erhalten bleiben und  $S$  in  $S^*$  abgeschlossen ist, sofern  $S$  ein  $T_1$ -Raum ist. Der Beweis verläuft konstruktiv.  $S^*$  ist eine Teilmenge der durch die Punkte von  $S$  erzeugten Gruppe mit der Relation  $a^2 = 1$  ( $a \in S$ ), die mit einer geeigneten Topologie versehen wird. Der abstrakten Konstruktion liegt ein geometrisch-anschaulicher Sachverhalt zugrunde:  $S^*$  kann als eine Menge von zu  $S$  homöomorphen Exemplaren aufgefaßt werden, die in geeigneter Weise miteinander verheftet sind. Dieselbe Konstruktion liefert den Satz, daß jeder metrische Raum  $S$  isometrisch in einen metrisch-homogenen Raum  $S'$  so eingebettet werden kann, daß  $S$  in  $S'$  abgeschlossen ist. Metrische Homogenität bedeutet dabei, daß der eingangs erwähnte Homöomorphismus isometrisch ist.

*H.-J. Kowalsky.*

**Robinson, J. E.:** Continuity of transformation groups in topological spaces. Duke math. J. 21, 337—348 (1954).

Es sei  $X$  ein  $T_1$ -Raum, der homogen unter einer Abelschen Gruppe  $G$  von Transformationen sei. Verf. findet als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $X$  eine topologische Gruppe mit  $G$  als Transformationsgruppe ist, die folgende Bedingung A: Es sei  $O$  eine offene Menge in  $X$  und der Punkt  $p \in O$ . Dann gibt es eine offene Menge  $U \subset X$ , so daß wenn  $T \in G$  ist und, wenn  $T(U)$  den Punkt  $p$  enthält,  $T(U) \subset O$  gilt. Durch Beispiele wird gezeigt, daß Bedingung A in uniformen oder sogar in metrischen Räumen nicht erfüllt zu sein braucht. Weitere Untersuchungen beziehen sich auf Gruppen  $X$  mit Topologie, die lineare Räume über dem Körper der rationalen Zahlen sind, d. h. für die sich  $r \cdot x$  ( $x \in X$ ,  $r$  rational) eindeutig definieren läßt. Verf. erhält folgende hinreichende Bedingung für die Stetigkeit von  $r \cdot x$ , wenn Stetigkeit in  $r$  und  $x$  getrennt vorausgesetzt wird: Es sei  $O$  eine offene Menge und  $p \in O$ . Dann gibt es eine offene Menge  $U$ , die  $p$  enthält, so daß aus  $p \in r \cdot U$  folgt:  $r \cdot U \subset O$ . Ferner gibt Verf. Bedingungen dafür an, daß ein metrischer Raum, der linear über dem Körper der rationalen Zahlen ist, in einen Banach-Raum eingebettet werden kann.

*W. Thimm.*

**Bagley, R. W.:** On orbital topologies. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 5, 169—171 (1954).

Given an infinite set  $S$  and a mapping  $r$  of  $S$  in itself the orbit (of  $r$ ) through a point  $x$  of  $S$  is the set of points  $r^n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , while the set of points  $x$  on whose orbits lies a given point  $y$  is denoted by  $A(y)$ . D. O. Ellis defined the orbital topology on  $S$  by taking the derived set  $A'$  of a set  $A$  to consist of points  $y$  for which  $A(y)$  has an infinite intersection with  $A$ . The present paper is devoted to deriving some further results regarding the space  $S_r$ , with the orbital topology defined by  $r$ . The main results are:  $S_r$  is a  $T_2$  space if and only if each accumulation point is a fixed point (under  $r$ ). For  $r$  to be continuous it is necessary and sufficient that  $r^{-1}(x)$  is finite whenever  $x$  is not a fixed point. For  $r$  biuniform and onto,  $A(y)$  is finite or dense-in-itself according as  $r$  is or is not periodic at  $y$ . The space with an orbital topology is finally characterised as a union of a discrete subspace and a family of

mutually disjoint subspaces each homeomorphic with the space  $J$  of integers (with the whole space  $J$  and subsets bounded on the left as the closed subsets).

V. S. Krishnan.

Harrold jr., O. G.: The enclosing of simple arcs and curves by polyhedra. Duke math. J. **21**, 615—621 (1954).

On détermine une propriété locale ( $P$ ) à laquelle astreindre un arc, de façon à assurer le caractère non pathologique du plongement. Un arc  $J$  possède la propriété ( $P$ ) si tout point  $p$  de l'arc possède un voisinage de diamètre  $< \varepsilon$ , et s'il existe dans ce voisinage une sphère  $S$ , contenant  $p$  dans son intérieur, si l'intersection  $S \cap J$  se réduit à deux points (un seul si  $p$  est extrémité de  $J$ ) et si  $S$  est localement polyédrale en tout point de  $S \cap J$ . Si un arc  $J$  plongé dans  $E^3$  compactifié en  $S^3$  possède la propriété ( $P$ ), le complémentaire de  $J$  est une boule ouverte. Néanmoins un contre-exemple (dû à Artin et Fox) montre que la propriété ( $P$ ) n'est pas suffisante pour assurer le caractère "tame" du plongement. Le problème analogue pour les cercles plongés dans  $S^3$  est laissé ouvert par l'A.

R. Thom.

Calero, Gonzalo: Eine topologische Definition der Dimension. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. **14**, 194—199 (1954) [Spanisch].

Es wird eine Äquivalenzrelation im System  $\mathfrak{P}(E)$  aller Teilmengen eines topologischen Raumes  $E$  definiert:  $E$  heißt  $n$ -dimensional, wenn  $\mathfrak{P}(E)$  in genau  $n + 1$  Äquivalenzklassen zerfällt. Die Definition der Äquivalenz beruht auf der Konstruktion ausgezeichnete Teilmengen von  $E$ , deren Existenz unbewiesen bleibt. Eigenschaften der so definierten Dimension werden nicht genannt; auf Zusammenhänge mit den bereits vorliegenden Dimensionsbegriffen wird nicht eingegangen.

H. Bauer.

Alexandroff (Aleksandroy), P.: Über die Homöomorphie von Punktmengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 757—760 (1954) [Russisch].

Durch die Einführung verallgemeinerter Begriffe kann Verf. insbesondere eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Homöomorphie zweier Polyeder mittels ihrer kombinatorischen Spektren formulieren, die gewissermaßen dual zur „Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie“ ist. Abstraktes Spektrum  $\Sigma(x, \pi)$  heiÙe eine Filterbasis („directed set“) von abstrakten Komplexen  $\alpha, \beta, \dots$ , wo  $1. \beta > \alpha$  bedeute, daÙ es eine Projektion  $\pi_\alpha^\beta$  gibt, die jedem Eckpunkt  $e_\alpha \in \beta$  die Eckpunkte eines Simplexes so zuordnet, daÙ jedem Simplex  $t_\alpha = (e_{\alpha 0}, \dots, e_{\alpha r}) \in \beta$  ein  $t_\beta = \pi_\alpha^\beta t_\alpha \in \alpha$  entspricht (das Gerüst von  $t_\beta$  ist  $\bigcup_{\alpha} \pi_\alpha^\beta e_\alpha$ ), und 2. die Komposition der Projektionen schwach transitiv ist:  $\pi_\alpha^\beta e_\beta = \pi_\alpha^{\beta'} e_{\beta'}$ . Ein geometrisches Spektrum besteht aus Triangulationen, d. h. simplizialen Zerlegungen einer in einem euklidischen Raum gelegenen Punktmenge  $A = X$ , mit den Projektionen  $\pi_\alpha^\beta$  der Elemente der simplizialen Unterteilung  $\beta$  von  $X$  auf ihre Träger (oder deren Gerüst) in  $\alpha$ . Das kombinatorische Spektrum  $\Sigma'$  zieht nur Unterteilungen der Triangulation  $\tau$  des Polyeders  $\bar{\tau}$  in Betracht.  $\Sigma'(x', \pi')^{\beta'}$  heiÙt Teilspektrum von  $\Sigma'(x, \pi)^\beta$ , wenn 1.  $\alpha' \in \Sigma' \Rightarrow \alpha' \in \Sigma$ , 2.  $\beta' > \alpha'$  in  $\Sigma' \Rightarrow \beta' > \alpha'$  in  $\Sigma$ , und 3.  $\pi_{\alpha'}^{\beta'} e_{\beta'} \subset \pi_\alpha^\beta e_\beta$ . Eine Eckpunktmenge  $\xi$  heiÙt projektive Menge in  $\Sigma'$ , wenn 1.  $\xi$  Eckpunkte aus allen  $\alpha \in \Sigma'$  enthält und 2. für jede ihrer endlichen Teilmengen  $\{e_{\alpha_i}\}_{i=1, \dots, n}$ , für jedes „genügend großen“  $\alpha$ , d. h.  $\alpha = \alpha_0 = \alpha_0(\{e_{\alpha_i}\})$ , und für beliebiges  $e_\alpha \in \alpha$  gilt  $e_\alpha = \pi_{\alpha_i}^\alpha e_{\alpha_i}$ . Schließlich heiÙe ein Teilspektrum  $\Sigma''$  konfinärer Teil von  $\Sigma'$ , wenn jede projektive Menge in  $\Sigma''$  durch weiteres Projizieren in  $\Sigma$  sich zu einer projektiven Menge in  $\Sigma$  vervollständigt und, umgekehrt, jede in  $\Sigma$  projektive Menge durch Beschränkung auf die Komplexe und Projektionen von  $\Sigma''$  projektive Menge in  $\Sigma''$  wird. Es wird nun der folgende Satz behauptet: Zwei Teilmengen euklidischer Räume,  $A$  und  $A'$ , sind dann und nur dann homöomorph, wenn es ein abstraktes Spektrum  $\Sigma$

mit konfinalen Teilen  $\sigma$  und  $\sigma'$  gibt, die gleichzeitig auch konfinale Teile der geometrischen Spektren von  $A$  und  $A'$  sind.

In der Beweisansedeutung erscheinen als Komplexe des den homöomorphen Mengen  $A$ ,  $A'$  gemeinsamen abstrakten Spektrums  $\Sigma$  die Nerven der offenen Überdeckungen endlicher Ordnung mit  $\pi_\alpha^\beta e_\beta = \{e_\alpha\}_{e_\alpha \supset e_\beta}$ , d. h.  $\beta > \alpha$ , wenn die abgeschlossene Hülle  $\bar{e}_\beta$  jedes  $e_\beta \in \beta$  in (mindestens) einem  $e_\alpha \in \alpha$  liegt. Die Spektren  $\sigma$  und  $\sigma'$  bestehen aus den kanonischen Komplexen, die  $A$ , bzw.  $A'$ , überdecken. Für diese, und anderes, wird auf Alexandroff [Mat. Sbornik, n. Ser. **21**, 61 (1947) und **33**, 241–260 (1953)] und Sitnikoff (dies. Zbl. **55**, 163) verwiesen. Das Hinreichen der Bedingung ergibt sich durch Konstruktion eines den gegebenen Spektren, wie auch ihren konfinalen Teilen, gemeinsam zugeordneten Raums: seine Punkte sind Fibern, d. h. projektiv abgeschlossene projektive Mengen. Als Spezialfall ergibt sich: Zwei Polyeder  $A = \bar{\tau}$ ,  $A' = \bar{\tau}'$  sind dann und nur dann homöomorph, wenn es ein abstraktes Spektrum  $\Sigma$  mit den kombinatorischen Spektren  $\Sigma_\tau$  und  $\Sigma_{\tau'}$  als konfinalen Teilen gibt. D. Tamari.

Fort jr., M. K.: A theorem about topological  $n$ -cells. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 456–459 (1954).

Ist  $G$  eine offene zusammenhängende Punktmenge des  $n$ -dimensionalen Raumes, so läßt sich  $G$  als Durchschnitt einer unendlichen Folge topologischer Zellen darstellen. Der Beweis beruht auf der Konstruktion geeigneter Zellen durch Vereinigung einer je endlichen Menge von Würfeln. K. Reidemeister.

Kosiński, A.: A topological characterization of 2-polytopes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 321–323 (1954).

Mit  $\text{reg}_n K$  wird die Menge aller Punkte des topologischen Raumes  $K$  bezeichnet, die dem Euklidischen  $n$ -dimensionalen Raume homöomorphe Umgebungen besitzen. Satz 1: Ist  $K$  ein höchstens 2-dimensionaler ANR (kompakter absoluter Umgebungsretrakt) und gilt  $\dim(K - \text{reg}_2 K) \leq 0$ , so ist  $K$  einem Euklidischen Polyeder homöomorph. Daraus folgt: Ein 2-dimensionales Kontinuum  $K$  ist dann und nur dann eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit, wenn  $K$  ein ANR ist, in dem  $\text{reg}_2 K$  zusammenhängend und  $K - \text{reg}_2 K$  höchstens 0-dimensional ist. Satz 2: Ein metrischer separabler Raum ist dann und nur dann einem höchstens 2-dimensionalen Euklidischen Polyeder homöomorph, wenn 1.  $K$  ein ANR ist, 2.  $K = A \cup B$ , wo  $A \subset \text{reg}_2 K$  und  $B$  ein Streckenkomplex ist, 3. jedes  $p \in K$ , bis auf endlich viele Punkte, beliebig kleine Umgebungen  $U$  besitzt derart, daß für jede Komponente  $S$  von  $U - B$ , die Menge  $S \cup U \cap B - p$  zusammenhängend ist. Daraus folgt Satz 3: Ein kompakter Raum, in dem jeder Punkt eine einer offenen Teilmenge eines 2-dimensionalen Polyeders homöomorphe Umgebung besitzt, ist ein 2-dimensionales Polyeder. T. Ganea.

Kosiński, A.: On 2-dimensional topological divisors of polytopes. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 325–328 (1954).

Mittels der vom Verf. erfundenen (vgl. vorstehendes Referat) Kennzeichnung 2-dimensionaler Polyeder wird ein wichtiger Spezialfall eines von K. Borsuk [Colloq. math. **1** (1948), 242, Problème 46] aufgeworfenen Problems gelöst. Verf. beweist nämlich, daß, falls das topologische Produkt  $A \times B$  einem kompakten Polyeder homöomorph ist und  $\dim A \leq 2$  gilt, auch  $A$  einem Polyeder homöomorph ist. Folgende Verallgemeinerungen werden noch erhalten: Ist das topologische Produkt  $A \times B$  eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit und gilt  $\dim A \leq 2$ , so ist auch  $A$  eine geschlossene Pseudomannigfaltigkeit; ist der gefaserte Raum  $M$  (im Sinne von Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton 1951) mit Basis  $B$  und Faser  $X$  einem Polyeder homöomorph, und ist  $B$  (oder  $X$ ) höchstens 2-dimensional, so ist auch  $B$  (oder  $X$ ) einem Polyeder homöomorph. T. Ganea.

Rattray, B. A.: An antipodal-point, orthogonal-point theorem. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 502–512 (1954).

Es handelt sich um folgenden Satz: Jede stetige, antipodentreue Abbildung  $T: S^n \rightarrow S^n$  der  $n$ -Sphäre in sich bildet mindestens eine aus  $n+1$  paarweise orthogonalen Punkten der  $S^n$  bestehende Menge auf eine ebensolche Menge ab. Dabei heißt  $T$  antipodentreu (abgekürzt: apt.), wenn jedes Paar antipodaler Punkte in ein ebensolches übergeht. — Beweisskizze: Bezeichnungen.



$\ell$ : Abbildungsgrad von  $T$  (stets ungerade);  $X$ : symmetrisches Produkt von  $n + 1$  Exemplaren des  $n$ -dimensionalen, projektiven Raumes  $P^n$ ;  $Y$ : Unterraum von  $X$ , bestehend aus allen (ungeordneten)  $(n + 1)$ -Tupeln von Punkten des  $P^n$  mit höchstens  $n$  verschiedenen Komponenten;  $\alpha$ : Menge aller (ungeordneten) „orthogonalen“  $(n + 1)$ -Tupel von Punkten des  $P^n$  (die Bedeutung von „orthogonal“ wird klar, wenn man die Punkte des  $P^n$  als Paare antipodaler Punkte der  $S^n$  deutet),  $\alpha$  kann als singulärer  $m$ -Zyklus mod 2 mit  $m = 2^{-1}n(n + 1)$  der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $X - Y$  betrachtet werden und wird durch jede in natürlicher Weise zu einer Abbildung von  $X$  in  $X$  fortgesetzte, stetige, apt. Abbildung  $U: S^n \rightarrow S^n$  in einen singulären  $m$ -Zyklus  $T_U$  von  $X$  relativ  $Y$  übergeführt. — 1. Schritt. Verschärfung der bekannten Tatsache, daß stetige Abbildungen der  $S^n$  in sich mit gleichem Abbildungsgrad homotop sind; Je zwei stetige apt. Abbildungen  $U_0, U_1: S^n \rightarrow S^n$  mit gleichem Abbildungsgrad sind antipodal homotop d. h. es existiert eine stetige Schar stetiger, apt. Abbildungen  $T_t: S^n \rightarrow S^n$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit  $T_0 = U_0$  und  $T_1 = U_1$ . — 2. Schritt. Konstruktion einer stetig differenzierbaren apt. Abbildung  $T_d: S^n \rightarrow S^n$  vom Abbildungsgrad  $\ell$  derart, daß der Durchschnitt der Träger von  $\alpha$  und  $\beta_{T_d}$  aus genau einem Punkt  $p$  besteht, welcher zudem Fixpunkt bezüglich  $T_d$  ist, und daß die  $m$ -dimensionalen Tangentialebenen (im Tangenten-Vektorraum von  $X - Y$  in  $p$ )  $V$  und  $W$  von  $\alpha$  und  $\beta_{T_d}$  in  $p$  nur den Nullvektor gemeinsam haben. — 3. Schritt. Nach 2. ist die Durchschnittszahl von  $\alpha$  und  $\beta_{T_d}$  gleich 1 mod 2. Da nach 1.  $\beta_T$  und  $\beta_{T_d}$  homolog sind, ist auch die Durchschnittszahl von  $\alpha$  und  $\beta_T$  gleich 1 mod 2. Folglich ist der Durchschnitt der Träger von  $\alpha$  und  $\beta_T$  nicht leer, es gilt also die Behauptung.

H. Bauer.

Livesay, George R.: On a theorem of F. J. Dyson. Ann. of Math., II. Ser. 59, 227—229 (1954).

Verf. stellt kombinatorisch-topologische Sätze über stetige Funktionen auf der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $S_n$  in Verbindung mit antipodischen Triangulationen der  $S_n$  auf. Als Anwendung ergibt sich die Verallgemeinerung des Theorems von Dyson (dies. Zbl. 45, 29), die darin besteht, daß die beiden antipodischen Punktepaare  $a, a^*$  und  $b, b^*$  der  $S_2$  für die eine stetige Funktion  $f$  auf  $S_2$  übereinstimmende Werte  $f(a) = f(a^*) = f(b) = f(b^*)$  annehmen, nicht notwendig orthogonal zueinander stehen müssen, sondern so, daß die sphärische Distanz  $\langle a, b \rangle = \langle a^*, b^* \rangle$  einen beliebigen vorgeschriebenen Wert zwischen 0 und  $\pi/2$  aufweist. Verf. geht noch auf verschiedene Zusammenhänge mit andern verwandten Sätzen ein, so mit der Verallgemeinerung des Theorems von S. Kakutani durch H. Yamabe und Z. Yujobo (dies. Zbl. 39, 391) sowie mit dem Satz von Borsuk-Ulam. H. Hadwiger.

Zarankiewicz, K.: Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 117—120 (1954).

Verf. gibt einen Beweis einer Verallgemeinerung des Theorems von F. J. Dyson (vgl. vorst. Ref. und dies. Zbl. 45, 29), indem er sich auf ein Lemma stützt, das er mit Anwendung eines Satzes von K. Kuratowski (Topologie II (dies. Zbl. 41, 96), p. 98) herleitet. Der für den genannten Zweck dienliche Teil des Lemmas sagt aus, daß eine abgeschlossene und antipodische Punktmenge  $A$  der Kugelfläche  $S$ , welche nur endlich viele Komponenten aufweist, auch eine antipodische Komponente besitzt, wenn die komplementäre Punktmenge  $S - A$  keine solche enthält. Diese Aussage ist auch Korollar eines Satzes von S. Straszewicz [Fundamenta Math. 7, 159—187 (1925)]. Weiter wendet Verf. einen von ihm formulierten Hilfsatz über stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen an, dessen Beweis in den Fundamenta Mathematicae erscheinen soll.

H. Hadwiger.

Stein, S.: Families of curves. Proc. Amer. math. Soc. 5, 745—747 (1954).

Die folgende rein topologische Verallgemeinerung eines Satzes von A. Forrester (dies. Zbl. 47, 421) wird bewiesen: Besitzt die stetige Abbildung  $\Phi$  von  $S^n$  in sich die Periode  $p = 1$  und ist  $F$  eine stetige Abbildung von  $S^n \times I$  in  $E^{n+1}$ , mit  $F(P, 0) = P$  und  $F(P, 1) = F(\Phi(P), 1)$  für jedes  $P \in S^n$ , so gilt notwendigerweise  $F(S^n \times I) \subset E^{n+1}$ ; dabei sind:  $S^n$  die  $n$ -dimensionale Sphäre,  $E^{n+1}$  die  $n + 1$ -dimensionale Vollkugel und  $I$  die Einheitsstrecke. Daraus folgt, unter anderen: Genügt  $G: S^n \rightarrow S^n$  den obigen Bedingungen, beginnt in jedem Punkte  $P \in S^n$  eine in  $E^{n+1}$  enthaltende und von  $P$  stetig abhängige Kurve, so wird der ganz  $E^{n+1}$  durch diese Kurven er-

füllt, falls für jedes  $P \in S^n$  die in  $P$  und  $\Phi(P)$  beginnenden Kurven denselben Endpunkt besitzen.

*T. Ganea.*

**Chang, S. C.: On certain polyhedron with the same homotopy groups as a given sphere.** Acta math. Sinica **4**, 201—220 und engl. Zusammenfassg. 221 (1954) [Chinesisch].

In [1] the author introduced a method to construct a map  $[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]: S^{\tau_1+\tau_2+\tau_3-1} \rightarrow X$ , if maps  $f_i: S^{\tau_i} \rightarrow X$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are given such that  $[f_i, f_j] \sim 0$  in  $X$ . Here he has extended this operation to construct an element,  $[\Phi_1, \dots, \Phi_n]$ , of  $\pi_{\tau_1+\dots+\tau_{n-1}}(X)$  if elements  $\alpha_i \in \pi_{\tau_i}(X)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) are given with appropriate properties. As a consequence a special cell complex,  $K_{r,n}$ , is constructed which consists of one zero-dimensional cell,  $e^0$ , one  $n$ -dimensional cell,  $e^n$ , such that  $e^0 \cup e^n$  is an  $n$ -sphere,  $S^n$ , and one  $(k, n)$ -dimensional cell if  $1 \leq k \leq r$ . Moreover, the  $(k, n)$ -cell is attached by the map  $[\Phi_1, \dots, \Phi_k]$  which is so introduced that each  $\alpha_i$ , ( $i = 1, \dots, k$ ) used in defining  $[\Phi_1, \dots, \Phi_k]$  is the class determined by the identity map of the sphere  $S^n$  (in  $K_{r,n}$ ). The main theorem of this paper is

$\pi_{q+1}(S^{n+1}) \approx \pi_q(K_{r,n})$ , if  $n > 1$ ,  $q \leq (r+1)n - 2$ ;  $\pi_{q+1}(S^2) \approx \pi_q(K_{r,2})$ , if  $1 < q \leq 2r$ . This sheds new light on the computation of homotopy groups of spheres. In case we replace  $K_{r,n}$  by  $K_{\infty,n}$  then  $\pi_{q+1}(S^{n+1}) \approx \pi_q(K_{\infty,n})$ ,  $n > 1$ , for all  $q$  and particularly  $\pi_{q+1}(S^2) \approx \pi_q(K_{\infty,2})$ ,  $q > 1$ . Let  $E: \pi_q(S^n) \rightarrow \pi_{q+1}(S^{n+1})$  denote the suspension homomorphism. The author has successfully exhibited its kernel and its image. This implies many important results, e.g. (i) Pontrjagin theorem (this Zbl. **35**, 111) that  $\pi_5(S^3) \neq 0$ , (ii) simple proofs of the Freudenthal theorem (this Zbl. **18**, 177) that  $E$  is onto if  $q \leq 2n - 1$  and isomorphism onto if  $q \leq 2n - 2$ , and (iii) extended G. W. Whitehead theorem (this Zbl. **50**, 175) about exact sequence regarding suspension, Hopf invariant and Whitehead product.

*Autoreferat.*

**Puppe, Dieter: Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders.** Math. Z. **61**, 303—323 (1954).

Soit  $K$  un complexe,  $K \times I$  le produit de  $K$  par le segment  $[0, 1]$ . Soit  $Y$  un espace  $n$ -simple,  $y_0$  un point donné de  $Y$ : on considère une application  $F: K \times \partial I \cup K^{n-1} \times I \rightarrow [K^{n-1}, (n-1)\text{-squelette de } K]$  dans  $Y$  dont la restriction à  $K \times \partial I \cup K^0 \times I$  applique cet ensemble sur  $y_0$ . L'extension de l'homotopie  $F$  au  $n$ -squelette  $K^n$  de  $K$  est interdite par un cocycle obstruction  $c \in C_*^n(K; \pi_n(Y))$ , obtenu en associant à tout  $n$ -simplexe  $s$  de  $K$  la classe de l'application restriction  $F|_s: (s \times I)$ . L'A. se propose de déterminer l'ensemble  $H_*^n(K; \pi_n(Y))$  des classes des cocycles de  $C_*^n$  grâce à la remarque originale que voici: une déformation  $F: K \times I \rightarrow Y$  peut être considérée comme une application  $f$  de  $K$  dans l'espace des lacets  $\Omega$  de  $Y$ . Alors  $C_*^n$  peut s'obtenir comme l'ensemble des cocycles obstructions aux applications  $g: K^{n-1} \rightarrow \Omega$ , à valeur dans  $\pi_{n-1}(\Omega) = \pi_n(Y)$ . Il existe alors un isomorphisme canonique  $q$  de l'ensemble des classes de  $n$ -homotopie d'applications  $h: K \rightarrow Y$  telles que  $h(K^{n-1}) = y_0$ , dans le groupe quotient  $H^n(K; \pi_n(Y)) / H_*^n(K; \pi_n(Y))$ . ( $q$  est un isomorphisme sur si  $K$  est de dimension  $n+1$  au plus). L'homomorphisme canonique de Hurewicz:  $j: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$  induit un homomorphisme  $j_*: H_*^n(K; \pi_n(Y)) \rightarrow H^n(K; H_{n-1}(\Omega))$ ; alors  $H_*^n$  est dans le noyau de  $j_*$ . Grâce à ces résultats, l'A. retrouve immédiatement de nombreux théorèmes de classification d'applications (Hopf-Whitney, Pontrjagin etc.). Il les applique ensuite à un problème de son cru: soit  $K$  une pseudo-variété de dimension  $n$ ,  $f$  une application de  $K$  dans la sphère  $S^n$ , qui est constante sur le complémentaire d'un simplexe ouvert  $s$  de  $K$ . Il montre que, pour tout couple d'entiers  $n, m$  ( $n > m$ ), il existe une pseudo-variété  $K$  de dimension  $n$  qui n'admet aucune application essentielle sur la sphère  $S^m$  du type précédent, sauf dans les cas où existe un invariant de Hopf:  $m$  pair,  $n = 2m + 1$ . Outre les théorèmes cités plus haut, la démonstration utilise un procédé curieux d'addition des pseudo-variétés, et les résultats de Serre sur l'homologie des espaces de lacets sur la sphère.

*R. Thom.*

**Kuratowski, K.: Fonctions rationnelles qui sont homotopes à des fonctions biunivoques sur certains sous-ensembles du plan.** Fundamenta Math. **41**, 107—121 (1954).

Theorem 1: Let  $A$  be a locally connected subset of the 2-sphere  $S_2$  (complex

plane) and let  $p_0, \dots, p_n$  be points not belonging to  $A$ , such that  $A$  cuts  $S_2$  between any two  $p_i, p_j$  with  $i \neq j$ . If there exists a homotopy  $h: A \rightarrow \{0, 1\} \rightarrow S_2 \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  with  $h(z, 0) = (z - p_0)^{K_0} \dots (z - p_n)^{K_n}$ ,  $K_0 + \dots + K_n = 0$ ,  $K_j \neq 0$  for  $0 \leq j \leq n$ , and such that  $h(z, 1)$  is a homeomorphism, then  $|K_0| + \dots + |K_n| \leq 2n$ . Theorems 2 and 3: If the points  $p_0, \dots, p_n$  are distinct and the integers  $K_0, \dots, K_n$  satisfy  $K_0 + \dots + K_n = 0$ ,  $K_j \neq 0$  for  $0 \leq j \leq n$ ,  $|K_0| + \dots + |K_n| \leq 2n$ , then there exists a continuum  $A$ , which is the union of  $n$  simple closed curves (an open set  $A$ , which is the union of  $n$  regions each homeomorphic to a circular ring), cutting  $S_2$  between any two of the points  $p_i$ , and a homeomorphism of  $A$  into  $S_1 \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  which is homotopic to the rational function  $(z - p_0)^{K_0} \dots (z - p_n)^{K_n}$ . Theorem 4: If the subset  $A \subset S_2$  has finitely many components, then any  $f: A \rightarrow S_1 \rightarrow 0 \rightarrow \infty$  which is homotopic to a rational function on each component of  $A$ , is homotopic to a rational function on the whole of  $A$ . *T. Ganea.*

**Kuratowski, K.:** Sur une propriété analytique des homéomorphismes définies sur des continus plans. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 9—12 (1954).

Simplified proof of the Theorem 1 of the paper reviewed above, in the case that  $A$  is a locally connected continuum. *T. Ganea.*

**Plis, A.:** Rational functions univalent on sets separating the plane. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 255—256 (1954).

In connection with the first paper of Kuratowski reviewed above, an example is given of a rational function  $(z - p_0)^{K_0} \dots (z - p_n)^{K_n}$  satisfying  $K_0 + \dots + K_n = 0$ ,  $K_j \neq 0$  for  $0 \leq j \leq n$  and  $|K_0| + \dots + |K_n| \leq 2n$ , which is multivalent on any curve separating the complex plane  $S_2$  between any two of the points  $p_i$ . *T. Ganea.*

**Harary, Frank:** On the notion of balance of a signed graph. Michigan math. J. 2, 143—146 (1954).

Ein Graph heißt hier „signiert“ (*s*-Graph), wenn die Kanten in positive und negative eingeteilt werden. Ein Kantenzyklus heißt positiv, wenn er eine gerade Anzahl negativer Kanten enthält. Ein *s*-Graph heißt im Gleichgewicht (in balance), wenn alle Zyklen positiv sind. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß sich seine Punkte so in zwei Klassen einteilen lassen, daß jede positive Kante Punkte derselben Klasse, jede negative Kante Punkte verschiedener Klassen verbindet. Eine Klasse kann dabei auch leer sein. Ein Verfahren, die Anzahl der verschiedenen *s*-Graphen bei vorgegebener Punkt- und Kantenzahl zu finden, wird angegeben unter Bezug auf eine demnächst in Trans. Amer. math. Soc. erscheinende Arbeit des Verf. Probleme der Sozial-Psychologie waren Anlaß und sind Anwendungsgebiet für *s*-Graphen. *H. Künmeth.*

## Angewandte Geometrie:

**Manara, C. F.:** L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva. Periodico Mat., IV. Ser. 32, 142—149 (1954).

Beweis des Satzes von Pohlke mit elementaren algebraischen Mitteln. Es wird durch elementare Diskussion des dem Pohlkeschen Satze äquivalenten Gleichungssystems der Nachweis geführt, daß es zu jedem reellen Pohlkeschen Dreiein der Ebene ( $O' P_1 P_2 P_3$ ) zwei reelle Schrichtungen und dazu je zwei reelle räumliche orthonormierte Dreibeine ( $O P_1 P_2 P_3$ ) gibt, welche ( $O' P_1 P_2 P_3$ ) als Parallelprojektion besitzen. Insbesondere wird der elementare Nachweis der Konstruierbarkeit der Schrichtungen und der räumlichen Dreibeine geführt, d. h. gezeigt, daß das Gleichungssystem durch Quadratwurzeln lösbar ist. *K. Strubecker.*

**Hofmann, Ludwig:** Über die Herstellung axialer Lagen von kollinearen Räumen bei Zugrundelegung einer elliptischen Metrik. Monatsh. Math. 58, 143—159 (1954).

Im Anschluß an eine Arbeit von H. Brauner (dies. Zbl. 50, 181) wird die



Bedingung abgeleitet, unter welcher zwei kollineare Räume bei Bestehen einer elliptischen Metrik durch starre Transformationen dieser Metrik in achsiale Lage kommen können. Es trifft dies genau dann zu, wenn die Gegenflächen der kollinearen Räume, nämlich die der gegebenen Maßfläche in beiderlei Sinn entsprechenden Quadriken, untereinander kongruent sind. Erfüllen zwei kollineare Räume diese Bedingung, dann kann jeder von ihnen bei Festhalten des anderen Raumes in bezug auf diesen zwei Scharen von je  $\infty^1$  axialen Lagen einnehmen. Wie im euklidischen Raum gibt es in gewissen Sonderfällen sogar  $\infty^2$  solche Lagen. Wegen weiterer Einzelheiten sei auf die Arbeit selbst verwiesen. *J. Krames.*

● **Schwiedefsky, K.: Grundriß der Photogrammetrie.** 5. Aufl. Stuttgart: Teubner Verlagsgesellschaft 1954. VIII, 282 S. 276 Abb. 14 Tafeln. DM 24,80.

Die 5-te erweiterte Auflage des Werkes, das seinen bisherigen Charakter beibehält, gibt theoretisch das im Hinblick auf die praktischen Anwendungen Wesentliche in möglichst knappen und prägnanten Formulierungen, ohne systematische Vollständigkeit zu erstreben. Besondere Aufmerksamkeit wird den optischen und instrumentellen Fragen gewidmet, Fragen, welche für jegliche praktische Arbeit in und mit der Photogrammetrie wichtig sind. Das Buch will nach Verf. eine Einführung in den heutigen Stand der Grundlagen, der Instrumententechnik und Methoden sein, und zugleich ein Leitfaden für den Studenten, von welchem jedoch schon eine gewisse theoretische Vorbildung verlangt wird; schließlich ein Kompendium für den Praktiker. Es ist aber zu bemerken, daß Verf. in der Beurteilung des heutigen Standes der Photogrammetrie nur die Methoden berücksichtigt, welche schon eine praktische Verwertung gefunden haben, während es für den Studierenden von Interesse wäre, alle wichtigeren neuen Methoden kennen zu lernen oder wenigstens angedeutet zu finden. Die Literaturangaben sind in dieser Hinsicht Deutschland ausgeschlossen, zu unvollständig. Was zum Beispiel die zeichnerischen Methoden betrifft, so werden nur klassische Näherungsverfahren in Betracht gezogen, von welchen einige heute nur noch theoretischen Wert besitzen. Auf Neues wird nicht hingewiesen. Ebenso ist den Anwendungen der Bildmessung außerhalb topographischer Gebiete ein zu kleiner Raum im Verhältnis zu ihrer Bedeutung zugewiesen. In der Nahbildmessung hatte die Wahl der Beispiele dem ausgezeichneten Werke O. Lacmans „Die Photogrammetrie in ihrer Anwendung auf nicht topographische Gebiete“, Leipzig 1950, folgend, besser getroffen werden können. — Die Änderungen gegenüber der vierten Auflage sind nach Verf. folgende: Eine grundlichere Behandlung der Geometrie der Senkrechttbilder mit kleinen Nadirdistanzen, mit Einschluß einiger in USA viel benutzter Näherungsmethoden zur Ermittlung der Bildneigung und des Maßstabes; das gleiche gilt für das Auflösungsvermögen des Luftbildes als dem wichtigsten Wertmaßstab für deren universelle Anwendung. Auch lichttechnische Fragen werden behandelt. Außerdem werden die neuesten Ergebnisse über die Größenänderungen der Schlußtrager gebracht. Ein aktuelles Thema sind die Modellverbiegungen, insbesondere durch Restfehler der Verzeichnung. Ein weiterer Abschnitt berichtet über die Reduktion der Basis nach der absoluten Orientierung bei den verschiedenen Instrumententypen. Bei der Aerotriangulation sind die großmaßstäblichen Anwendungen stärker hervorgehoben. Völlig erneuert sind die Angaben über Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit der photogrammetrischen Arbeiten. Rechnerische Verfahren werden, als Entwicklungen der Photogrammetrie, die ins Geodatisch-Exakte zielen, in der Darstellung berücksichtigt. Als wertvolle Bereicherung des Buches durften auch die dem Buche beigelegten Originalausschnitte aus photogrammetrisch aufgenommenen Kartenblättern gelten.

*M. Piazzolla-Beloch.*

## Theoretische Physik.

**Bastin, E. W. and C. W. Kilmister: The concept of order. I. The space-time structure.** Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 278—286 (1954).

The authors expound an unorthodox view of the relation of mathematics to physics. They define an algebraic structure which is claimed to have a property of fundamental physical importance and which is such that from it more complex structures may be obtained. The authors further state that at every stage the physical meaning of every structure in the theory can be stated. The main part of this paper is concerned with a set, whose only postulate is closure under one binary operation, and certain of its subsets. The physical meaning of the elements of the set and the binary operation is not completely clear to the reviewer.

*A. H. Taub (R).*

**Bastin, E. W. and C. W. Kilmister: Eddington's theory in terms of the concept of order.** Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 439—448 (1954).

This paper examines connections between Eddington's work as propounded in his book „Fundamental theory“ (Cambridge 1946) and the theory of a previous paper by the authors (cf. the preceding review). *A. H. Taub (R).*

Depit, A.: Temperate distributions associated with the Klein-Gordon equation. *Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 335—350 (1954).*

Verf. gibt eine Zusammenstellung der von der Distributionentheorie entwickelten Methoden zur Behandlung der Klein-Gordon-Gleichung: 1. Man sieht  $d_t^2 U_x(t) - 1 * U_x(t) - m^2 U_x(t) = 0$  als Entwicklungsgleichung (équation d'évolution nach L. Schwartz, dies. Zbl. 42, 331) an.  $U_x(t)$  ist eine zweimal nach dem Parameter  $t$  differenzierbare Schar von dreidimensionalen Distributionen. Die „lösenden Distributionen“ sind im wesentlichen die „Greenschen Funktionen“  $1, 1^{(1)}, 1^{(2)}$  und  $1^{(3)}$  je nach Wahl der Anfangsbedingungen. 2. Man sieht die Distribution  $L = \delta_{x-\xi} \times \partial_t^2 \delta_{t-\tau} - \delta_{t-\tau} \times 1_x \delta_{x-\xi} + m^2 \delta_{x-\xi} \times \delta_{t-\tau}$  als Kern einer stetigen linearen Abbildung des vierdimensionalen  $\mathfrak{D}'_4$  auf  $\mathfrak{D}'_4$  an. Die zu  $L$  inverse Abbildung wird durch die „Greenschen“ Funktionen  $1^{(1)}$  und  $1^{(2)}$  vermittelt. 3. Kann man schließlich  $\partial_x^2 \delta_{x-\xi} - 1_x \delta_{x-\xi} + m^2 \delta_{x-\xi} * U_{x-\xi} = \delta_{x-\xi}$  als (4-dimensionale) Faltungsgleichung auffassen. Die Elementarlösungen werden mit Hilfe der Fouriertransformation gewonnen und sind im wesentlichen die „Greenschen Funktionen“  $1$  und  $1^{(1)}$  (die „Feynmansche Funktion“, vgl. dies. Zbl. 37, 124; 38, 133). Eine Untersuchung der lokalen und der kausalen Struktur der hier gewonnenen Distributionen wird vom Verf. nicht vorgenommen. *F. Penzlin.*

• Szabó, István: Einführung in die Technische Mechanik. Nach Vorlesungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1954. XII, 383 S., 484 Abb. DM 19,50, Ganzleinen DM 22,50.

Im Gebiet der Technischen Mechanik hat sich im Laufe der Zeit ein besonderer Lehrbuchstil entwickelt, der sowohl den Befürfnissen des Unterrichts als auch den Anforderungen der sich später daran anschließenden technischen Disziplinen gerecht wird. Dabei ist festzustellen, daß trotz weitgehender Übereinstimmung der Gesamtaufassung im einzelnen doch immer wieder Besonderheiten und neue Zusammenhänge aufgeleckt werden, die auch dem Kenner diese Entwicklung anziehend erscheinen lassen. In der Reihe dieser Lehrbücher ist das vorliegende vor allem auch wegen der historischen Anmerkungen hervorzuheben, die dem Lernenden die Entstehung der Mechanik im Kulturgeschehen der Menschheit anschaulich vor Augen führen. — Gliederung: Statik des starren Körpers, elementare Probleme der Elastizitätstheorie, Statik des starren Körpers, Grundgesetze der Dynamik, Bewegungswiderstände, Schwingungsprobleme, Stoß, Hydromechanik, mechanische Ähnlichkeit. Zahlreiche Übungsbeispiele. *Th. Poschl.*

### Elastizität. Plastizität:

Pogorzelski, W.: Probabilité de la sécurité d'une construction mécanique. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 2, 363—366 (1954).*

Saeterhaug, Odd H.: Betrachtungen über das Knickproblem. *Tekniske Skr. II N. 40 S. (1954)* [Norwegisch mit engl. Zusammenfassg.].

Horne, M. R.: The flexural-torsional buckling of members of symmetrical I-section under combined thrust and unequal terminal moments. *Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 410—426 (1954).*

Kostandjan, B. A.: Über die Torsion einer Welle mit einer rechteckigen Ringnut. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija fiz.-mat. estest. techn. Nauki 7, Nr. 4, 23—53 (1954)* [Russisch].

In einer Arbeit von M. M. Džrbašjan und B. L. Abramjan (dies. Zbl. 43, 187), die der Lösung der Aufgabe über die Torsion einer Stufenwelle gewidmet ist, wird darauf hingewiesen, daß nach dem vorgeschlagenen Verfahren sich auch die Aufgabe über die Torsion einer Welle mit einer rechteckigen Ringnut lösen läßt. — Die vorliegende Arbeit bringt die exakte Lösung

der Aufgabe über die Torsion einer Zylinderwelle mit einer rechteckigen Ringnut an der Oberfläche bei beliebiger symmetrischer Belastung in bezug auf die Wellenachse. - Die Lösung der Aufgabe wird durch Reihen nach Besselschen Funktionen dargestellt, deren Koeffizienten aus einem unendlichen, vollständig regulären System linearer Differentialgleichungen bestimmt werden. Formeln für die Bestimmung der Spannungen bei der Torsion der Welle werden erhalten. Als Beispiel wird die Aufgabe über die Torsion einer Welle mit rechteckiger Ringnut untersucht, wenn die tordierende Belastung an zwei Gebieten ihrer Seitenfläche angreift.

(Aus der Einleitung.)

**Walters, Kenneth C. and C. Bassel Smith:** Effect of uniform displacement on the stress distribution of a wood plate. *J. appl. Phys.* **25**, 1254—1259 (1954).

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit wird die Spannungsverteilung einer rechteckigen Holzplatte ermittelt, welche einer solchen Belastung unterworfen wird, daß sich eine gleichmäßige Verschiebung in der  $y$ -Richtung herausstellt. Es werden bestimmte Gesetzmäßigkeiten über die Verschiebung in Querrichtung gewonnen.

*H. Neuber.*

**Müller, W.:** Zur Biegungstheorie einer Vierpilzplatte mit rechteckigen Stützflächen. *Ingenieur-Arch.* **22**, 163—170 (1954).

Verf. hat in früheren Arbeiten (dies. Zbl. **55**, 176, 177) die Durchbiegung einer querkraftfrei eingespannten bzw. querkraftfrei durchlaufenden Vierpilzplatte untersucht, die gleichmäßig belastet und von vier unendlich dünnen, symmetrisch zu den Mittellinien gelegenen Säulen gestützt wird. Da bei der dort verwendeten Fourierschen Methode bereits von der Voraussetzung rechteckiger Stützflächen ausgegangen wird, und der Grenzübergang zu unendlichen kleinen Flächen schon bei der Aufstellung der Druckverteilungsfunktion vorgenommen wird, kann man unmittelbar von dem ersten Ansatz wieder ausgehen und die Funktion der Durchbiegung  $w$  durch eine Summe dreier Reihen, nämlich zweier einfacher und einer Doppelreihe darstellen. Die nächste und nicht ganz einfach zu lösende Aufgabe besteht darin, diese Reihen teilweise zu summieren oder in einfache, gut konvergierende Reihen umzuformen, wobei sich dann ganz zwanglos die Unterscheidung der verschiedenen Felder der Plattenebene ergibt, in denen die Durchbiegungsfunktion  $w$  verschiedene Formen annimmt. Bei der Umformung werden verschiedene Reihen-ausdrücke benutzt, die sich aus den früher gegebenen Formeln durch Integration gewinnen lassen (vgl. dies. Zbl. **47**, 429).

*R. Gran Olsson.*

**Paria, Gunadhar:** Stress distribution on thin aeolotropic plates. I. *Bull. Calcutta math. Soc.* **46**, 103—104 (1954).

Der Spannungszustand in einer Scheibe von spezieller Anisotropie (verschiedener  $E$ -Modul und verschiedene Poissonsche Zahl in zwei zueinander senkrechten Richtungen) kann mit Hilfe einer Spannungsfunktion ermittelt werden, die der partiellen Differentialgleichung  $\partial^4/\partial x^4 + 2k \partial^4/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4/\partial y^4 = 0$ ,  $k = \text{konst.}$  genügt; ihre Fourier-Transformierte erfüllt eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung bekannt ist. Die Spannungen ergeben sich als Fouriersche Integrale. Für zwei Beispiele (unendliche Scheibe mit Einzelkraft bzw. Einzelmoment) wird der Spannungszustand explizit angegeben.

*A. Weigand.*

**Rüdiger, D.:** Der Spannungs- und Verschiebungszustand drehsymmetrischer Membrane mit beliebig gekrümmter Meridiankurve. *Ingenieur-Arch.* **22**, 336—347 (1954).

Die Berechnung der Schnittkräfte und der Verschiebungen in einer drehsymmetrischen Membranschale wird durch Einführung von Zylinderkoordinaten auf die Lösung zweier partieller Differentialgleichungen zurückgeführt, die voneinander unabhängig sind. Durch Produktansätze für die gegebene Belastung und die gesuchten Größen (z. B.  $p_n$  = Normalkomponente der Belastung  $= p_{nn} \cos n\varphi$ ,  $\varphi$  = Längswinkel) wird die Aufgabe auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt. Für symmetrische ( $n = 0$ ) und antisymmetrische Belastung ( $n = 1$ ) kann der Spannungs- und Verformungszustand bei beliebiger Form der Meridian-



kurve explizit angegeben werden. Ist  $n = 2$ , so läßt sich die vollständige Lösung u. a. noch für die elliptische und die Hyperboloidschale ermitteln. Auch offene Schalen können bei geeigneten Randbedingungen mit der angegebenen Methode behandelt werden. *A. Weigand.*

**Bijlaard, P. P.:** Buckling stress of thin cylindrical clamped shells subject to hydrostatic pressure. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 852—853 (1954).

**Alexander, J. M. and H. Ford:** On expanding a hole from zero radius in a thin infinite plate. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.* **226**, 543—561 (1954).

Zur Ermittlung des maximal erreichbaren Druckes beim Übergang vom Rohr zur Platte, wenn z. B. Rohre sich in einer Kesseltrommel erweitern, wird eine Theorie erfordert, die sowohl eine Verfestigung des Materials wie eine Zunahme der Plattendicke zu berücksichtigen gestattet. Es ist weiterhin notwendig, die elastischen sowie die plastischen Formänderungen zu berücksichtigen. In der vorliegenden Arbeit ist eine solche Theorie aufgestellt, wobei ein gleichförmiger hydrostatischer Druck und eine Erweiterung des Loches vom Radius Null an in einer unendlichen Platte vorausgesetzt wird. Die Dicke der Platte ändert sich proportional zum Radius, und es wird nachgewiesen, daß das System Rohr-Platte geometrisch ähnlich bleibt, unabhängig vom Grad der Ausdehnung d. h. von der Größe des plastischen Gebiets. Die axiale Spannung senkrecht zur mittleren Ebene der Platte wird bei diesem Problem gleich Null angenommen, so daß Rohr und Platte als ein kontinuierliches System angenommen werden kann. Damit liegt ein Problem des ebenen Spannungszustandes vor, bei dem alle Variablen Funktionen eines einzigen Parameters  $\epsilon$  sind, wo  $\epsilon$  einen beliebigen Radius und  $c$  den Radius der momentanen plastisch-elastischen Übergangszone bezeichnen. Die Gleichgewichtsbedingung, die Bedingung der Kompressibilität und die Formänderungsbedingungen (Gleichung von Reuss) sind mit Hilfe des Parameters  $\epsilon$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\epsilon}$  eines beliebigen Elementes ausgedrückt, wobei  $c$  als Zentralastab benutzt wird ( $c = f(\epsilon, t)$ ). Die resultierenden vier Gleichungen sind durch schrittweise Näherung gelöst, indem endliche Änderungen der Variablen betrachtet werden, wobei der geltende Wert der Fließspannung bei jedem Schritt eingesetzt wird, unter Benutzung einer Kurve der Fließspannung eines charakteristischen Kesselstahls. Der Verlauf der Spannungen und Formänderungen wird mit dem einer Platte von konstanter Dicke verglichen (G. I. Taylor, *das. Zbl.* **33**, 409, R. Hill, *das. Zbl.* **41**, 108, S. 507). Die Restspannungen, die beim Nachlassen der Druckspannungen zurückbleiben, sind unter der Annahme ermittelt, daß kein sekundäres Fließen entsteht. Die frühere Theorie von A. Nadai (Theory of Flow and Fracture of Solids, New York 1950, S. 476) wird erweitert, um eine Abschätzung der Einwirkung sekundären Fließens zu gestatten, wenn die Restspannungen die Höhe der Fließspannung erreichen.

*R. Gran Olsson.*

**Das, Sisir Chandra:** On the stresses due to a small spherical inclusion in an elastic solid under uniform shearing stress. *Indian J. theor. Phys.* **1**, 171—182 (1954).

**Kröner, Ekkehart:** Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen Elastizitätstheorie. *Z. Phys.* **139**, 175—188 (1954).

Zusammenstellung der Integrationsmethoden des räumlichen Spannungsproblems für isotrop-elastisches Medium. *H. Neuber.*

**Hieke, Max:** Über ein ebenes unstetiges Temperaturspannungsproblem. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 121—139 (1954).

Die bisherigen Arbeiten über Wärmespannungen in ungleichmäßig erwärmten Körpern setzen voraus, daß die Funktion der Wärmeverteilung differenzierbar sei. Der Ansatz von W. Voigt (Lehrbuch d. Kristallphysik, Leipzig 1910, 677—768), der auf F. Neumann, (Gesammelte Werke, Leipzig 1912, 101—103) zurückgeht,

$$G \{ m(m-2)^{-1} \dot{\epsilon} \epsilon \otimes x_i - [u_i] \} = [m E \alpha (m-2)] \dot{\epsilon} T \otimes x_i + X_i - g \epsilon^2 u_i \otimes t^2$$

( $i = 1, 2, 3$ ) setzt eine differenzierbare Temperaturverteilung voraus ( $E$  = Elastizitätsmodul,  $G$  = Schubmodul,  $m$  = reziproke Poissonsche Zahl,  $u_i$  = Komponente der Verschiebung,  $\alpha$  = Wärmeausdehnungszahl,  $T$  = Differenz zwischen Körper- und Außentemperatur,  $X_i$  = Massenkraft je Volumeinheit,  $g$  = Dichte,  $\epsilon$  = räumliche Dilatation,  $t$  = Zeit). Unter Beschränkung auf den statischen Fall, also auf  $\epsilon^2 u_i / t^2 = 0$ , werden die Wärmespannungen in einem unendlich langen Zylinder unter der Annahme einer unstetigen Temperaturverteilung ermittelt. Durch Erfüllung der Verträglichkeitsbeziehungen für den ebenen Formänderungszustand wird eine inhomogene Differentialgleichung für die Airy'sche Spannungsfunktion erhalten. Für die Randbedingungen gilt dabei, daß die Ränder spannungsfrei sind. Die

Kenntnis eines partikulären Integrals verschafft die Werte der Spannungen an den Rändern, die zur Lösung der homogenen Gleichung der Airyschen Spannungsfunktion führen. Danach können die Spannungen in bekannter Weise gefunden werden. Auf die Ausrechnung der Verschiebungen wurde leider verzichtet, was um so mehr zu bedauern ist, als eine solche Ausrechnung in der Literatur selten zu finden ist. Die Spannungen selbst wurden nur für die innere Umgebung des Randes ermittelt.

*R. Gran Olsson.*

**Freudenthal, Alfred M.:** On inelastic thermal stresses. *Studies, Math. Mech.*, presented to Richard von Mises, 251—261 (1954).

**Jindra, F.:** Die Hohlkugel bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. *Ingenieur-Arch.* 22, 411—418 (1954).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 55, 180) berechnet Verf. unter Heranziehung des von H. Kauderer aufgestellten nichtlinearen Elastizitätsgesetzes für infinitesimale Verzerrungen (dies. Zbl. 35, 404) die Spannungsverteilung in einer homogenen isotropen Hohlkugel beliebiger Wandstärke unter hydrostatischem Innen- und Außendruck. Für den Spezialfall, daß in der Reihenentwicklung der Kompressionsfunktion nur das absolute Glied, in der Reihenentwicklung der Schubfunktion noch das quadratische Glied beibehalten wird, gibt Verf. eine strenge Lösung der Differentialgleichung für die Radialspannung mit vorgegebenen Randwerten. Wenn für Schub- und Kompressionsfunktion die quadratischen Glieder beibehalten werden, gelingt die näherungsweise Integration der Differentialgleichung durch sukzessive Approximation. Die Abweichung der Tangentialspannung am Innen- und Außenmantel beim Übergang vom Hookeschen Gesetz zum Gesetz von Kauderer wird durch Zahlenbeispiele erläutert. Es ergibt sich auch hier der erwartete Abbau von Spannungsspitzen bei geringer Abweichung vom Hookeschen Gesetz.

*R. Moufang.*

**Rivlin, R. S. and C. Topaloglu:** A theorem in the theory of finite elastic deformations. *J. rat. Mech. Analysis* 3, 581—589 (1954).

Die elastischen Eigenschaften eines Körpers können durch eine Verzerrungs-Energie-Funktion definiert werden, die i. a. als eine unendliche Reihe von homogenen Polynomen  $W = \sum W_n$  angesetzt werden kann. Für den unverformten und spannungslosen Zustand ist  $W_0 = 0$  und  $W_1 = 0$ .  $W_2$  gibt die Gleichungen der klassischen Elastizitätstheorie,  $W_2 + W_3$  die der Elastizitätstheorie 2. Ordnung usw. In dieser Arbeit wird ein Näherungsverfahren zur schrittweisen Lösung der Theorie 2. Ordnung vom Grade  $\varepsilon^2$  entwickelt, sobald eine Lösung der Theorie 1. Ordnung vom Grade  $\varepsilon$  erhalten worden ist. Die Theorie wurde vom erstgenannten Verf. (dies. Zbl. 50, 186) für ein isotropes Material aufgestellt und wird durch die hier angegebene Methode sowohl für isotropes als auch anisotropes Material und auf Theorien  $n$ . und  $(n+1)$ . Ordnung übertragen.

*Th. Pöschl.*

**Prager, William:** On the kinematics of solids. *Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll.* 8°, 28, 3—8 (1954).

Grundsätzliche historische Bemerkungen über die Beziehungen der älteren Theorie des Erddrucks und den modernen Theorien der Plastizität und des Fließens der festen Körper, die insbesondere durch die exakte Formulierung der Bestimmungsgleichungen und der Randbedingungen ausgezeichnet sind; ferner durch Einführung des Begriffes des plastischen Potentials, der Extremalprinzipie und des Begriffes der Grenzzustände („limit Analysis“). Der Zusammenhang mit der Coulombschen und der Saint-Venantschen Fließbedingung und der Anteil der Arbeit des belgischen Forschers Junius Massau wird ausführlich dargelegt.

*Th. Pöschl.*

**Wang, Alexander J. and William Prager:** Thermal and creep effects in work-hardening elastic-plastic solids. *J. aeronaut. Sci.* 21, 343—344, 360 (1954).

Extremalprinzipie, die die isotherme Verformung eines elastisch-plastischen Stoffes





Matschinski, Matthias: Sur les vibrations d'une plaque (ou d'une couche) plane infinie et sur les mesures pour déterminer son épaisseur. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 1766—1768 (1954).

Andersen, B. W.: Vibration of triangular cantilever plates by the Ritz method. J. appl. Mech. 21, 365—370 (1954).

Kenney jr., J. T.: Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load. J. appl. Mech. 21, 359—364 (1954).

Neuber, H.: Gesetzmäßigkeiten von Torsionsschwingungszahlen und Aufstellung einfacher Grenzwertformeln. Ingenieur-Arch. 22, 258—267 (1954).

Die kritischen Drehzahlen von biegesteifen Wellen, die mit Masse belegt sind, wurden bereits eingehend untersucht (siehe z. B. C. B. Biezeno und R. Grammel, dies. Zbl. 52, 407, Bd. 2, 155—222), wobei sich einfache Formeln zur Ermittlung oberer und unterer Grenzwerte ergeben haben. Ähnliche Überlegungen werden in der vorliegenden Arbeit für das Problem der Torsionsschwingungen durchgeführt und zur Aufstellung einfacher Rechenverfahren herangezogen, die für die praktische Anwendung geeignet sind. Bei sehr vielen Massen erweist es sich von großem Vorteil, für die Eigenfrequenzen obere und untere Grenzwerte zu kennen, um bei der numerischen Rechnung Möglichkeiten der Kontrolle zur Verfügung zu haben. Aus der Determinante, die für das Problem der Torsionsschwingungen maßgeblich ist, werden in der Arbeit für die oberen und unteren Grenzwerte durch besondere Umformungen sehr einfache Formeln hergeleitet.

R. Gran Olsson.

Kane, T. R.: Reflection of flexural waves at the edge of a plate. J. appl. Mech. 21, 213—220 (1954).

In the present paper the equations by R. D. Mindlin (this Zbl. 44, 401) of flexural motion of plates are used to study the reflection of a straight-crested wave at the edge of a semi-infinite plate. The equations accommodate three modes of motion: two types of flexural waves and a thickness-shear wave. It is found that, in general, all three of these motions are excited upon incidence of any one of them at a free edge. The shear motion, here encountered, is of particular interest: for this motion is absent in the classical theory of plates, whence the applicability of that theory is restricted to a range of frequencies considerably below that corresponding to the first mode of thickness-shear vibration. By the same reason, the present theory does not include the higher modes of motion which are to be found in the three-dimensional elastic theory. Thus the solution set forth in the paper may be expected to furnish an adequate description for frequencies which do not materially exceed that of the first thickness-shear mode. The character of the reflected waves is affected by both the angle of incidence and the ratio of plate thickness to wave length of the incident wave. Appropriate values of these two parameters give rise to such special cases as waves whose amplitudes decrease exponentially with distance from the edge, vibrations, resonance, disappearance of some of the reflected waves, and for grazing incidence, complete disappearance of the motion.

R. Gran Olsson.

Tesch, H.: Die Ausbildung eines Elastizitäts-Störmoments beim schwingenden Pendel mit elastischer Schneide bzw. elastischer Unterlage. Z. angew. Math. Mech. 34, 391—404 (1954).

Durch die Elastizität der Schneide oder der ebenen Unterlage wird die Schwingungsdauer eines Pendels verkürzt. Verf. deutet dieses Erfahrungstatsache als Wirkung eines elastischen Störmomentes, das vom Ausschlagwinkel des Pendels abhängt, und berechnet es näherungsweise auf Grund der Hertzschen Theorie der Berührung elastischer Körper, die noch durch eine empirische Konstante ergänzt wird. Die Formel für das elastische Störmoment wurde an einigen konkreten Fällen geprüft, wobei sich befriedigende Übereinstimmung mit der Erfahrung ergab.

A. Weigand.

## Hydrodynamik:

Chou, Pei Chi: Variational and Galerkin's methods in compressible fluid flow problems. J. appl. Phys. **25**, 1551 (1954).

Ingraham, R. L.: Taylor instability of the interface between superposed fluids. Solution by successive approximations. Proc. phys. Soc., Sect. B **67**, 748—752 (1954).

Der Verf. entwickelt eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen für den Fall der Taylor-Instabilität der Grenzfläche zweier verschiedener Flüssigkeiten konstanter Dichte im Schwerfeld. Die kinematische Grenzbedingung und die Forderung nach Stetigkeit des Druckes in der Grenzfläche liefern die Ausgangsgleichungen, die zusammen mit den Laplace-Gleichungen für die Geschwindigkeitspotentiale das Problem mathematisch festlegen. Es wird angenommen, daß zu Beginn die Grenzfläche schwach gewellt ist. Die Wellenamplitude dient bei der folgenden, iterativen Rechnung als Entwicklungsparameter. Die schrittweise Berechnung, die eine Linearisierung des Gleichungssystems ermöglicht, erfolgt nach einem Verfahren, das bereits Rosenhead zur Berechnung der Helmholtz-Instabilität angewandt hat. Die Gleichungen werden in erster und zweiter Näherung gelöst und liefern die Geschwindigkeitspotentiale und die Gestalt der Trennfläche in Abhängigkeit der Zeit. Bei der vorausgesetzten instabilen Schichtung wachsen, wie voraus zu sehen, die Funktionen mit der Zeit über alle Grenzen. *G. Heinrich.*

Krzywoblocki, M. Z. v.: On the stability of Bénard-Kármán vortex street in compressible fluids. II. Acta phys. Austr. **8**, 370—387 (1954).

Viel Mathematik und wenig Physik werden zu dem Versuch verquickt, den Einfluß der Kompressibilität des Mediums als destabilisierend auf die Konfiguration der ein- und zweireihigen Wirbelstraßen nachzuweisen. Es wird z. B. nicht gesagt, warum denn im kompressiblen (also nicht linearen) Fall ohne weitere Einschränkungen die induzierten Geschwindigkeiten aller unendlich vielen diskreten Einzelwirbel zur Gewinnung ihrer kombinierten Wirkung auf einen Aufpunkt auch nur approximativ addiert werden dürfen, oder warum das bewußte Ignorieren des Auftretens eines Schallgrenzkreises bei der vom Verf. gegebenen Wirbelkonstruktion für das Problem keine Rolle spielen soll. — Um nur durch Zitieren zu referieren: „Concluding remarks. By applying Liapunoff's criterion of stability to the Bénard-Kármán vortex street and following Koehn's line of reasoning, the author has shown that the compressibility phenomena definitely act in a de-stabilizing sense. This confirms the results obtained by the author in one of his previous papers [5:2]“. ([5:2] = dies. Zbl. **50**, 412).

*H. Behrbohm.*

Chandrasekhar, S.: The stability of viscous flow between rotating cylinders. Mathematika, London **1**, 5—13 (1954).

Der Couette'sche Fall der Strömung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen Zylindern wird unter Überlagerung der Grundlösung  $V(r) = Ar + Br/r$  mit einer periodischen Störung (Wellenlänge  $\lambda$ ) in der  $z$ -Richtung senkrecht zur Strömungsebene neuerlich behandelt. Das Problem wurde bisher von G. J. Taylor, H. Jeffreys, D. Meksyn u. a. unter der vereinfachenden Annahme gelöst, daß die Differenz der Halbmesser der Zylinder klein ist gegenüber ihrem Mittelwert. Diese Annahme wird jetzt fallen gelassen und die Wellenzahl  $\lambda$  als Wurzeln der charakteristischen Gleichung in Abhängigkeit von den in Betracht kommenden Parametern ermittelt. *Th. Poschl.*

Lessen, M.: Note on the propagation of infinitesimal disturbances in gases according to the Navier-Stokes equations. J. aeronaut. Sci. **21**, 849—850 (1954).

Sextl, Theodor: Über eine Eigenschaft der Poiseuilleschen Strömung. Acta phys. Austr. **9**, 75—76 (1954).

Haque, S. M. A.: On the stability of a viscous liquid flowing in a straight circular tube under a constant pressure gradient. Pakistan J. sci. Research **6**, 3—5 (1954).

Verf. zeigt, daß die Poiseuille-Strömung durch ein gerades Kreisrohr für alle Reynoldsschen Zahlen stabil gegenüber rotationssymmetrischen Störungen ist.

W. Wuest.

Kämmerer, C.: Strömung in einer Expansionsdüse mit Reibung. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 293—306 (1954).

Cheng, Hsien K.: A supplementary note on the spanwise loadings over slender airfoils. J. aeronaut. Sci. 21, 853—854 (1954).

Tan, H. S.: On motion of submerged cylinder. J. aeronaut. Sci. 21, 848—849 (1954).

Birkhoff, G., H. H. Goldstine and E. H. Zarantonello: Calculation of plane cavity flows past curved obstacles. Univ. Politec. Torino. Rend. Sem. mat. 13, 205—224 (1954).

Ce mémoire concerne le calcul des solutions approchées de divers problèmes de sillages, qui a été effectué avec la machine à calculer de l'institut d'Etudes Supérieures de Harvard, en utilisant une version améliorée de la méthode décrite dans G. Birkhoff, D. M. Young and E. H. Zarantonello, Proc. Sympos. appl. Math. 4, 117—140 (1953). Les mouvements considérés sont les écoulements plans, symétriques, autour d'obstacles circulaires, elliptiques, paraboliques et anguleux, placés dans un courant indéfini, dans un canal, ou dans un jet, et cela pour différents types de détachements. Les cas du sillage de dimensions finies, et du schéma de Riabouchinsky ont été également traités. En suivant Brodetsky, l'inconnue utilisée par les AA., qui est une fonction construite à partir de la vitesse sur l'obstacle, est approchée par un développement de Fourier, dont sont conservés les  $N$  premiers termes. L'équation fonctionnelle correspondante est remplacée par un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues. Une solution de ce système détermine alors un mouvement du type voulu, autour d'un obstacle dont la courbure prend des valeurs fixées en  $N$  points. La résolution de ce système est elle-même effectuée par itérations successives. La question de la convergence d'une solution du système lorsque  $N$  augmente indéfiniment, ainsi que celle de la convergence des itérations successives ont été examinées dans E. H. Zarantonello, Collect. Math. (1953) (à paraître). Les calculs ont été faits avec  $N=12$  (Brodetsky avait pris  $N=3$ ), le nombre des itérations variant suivant les 46 cas traités de 12 à 552. Le procédé de calcul et les résultats obtenus sont discutés en détail par les AA. Retenons que les obstacles sur lesquels la courbure ne varie pas dans un rapport trop grand (inférieur à 10 environ) sont approchés avec une erreur relative sur la courbure nettement inférieure à  $10^0$ .

R. Gerber.

Müller, W.: Zur Bestimmung der Trägheitskoeffizienten unsymmetrischer Rotationskörper. Österreich. Ingenieur-Arch. 8, 263—284 (1954).

In einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 56, 194) wurde eine Berechnungsmethode für das von den Luftkräften herrührende instabile Moment bei einem schrag angeströmten Rotationskörper am Beispiel des Ellipsoids entwickelt. In der vorliegenden Arbeit wird nach Ableitung allgemeiner Sätze über die erzeugenden Quell- und Dipolsysteme der Gebrauch von Ellipsoid-Koordinaten auch auf nichtsymmetrische Rotationskörper ausgedehnt. Für eine Formengruppe („Ovaloid“), die aus Quellpunkt und Senkenstrecke zusammengesetzt werden kann, sind die Trägheitskoeffizienten in geschlossener Form berechenbar. Gegenüber einem Ellipsoid gleicher Länge und gleichen Volumens besitzt das Ovaloid eine geringere Instabilität. Beim Ellipsoid können die Trägheitskoeffizienten aus den Geschwindigkeiten am Äquator und an den Scheitelpunkten berechnet werden. Dieser Zusammenhang kann benutzt werden, um auch bei allgemeinen Rotationskörpern die Trägheitskoeffizienten näherungsweise aus den Geschwindigkeitsmaxima zu berechnen.

W. Wuest.

Dengler, Max A.: Development of charts for downwash coefficients of oscillating wings of finite span and arbitrary plan form. J. aeronaut. Sci. 21, 809—824, 834 (1954).



Li, Ting-Yi and H. T. Nagatsu: The effect of heat transfer on the behavior of a compressible laminar boundary layer under favorable and adverse pressure gradients. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 850—851 (1954).

Szablewski, W.: Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen. *Ingenieur-Arch.* **22**, 268—281 (1954).

Verf. zeigt, daß man im Anschluß an seine vorhergehenden Untersuchungen auf der Grundlage der Prandtl'schen Mischungsweg-Hypothese auch bei turbulenten Grenzschichten zu brauchbaren approximativen Ansätzen für die Geschwindigkeitsverteilung gelangen kann, und daß man insbesondere auch bei turbulenten Strömungen in divergenten Kanälen, die vom Typ turbulenter Strömungen mit Druckanstieg sind, durch analytische Entwicklung von der Wand her Ansätze erhält, die eine gute Approximation der Geschwindigkeitsverteilung über die Grenzschichtbreite darstellen. Die Übereinstimmung seiner theoretischen Ergebnisse mit ausgeführten Messungen kann als sehr befriedigend bezeichnet werden. *Th. Pöschl.*

Fell, J. and D. C. M. Leslie: Second-order methods in inviscid supersonic theory. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 851—852 (1954).

Denison, M. Richard: Tip or leading-edge temperatures on pointed heat conducting bodies at high supersonic speeds. *J. aeronaut. Sci.* **21**, 858—860 (1954).

Djakov, S. P.: Die Wechselwirkung von Stoßwellen mit tangentiellen und schwachen Unstetigkeiten. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **99**, 921—923 (1954) [Russisch].

Carrier, G. F.: On acoustic resistance to the transient motions of an immersed shell. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **19**, 8—12 (1954).

Der Verf. untersucht die Verteilung eines Druckes, der auf sich in der Flüssigkeit bewegenden Schalen durch den akustischen Widerstand hervorgerufen wird. Dabei stellt er sich die Aufgabe, nicht etwa das vollständige akustische Feld, welches dabei entsteht, zu bestimmen, sondern nur eine genügende Näherungsformel, welche die Beziehungen zwischen der Schalenbewegung und dem akustischen Druck auf die Schale angibt. Eine solche Näherungsbeziehung wird hier für eine zylindrische Schale aufgestellt. Nämlich durch eine Reihe von klar formulierten Näherungen wird eine passende „Greensche Funktion“ abgeleitet, durch welche dann diese Druckverteilung auf der Oberfläche einer Zylinderschale bei beliebiger Schalenbewegung angenähert dargestellt wird. *T. P. Angelitch.*

Grohne, D.: Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. *Z. angew. Math. Mech.* **34**, 344—357 (1954).

Es handelt sich um die bekannte Störungs-differentialgleichung 4. Ordnung ebener Laminarströmungen. Untersucht wird das gesamte Spektrum der Eigenwerte  $c_n$  in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $2\pi x$  und der Reynoldsschen Zahl  $R$ . Für den allgemeinen Fall werden approximative Eigenwertformeln in den Grenzfällen  $xR \rightarrow 0$ ,  $n$  beliebig und  $xR = \text{const.}$ ,  $n \rightarrow \infty$  aufgestellt, wobei die Eigenwerte zu denen der von Rayleigh [Scient. papers III (1887) p. 575—584] behandelten Schwingungen nebender Flüssigkeit in Beziehung gesetzt werden. Im Spezialfall der geradlinigen Couette-Strömung wird bei Einführung einer Folge von Laplace-Integralfunktionen, welche die Reibungslösungen enthält, mit Hilfe von Rekursionsformeln und asymptotischen Reihenentwicklungen eine Näherungsformel für  $xR \rightarrow \infty$ ,  $n$  beschränkt aufgestellt. Gegenüber L. Hopf [Ann. der Physik, IV, **44**, 1—60 (1914)] ergeben sich dabei Korrekturen. Eine entsprechende Formel wird für symmetrische Grundströmungen gewonnen, welche sich bei Einführung einer Folge von Laplace-Integralfunktionen, die die Funktion der sog. Reibungskorrektur nach W. Tollmien [Nachr. Ges. Wiss., Göttingen **1929**, 21—44 (1929)] enthält, mittels der von W. Tollmien (dies. Zbl. **29**, 88) angegebenen asymptotischen Fundamentallösungen ergibt. Es werden dann noch die reibungslosen Eigenwerte diskutiert. Schließlich wird für  $xR \rightarrow \infty$  eine Formel der geometrischen Lage der inneren Reibungsschicht aufgestellt, wobei sich ergibt, daß diese Schicht im Fall der Existenz reibungsloser gedämpfter Eigenwerte eine endliche Dicke und einen endlichen Abstand von der Wand auch in der Grenze behält. *W. Szablewski.*

Verigin, N. N.: Über die Bewegung des Grundwassers in der Nähe von Dämmen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **99**, 917—920 (1954) [Russisch].

## Elektrodynamik. Optik:

● Poincaré, H.: *Électricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques.* (Cours de la Faculté des sciences de Paris.) 2<sup>e</sup> éd. revue et complétée. Paris: Gauthier-Villars 1954. X, 640 p. 62 Abb. 2000 fr.

Bei dieser Buchveröffentlichung handelt es sich um eine durchgesehene und vervollständigte zweite Auflage eines Buches des Verl., in der er seine in der Sorbonne gehaltenen Vorlesungen aus den Jahren 1888, 1890 und 1899 der Öffentlichkeit übergibt. Die ersten beiden Teile behandelt die Theorien von Maxwell und von Helmholtz sowie unter anderem die Prinzipie von Ampère und von Weber. Der dritte Teil behandelt die verschiedenen Theorien der Elektrodynamik bewegter Körper und hier insbesondere die Theorien von Hertz, Lorentz und Larmor. Die Neuauflage und Neubearbeitung dieses Buches ist schon — aber nicht nur — aus historischen Gründen eine dankenswerte Tat, so daß sich eine eingehende Würdigung erübrigt. Es sei daher hier nur kurz der Inhalt der einzelnen Kapitel angegeben: Teil I: 1. Formeln der Elektrostatik; 2. Theorie der elektrischen Verschiebung nach Maxwell; 3. Theorie der Dielektrika von Poisson und ihr Zusammenhang mit derjenigen von Helmholtz; 4. Verschiebung der Leiter unter der Wirkung elektrischer Kräfte. Theorie von Maxwell; 5. Elektrokinetik; 6. Magnetismus; 7. Elektromagnetismus; 8. Elektrodynamik; 9. Induktion; 10. Gleichungen des magnetischen Feldes; 11. elektromagnetische Theorie des Lichtes; 12. magnetische Rotationspolarisation. Teil II: 1. Formeln von Ampère; 2. Theorie der Induktion; 3. Theorie von Weber; 4. Theorie von Helmholtz; 5. Übergang von der Theorie von Helmholtz zu der von Maxwell. Teil III: 1. Theorie von Hertz; 2. Elektrodynamik bewegter Körper; 3. Theorie von Lorentz; 4. Dielektrika; 5. Lichtphänomene in Dielektriken; 6. Optische Phänomene in bewegten Körpern; 7. Einfluß der Bewegung der Erde auf die optischen Vorgänge; 8. Magnetische Rotationspolarisation. Zeeman-Effekt u. ä.; 9. Zur Theorie von Larmor. J. Picht.

Viglin, A. S.: Eine Lösung einer Aufgabe der Magnetostatik für ein unbeschränktes, homogenes, anisotropes Medium. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 457—458 (1954) [Russisch].

Verf. behandelt das Gleichungssystem der Magnetostatik  $\varepsilon_{mn} \partial H_s / \partial x_n = (4\pi/c) j_m$ ,  $B_s = \mu_{sg} H_g + 2\pi M_{0s}$ ,  $\partial B_s / \partial x_s = 0$ , in dem jeder Index die Werte 1, 2, 3 annehmen kann und zweimalige Wiederholung eines Index Summierung von 1 bis 3 bedeutet. Grenzbedingungen sind nicht erforderlich, da es sich um ein unbeschränktes Medium handelt.  $B_i$  läßt sich mit einem antisymmetrischen Tensor  $F_{ik}$  durch  $\partial F_{ik} / \partial x_i$  darstellen, der bis auf einen Summanden  $S_{ik} = \varepsilon_{iks} R_{iks}$  bestimmt ist, wo  $R_{iks}$  in den Indizes  $i, k$  und  $s$  antisymmetrisch ist, was auch für  $S_{ik}$  gilt. Der vollständig antisymmetrische Tensor  $R_{iks}$  kann durch  $\varepsilon_{iks} T$  dargestellt werden, wo  $T$  eine willkürliche skalare Funktion ist, so daß dem Tensor eine willkürliche skalare Bedingung zugeordnet werden kann. Statt  $F_{ik}$  wird ein duales Vektorpotential  $A$  eingeführt:  $F_{ik} = \varepsilon_{iks} A_s$ . Dann gilt  $B_i = \varepsilon_{iks} \partial A_s / \partial x_k$ , woraus  $H$  gefunden werden kann.  $M_{0s}$  ist die  $s$ -Komponente der spontanen (ursprünglichen) Magnetisierung. Für  $A$  findet Verf.

$A_i(x_1, x_2, x_3) = (\mu_{ik})^{-1} \mu_{ic} \int (J_{ik}(X_1, X_2, X_3) dX_1 dX_2 dX_3) \mu_{ks} (X_1 - x_1)(X_2 - x_2)(X_3 - x_3)$ ,  
so daß  $\mu_{ik} \partial A_k / \partial x_i = 0$ . J. Picht.

Mignolet, J. C. P.: L'énergie d'interaction d'un film adsorbé composé de dipôles. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 23, 422—425 (1954).

Mishkin, E.: Theory of the squirrel-cage induction machine derived directly from Maxwell's field equations. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 472—487 (1954).

Haus, H. A.: Equivalent circuit for a passive nonreciprocal network. J. appl. Phys. 25, 1500—1502 (1954).

Sternberg, R. L., J. S. Shipman and W. B. Thurston: Tables of Bennett functions for the two-frequency modulation product problem for the half-wave linear rectifier. Quart. J. Mech. appl. Math. 7, 505—511 (1954).

Crowley, T. H.: On reciprocity theorems in electromagnetic theory. J. appl. Phys. 25, 119—120 (1954).

Das Reziprozitätstheorem für die elektrische und magnetische Feldstärke wird für den Fall von elektrischen und magnetischen räumlichen, flächen- und linienhaften Stromverteilungen angeschrieben.

Walter Franz.

**Bouwkamp, C. J. and H. B. G. Casimir:** On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation. *Physica* **20**, 539–554 (1954).

Verff. entwickeln ein einfaches Verfahren, um das Feld einer gegebenen Strom-Ladungs-Verteilung nach Multipolen zu entwickeln. Zuerst wird das Skalarprodukt des Radiusvektors  $r$  mit den Feldvektoren  $E$  und  $H$  als Lösung je einer inhomogenen Wellengleichung bestimmt; in der Integraldarstellung wird die Greensche Funktion des leeren Raumes nach Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen entwickelt. Durch Division jeder Kugelfunktion  $P_n^m$  durch  $n(n+1)$  erhält man die Debye-Potentiale des Feldes; allerdings konvergiert die so gewonnene Reihendarstellung nur im Äußeren einer Kugel, welche sämtliche Ströme umschließt. Der Zusammenhang mit der Darstellung durch ein Vektorpotential wird diskutiert.

*Walter Franz.*

**Syge, J. L.:** On the transfer of energy between electromagnetic dipoles. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **56**, 1–11 (1954).

Verf. betrachtet neben gewöhnlichen Hertzschen Dipolen, welche Strahlung aussenden („extroverter Dipol“), solche, zu welchen die Strahlung konzentrisch einläuft („introverter Dipol“); die letzteren werden rein mathematisch als Lösungen der Maxwell-Gleichungen aufgestellt ohne den Versuch einer physikalischen Interpretation. Ist im ganzen Raum nur ein extroverter und ein introverter Dipol vorhanden, so ist die nach dem Unendlichen ausgestrahlte Energie gleich der Summe der Energien, welche die einzelnen Dipole ausstrahlen würden (beim introverten ist diese Energieabgabe negativ), wenn sie allein vorhanden wären. Sind die beiden Dipole gleich stark, so wird die von dem einen ausgesandte Energie völlig von dem anderen aufgenommen, genau wie in der Hydrodynamik beim Vorhandensein einer Quelle und einer gleichstarken Senke.

*Walter Franz.*

**Hosemann, R. und D. Joerchel:** Die notwendige Korrektur am Babinet'schen Theorem. *Z. Phys.* **138**, 209–221 (1954).

Im Anschluß an Boersch (dies. Zbl. **44**, 418) werden Korrekturen zum Babinet'schen Prinzip für den Fall Fraunhofer'scher Beugung hergeleitet, und auch experimentell gezeigt, daß die Beugungserscheinungen komplementärer Strukturen keineswegs übereinstimmen, besonders, wenn es sich um regellos verteilte Streuzentren handelt.

Anm. des Ref.: Es fällt auf, daß Verf. ebensowenig wie Boersch auf die strenge Formulierung des Babinet'schen Prinzips durch Bouwkamp und Meijner Bezug nehmen, nach dem von einer unmittelbaren Übereinstimmung der komplementären Beugungserscheinungen nicht die Rede sein kann (s. etwa Westphal, *Physikal. Wörterbuch*, Berlin 1952). Die vorliegenden Betrachtungen scheinen dem Ref. daher nicht eine Kritik an dem strengen Babinet-Prinzip zu sein, sondern eine (nicht unangebrachte) Warnung vor der gedankenlosen Anwendung, insbesondere dort, wo die „komplementären“ Gebilde infolge einer gemeinsamen Aperturblende praktisch gar nicht komplementär sind.

*Walter Franz.*

**Tranter, C. J.:** A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **7**, 317–325 (1954).

In einer früheren Arbeit hat Verf. das Integralgleichungspaar

$$\int_0^{\infty} G(u) f(u) J_\nu(\varrho u) du = g(\varrho) \quad (0 < \varrho < 1), \quad \int_0^{\infty} f(u) J_\nu(\varrho u) du = 0 \quad (\varrho > 1)$$

( $G, g$  gegeben,  $f$  gesucht) für  $\nu = 0$  gelöst. Nunmehr wird der Fall  $\nu = 0$  behandelt, und die Lösung auf die Beugung elektromagnetischer Wellen am engen Spalt angewandt. Dabei ergibt sich ein wesentlich anderes Resultat als bei Groschwitz und Hönl, dies. Zbl. **46**, 431. Verf. gelangt zu dem Schluß, daß in dieser Arbeit an zwei Stellen Fehler enthalten sind.

*Walter Franz.*

**Wisniewski, Felix Joachim:** Zur Korpuskulartheorie der Beugung. *Ann. der Physik*, VI. F. **14**, 141–144 (1954).



Die Lage der Beugungsmaxima des Strichgitters wird aus der Quantenbedingung für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion hergeleitet. *Walter Franz.*

**Peters, A. S. and J. J. Stoker:** A uniqueness theorems and a new solution for Sommerfeld's and other diffraction problems. *Commun. pure appl. Math.* **7**, 565—585 (1954).

Wird eine aus dem Unendlichen einlaufende Welle an einem Objekt gebeugt, welches sich bis ins Unendliche erstreckt, so genügt die Sekundärwelle nicht der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung. Verf. beweist, daß in solchen Fällen die Lösung eindeutig bestimmt ist, wenn die Randbedingung auf dem Objekt und die Kantenbedingung gefordert wird, und die Lösung sich zerlegen läßt in einen vorgegebenen Teil (in den Beispielen die diskontinuierliche geometrisch-optische Welle) und einen zweiten Teil, welcher der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt. Speziell wird gezeigt, daß die Sommerfeldsche Lösung für die Halbebene sich von der geometrisch-optischen Welle um einen Zusatz unterscheidet, für welchen die Ausstrahlungsbedingung gilt. Auf dem Weg über die angegebene Zerlegung wird mittels einer Fourierentwicklung eine neue Herleitung der Sommerfeldschen Lösung gegeben. *Walter Franz.*

**Crydale, J. H.:** Comments on „Diffraction of electromagnetic waves by an aperture in a large screen“. *J. appl. Phys.* **25**, 269—270 (1954).

Zu der Näherungslösung von Bekefi (dies. Zbl. **51**, 197) für die Beugung am Schirm wird hier ein Kommentar gegeben, dessen Diskussion sich nach Ansicht des Ref. erübrigt, da er auf dem Schluß basiert, daß der zum Schirm symmetrische Hertzsche Vektor der gebeugten Welle dort verschwindende Normalableitung besitzt; in Wahrheit tritt dort eine durch den Oberflächenstrom bestimmte Unstetigkeit der Ableitung auf. *Walter Franz.*

**Braunbek, Werner:** Zur Beugung an der kreisförmigen Öffnung. *Z. Phys.* **138**, 80—88 (1954).

C. J. Bouwkamp hat [in: *Diffraction Theory*, New York Univ. Math. Res. Group, Res. Report EM-50 (1953)] darauf hingewiesen, daß ein vom Verf. früher (dies. Zbl. **36**, 419) angegebenes Verfahren zur Berechnung der Beugung an der kreisförmigen Öffnung zu Diskrepanzen führt. Die auf zwei verschiedenen Wegen gewonnenen Ergebnisse stimmen mindestens im Kreismittelpunkt nicht innerhalb der geforderten Näherung überein. Die Diskrepanz wird in der vorliegenden Note aufgeklärt. Es zeigt sich, daß eine der beiden Methoden in einem kleinen Gebiet um den Kreismittelpunkt herum nicht verwendet werden darf: dieses Gebiet geht mit  $ka \rightarrow \infty$  gegen Null. *Walter Franz.*

**Erdélyi, A. and C. H. Papas:** On diffraction by a strip. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **40**, 128—132 (1954).

Der Streuquerschnitt eines idealleitenden ebenen Streifens für eine parallel zur Kante polarisierte elektromagnetische Welle wird nach der Levine-Schwingerschen Variationsmethode näherungsweise berechnet. Die Stromverteilung wird dabei einfach als über den Streifen konstant angesetzt; trotz dieser sehr groben Annahme ergibt sich qualitative Übereinstimmung mit der strengen Rechnung von Morse und Rubinstein (dies. Zbl. **20**, 177); die quantitative Übereinstimmung ist, wie zu erwarten, weniger gut. *Walter Franz.*

**Williams, W. E.:** Diffraction by two parallel planes of finite length. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 309—318 (1954).

Verf. berechnet die Beugung einer ebenen Welle an zwei parallelen unendlich langen idealleitenden ebenen Streifen für den Fall, daß der elektrische Vektor senkrecht zu den Kanten schwingt. Der andere Polarisationsfall wurde bereits durch D. S. Jones (dies. Zbl. **46**, 430) gelöst; doch scheitert seine Methode im vorliegenden Fall an dem Auftreten von Resonanz mit den Eigenschwingungen des zwischen den Streifen befindlichen Hohlraums. — Verf. behandelt das Problem durch Laplace-

transformation der Integralgleichungen, und setzt dabei voraus, daß der Plattenabstand  $d$  kleiner als  $\lambda/2$  ist, die Breite  $l$  der Streifen jedoch groß gegen  $1/k = \lambda/2\pi$ . Die Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $kl$  wird gerade so weit getrieben, daß das Unendlichwerden des Feldes an den Resonanzstellen  $kl \approx n\pi$  vermieden wird. Als Bedingung für die Resonanz ergibt sich genauer  $l = n\pi/k - 2a$ , mit der Endkorrektur  $a = \{d/2\} |\log(2d) - \gamma - 1 - 1/2|n||$  ( $\gamma$  = Eulersche Konstante). Sie unterscheidet sich durch den letzten Term von dem bereits durch W. Chester (dies. Zbl. 39, 415) angegebenen Wert.

Walter Franz.

**Oberhettinger, F.:** Diffraction of waves by a wedge. Commun. pure appl. Math. 7, 551—563 (1954).

Es wird eine elementare Methode angegeben, um den exakten Ausdruck für die Greenschen Funktionen des Keils zu berechnen. Die von einer Geraden parallel zur Kante ausgehende Zylinderwelle wird nach dem Additionstheorem in Zylinderfunktionen bezüglich der Kante entwickelt, und die Reihe in ein Integral umgeformt. Die Sekundärwelle kann in derselben Weise als Integral dargestellt werden; die Winkelfunktionen dieser Entwicklung lassen sich so wählen, daß die Randbedingung auf beiden Keilflächen erfüllt wird. Die dreidimensionalen Greenschen Funktionen kann man hieraus gewinnen, indem man in bekannter Weise die Kugelwelle nach Zylinderwellen entwickelt.

Walter Franz.

**Rubinowicz, A.:** Die Rolle der Beugungswelle in den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen. Acta phys. Polon. 13, 3—13 (1954).

Verf. weist darauf hin, daß seine bekannte Darstellung der Kirchhoffschen Beugungswelle durch ein Randintegral vor allem dann die Berechnung der Beugungserscheinungen erleichtert, wenn der Rand aus einer Raumkurve besteht. Im Fraunhoferschen Falle tritt die Primärwelle bei einer ganz im Endlichen gelegenen Öffnung nicht in Erscheinung; die Beugungswelle bleibt auch in Primärrichtung endlich. Der Fraunhofersche Grenzfall des Randintegrals läßt sich auch direkt aus dem Fraunhoferschen Beugungsintegral gewinnen. Eine Umformung des Beugungsintegrals, welche M. v. Laue (dies. Zbl. 13, 379) für den Fall ebener Berandung angegeben hat, erweist sich als Spezialfall der Formel des Verf.

Walter Franz.

**Biot, A.:** Tables pour le calcul des doublets minces collés, corrigés de l'aberration sphérique. Ann. Soc. Sci. Bruxelles. I. Sér. 68, 167—174 (1954).

**Wynne, C. G.:** The primary aberrations of anamorphic lens systems. Proc. phys. Soc., Sect. B 67, 529—537 (1954).

Als anamorphotische Linsenfolgen werden — sprachlich unrichtig — zweifach symmetrische Folgen bezeichnet, bei denen die Gaußischen Bilder für die beiden Hauptschnitte zusammenfallen und daher eine verzerrte Abbildung (abgesehen von den Abweichungen) entsteht. Der Verf. erwähnt einige Vorgänger, es scheint ihm entgangen zu sein, daß A. Gullstrand vor fast 50 Jahren zweifach symmetrische Folgen allgemein behandelt hat. [Svenska Vet.-Akad. Handl. 41, 84—108 (1906); Arch. Opt. 1, 32—35, 91—94 (1907)]. Wynne beschränkt sich im wesentlichen auf Zylinderflächen mit parallelen Achsen, durch Zusatz von Folgen von Umdrehungsflächen kann man allgemeine Beziehungen zwischen Ding- und Bildebene erreichen. Er bedient sich des Verfahrens, das H. H. Hopkins für Umdrehungsfolgen angewandt hat (dies. Zbl. 40, 275), er leitet die Formel für die Abweichung der Wellenfläche ab, die der Hopkinschen Formel 129 entspricht und behandelt kurz die den verschiedenen Seicelschen Fehlern entsprechenden Abweichungen. Mir scheint aber diese Übertragung der Hopkinschen Formeln nicht einwandfrei, auch kann ich die Wynneschen Summenformeln nicht mit den Gullstrandschen in Einklang bringen, deren Richtigkeit mir zweifellos erscheint.

H. Boegehold.

• **Buchdahl, H. A.:** Optical aberration coefficients. London: Oxford University Press 1954. XX, 336 p. 50 s. net.

Die vorliegende Buchveröffentlichung behandelt in ihrem ersten Teil die monochromatischen Aberrationskoeffizienten, in ihrem zweiten Teil die chromatischen Aberrationskoeffizienten axialsymmetrischer optischer Systeme und im dritten Teil die Änderungen, die jene Aberrationen erfahren, wenn man in jenen Systemen bestimmte Änderungen einführt. Die Untersuchungen werden vom Standpunkt des Mathematikers durchgeführt. Das drückt sich auch darin aus, daß Verf. nicht die in der rechnenden Optik der praktischen Anwendungen üblichen Bezeichnungen bzw. Symbole benutzt, so daß man genötigt ist, die in Anhang J gegebene Zusammenstellung der Symbole, Indizes und Akzente wiederholt zu Rate zu ziehen. Eine solche Abweichung von den üblichen Bezeichnungen scheint aber in diesem Fall auch notwendig zu sein, da Verf. den ganzen Fragenkomplex der Aberrationen in einer Vollständigkeit und mathematischen Gründlichkeit behandelt, die über die sonst übliche weit hinaus geht. Das Buch ist daher dem angewandten Mathematiker, der sich für die Probleme der geometrisch-optischen Abbildung interessiert, sehr zu empfehlen. Nicht minder wertvoll ist es aber auch für den rechnenden Optiker, da es viele ihn besonders interessierende Probleme — z. B. den Einfluß kleiner Abweichungen der Daten [wie z. B. der Krümmungsradien, der Brechungsindizes und der Abstände zwischen den brechenden Flächen] behandelt und eine Anzahl vollständig durchgerechneter Beispiele enthält.

*J. Picht.*

**Pohlack, Hubert:** Über die Lichtabsorption in durchsichtigen Metallschichten. Jenaer Jahrbuch 1954, 1. Teil, 76—90 (1954).

Da sich gewisse Interferenzschichtprobleme auch unter Anwendung teilweise absorbierender Schichtsysteme durchaus befriedigend lösen lassen und sich mit einer einzigen absorbierenden Schicht die reflexionserhöhende Wirkung einer größeren Anzahl dielektrischer Schichtmedien ersetzen läßt, die „Lichtausbeute“ also bei geringerem Herstellungsaufwand durch derartige absorbierende Schichten in Verbindung mit geeigneten dielektrischen Nachbarmedien relativ hoch halten läßt, und da außerdem bei der absorbierenden Schicht zwei ihrem Werte nach geeignet wählbare Variable (Brechzahl und Absorptionskoeffizient) zur Verfügung stehen, untersucht Verf. die Verhältnisse derartiger absorbierender Schichten in ihrer Kombination mit zwei dielektrischen Medien im Hinblick auf Durchlässigkeit und Reflexionsvermögen mathematisch, wobei er — wie in seinen früheren Arbeiten — die Matrizen Schreibweise benutzt. Er behandelt zunächst eine absorbierende Einzelschicht zwischen ausgedehnten dielektrischen Medien, sodann eine Kombination einer absorbierenden und einer dielektrischen Schicht — gleichfalls zwischen ausgedehnten dielektrischen Medien —, wobei einmal die absorbierende Schicht die vordere, ein zweites Mal die hintere Schicht bildet, und leitet für alle drei Fälle die Formeln sowohl für das Durchlässigkeits- als auch für das Reflexionsvermögen ab. Aus den Formeln werden Äquivalenzfolgerungen gezogen. Ferner werden Folgerungen über den Zusammenhang zwischen Durchlässigkeit, Reflexion und Absorption gezogen. Auch läßt sich bei geeigneten Brechzahlen eine Absorptionsverminderung durch Erhöhung der Brechzahl des letzten Mediums erzielen, die mit einer Steigerung der Gesamtlichtausbeute verbunden ist (Durchlässigkeit  $\times$  Reflexion), wie an dünnsten Metallschichten nachgewiesen werden kann.

*J. Picht.*

**Glaser, Walter und Günther Braun:** Zur wellenmechanischen Theorie der elektronenoptischen Abbildung. I. Acta phys. Austr. 9, 41—74 (1954).

Wenn die der Schrödingergleichung gehörende Wellenfunktion unmittelbar hinter der Objektebene eines elektronenoptischen Abbildungssystems aus der Streuungstheorie bekannt ist, kann man daraus mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Kirchhoffschen Formel die Wellenfunktion im übrigen Raum und damit vor allem die Intensitätsverteilung in der Bildebene näherungsweise berechnen. Die Bestimmung der Greenschen Funktion  $G(P, P_1)$  geschieht in einer dem W. K. B.-Verfahren analogen Weise. Sie wird als Produkt der Form  $a(P, P_1) \exp(i\hbar S(P, P_1))$  angesetzt.  $S$  ist das Punkt-Punkteikonal des klassisch-mechanischen Problems, während der Amplitudenfaktor  $a$  in eine Reihe nach Potenzen von  $\hbar$  entwickelt werden kann, für deren Koeffizienten eine Rekursionsformel abgeleitet wird. Für die Auswertung dieser Koeffizienten wird die Methode der stationären Phase angewandt. Die physikalische Bedeutung der angewandten mathematischen Methoden wird ausführlich diskutiert.

*F. Lenz.*



Seman, O. I.: Die relativistischen Aberrationsfunktionen und die Normalkoeffizienten der elektronenoptischen Aberrationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 1151—1154 (1954) [Russisch].

Verf. schreibt das Punkteikonale — mit relativistischer Form der Koeffizienten für statische elektrische und magnetische Felder, in der die beiden speziellen Lösungen  $R_1$  und  $R_2$  der auf die Normalform  $R'' + [3/16 (V'^2/V_r^2) \chi_1 + 1/4 H^2/V_r] R = 0$  reduzierten paraxialen Differentialgleichung auftreten, in der Form

$$-\mathcal{L}_4 = C \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \frac{A}{C} \right)^{2-p} \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^k}{k!} Q_{pk} (\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_1)^k (\vec{\pi}_1)^{2p}$$

Hierin sind  $\vec{\pi}_1$  und  $\vec{\pi}_2$  Vektoren, die die Trajektorie  $u$  bestimmen. Es ist  $w = u V_r^{1/2}$ ,  $\vec{\pi}_1 R_1(z) + \vec{\pi}_2 R_2(z)$ , ferner  $C = R'_1 R_2 - R'_2 R_1 = \text{const}$ ,  $A = [w w'] = \text{const} = V_r^{1/2} [u u'] = C [\vec{\pi}_2 \cdot \vec{\pi}_1]$  und

$$Q_{pk} = C^{1-p} (-1)^k \left| \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{-\infty}^{\infty} S_p R^{2p-k} R_2^k dz \right| \left| \sum_{n=0}^{2p} q_{pn} T_{pkn} \left( \frac{z_i}{z_a} \right) \right|$$

mit  $p = 0, 1, 2$  und  $k = 0, \dots, 2p$ . Es ist noch

$$T_{pkn} = [1/(2p-n)!] (R'_1 \partial/\partial R_1 + R'_2 \partial/\partial R_2)^{2p-n} R_1^{2p-k} R_2^k,$$

ferner  $\chi_1 = 1 + \frac{4}{3} \sigma_r$  mit  $\sigma_r = \sigma(1 + \sigma)$  und  $\sigma = -e/2m_0 c^2$

$$V^* = (-e/2m_0 c^2) (-E/e + \varphi(z, 0)).$$

Verf. gibt sodann die relativistischen S-Funktionen sowie die  $q$ -Konstanten in ihrer funktionalen Abhängigkeit von  $V$ ,  $H$  und  $\sigma$  an. Ferner stellt er die relativistischen Formeln für die Koeffizienten ( $G_{ijk}$ ) der Aberrationen in ihrer funktionalen Abhängigkeit von den  $Q_{pk}$ -Koeffizienten des Eikonals auf. Es ist noch  $V_r$  das relativistische Potential, gleich  $V^*(1 + \sigma)$ . J. Picht.

Islinskij, A. Ju.: Über die Focussierung elektrisch geladener Teilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 96, 721—724 (1954) [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Funktion  $H = H(x)$  eines Magnetfeldes zu bestimmen, das die Eigenschaft besitzt, daß alle vom Anfangspunkt des  $x$ - $y$ -Koordinatensystems nach den verschiedenen Richtungen ausgehenden elektrisch geladenen Teilchen gleicher Geschwindigkeit  $v$ , gleicher Ladung  $e$ , gleicher Masse  $m$  sich im gleichen Punkt der  $y$ -Achse im Abstand  $l$  vom Koordinatenanfangspunkt treffen. Verf. kommt bei seiner Behandlung dieser Frage zu einer singulären Integralgleichung

$$\int_0^{\eta} K(\eta - \zeta) \Phi'(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} l \quad \text{mit Abelschem Kern } K(\tau) = \frac{1 - \tau}{\sqrt{\tau(2 - \tau)}} \quad \text{mit } \tau = \eta - \zeta,$$

die Verf. näher untersucht und mit Benutzung der Laplace-Mellin-Transformation behandelt. Verf. findet für  $H = H(x)$  die Darstellung

$$H(x) = (\pi^2 m c v / e l^2) x \left[ 1 - \frac{1}{2} (\pi x / l)^2 + \frac{3}{40} (\pi x / l)^4 \dots \right].$$

J. Picht.

Elsasser, Walter M.: Dimensional relations in magneto-hydrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 95, 1—5 (1954).

Ähnlich wie in der Turbulenztheorie werden dimensionslose Beziehungen der magneto-hydrodynamischen Gleichungen untersucht und ihre Größenordnungen diskutiert, wie sie für die kosmischen Verhältnisse charakteristisch sind. Die meisten dimensionslosen Größen sind überaus klein oder groß und ermöglichen so zum Teil wesentliche Vereinfachungen der Theorie. Die Untersuchung wird speziell angewandt auf die Bedingungen zur Beschleunigung von Höhenstrahlteilchen. Es stellt sich heraus, daß Beschleunigungen zu höheren Energien nur möglich sind, wenn die in Betracht kommenden linearen Dimensionen sehr groß sind. R. Lüst.

**Pai, Shih I.: Laminar flow of an electrically conducting incompressible fluid in a circular pipe.** J. appl. Phys. **25**, 1205—1207 (1954).

Es wird die laminare Strömung eines Plasmas mit endlicher Leitfähigkeit durch ein kreisförmiges Rohr bei Gegenwart eines äußeren Magnetfeldes untersucht. Hierbei wird axiale Symmetrie vorausgesetzt, und die Geschwindigkeit soll nur eine Komponente in der Richtung der Achse haben, während das Magnetfeld sowohl eine radiale wie auch eine axiale Komponente besitzt. Für die Geschwindigkeitskomponente ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Lösung auf Besselfunktionen führt. Das Magnetfeld und der Druck können dann durch einfache Quadratur ermittelt werden. *R. Lüst.*

**Chandrasekhar, S.: On the inhibition of convection by a magnetic field. II.** Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 1177—1191 (1954).

In Fortführung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **46**, 240) wird die Unterdrückung von thermischer Konvektion durch ein Magnetfeld untersucht. In dieser Arbeit ist der Fall eingeschlossen, daß die Richtung des Magnetfeldes verschieden von der der Gravitation ist. Für die Bestimmung der kritischen Rayleighschen Zahl, bei der Einsetzen von Konvektion erfolgt, wird eine Variationsmethode entwickelt. Rayleighsche Zahlen werden für drei verschiedene Fälle angegeben: a) Beide begrenzenden Oberflächen sind fest; b) beide begrenzenden Oberflächen sind frei; c) eine begrenzende Oberfläche ist fest, die andere frei. Es wird das Resultat abgeleitet, daß, wenn das Magnetfeld und die Schwerkraft verschiedene Richtungen haben, die Konvektion sich in Form von Rollen ausbildet, die unendlich ausgedehnt sind parallel zu der Ebene, in der das Magnetfeld und die Schwerkraft liegen. *R. Lüst.*

**Kaplan, S. A.: Das System der Spektralgleichungen der magnetisch-gasdynamischen isotropen Turbulenz.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 33—36 (1954) [Russisch].

Die Methode der Spektraltheorie, wie sie aus der Theorie der isotropen Turbulenz bekannt ist, soll auf die Magneto-Hydrodynamik angewandt werden. Dazu werden Spektralfunktionen der kinetischen und der magnetischen Energie eingeführt. Die Dissipation der Energie durch folgende Mechanismen wird diskutiert und die entsprechenden Ausdrücke dafür aufgestellt: 1. Dissipation der kinetischen bzw. magnetischen Energie durch Reibung bzw. Joulesche Verluste; 2. Übergang der Energie von kleineren zu größeren Wellenzahlen infolge von Trägheitskräften; 3. Dissipation der Energie durch Diskontinuitätsflächen und Stoßwellen; 4. Übergang von kinetischer Energie in magnetische und umgekehrt. Damit bekommt man zwei Ausdrücke für die volle Dissipation der kinetischen Energie  $c_k$  bzw. magnetischen Energie  $c_m$ . Diese stellen Integralgleichungen für die Spektralfunktionen dar, falls man Annahmen über  $c_m$  und  $c_k$  macht, wie z. B. Stationarität. Lösungen werden jedoch nicht angegeben. *R. Lüst.*

**Kaplan, S. A. und K. P. Stanjukovič: Lösung der Gleichungen der Magneto-Gasdynamik für die eindimensionale Bewegung.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 769—771 (1954) [Russisch].

Die magneto-hydrodynamischen Gleichungen mit unendlicher Leitfähigkeit werden für eindimensionale Bewegungen untersucht, wobei das Magnetfeld senkrecht zur Geschwindigkeit liegen soll und außerdem Isentropie vorausgesetzt wird. Die sich ergebenden Gleichungen sind ganz analog zu den gewöhnlichen eindimensionalen Gleichungen der Gasdynamik, nur daß der Druck bzw. die innere Energie um den magnetischen Druck bzw. die magnetische Energie ergänzt werden müssen. Die allgemeine Zustandsgleichung wird noch näher diskutiert. *R. Lüst.*

### Relativitätstheorie:

**Salzman, G. and A. H. Taub: Born-type rigid motion in relativity.** Phys. Review, II. Ser. **95**, 1659—1669 (1954).

Verff. beginnen mit einer kurzen Herleitung älterer Ergebnisse von Born, Herglotz und Noether; danach ist jede starre Bewegung eines Systems von Massenpunkten in der speziellen Relativitätstheorie entweder eine „Ebenen-Bewegung“ (die Weltlinien sind Orthogonaltrajektorien einer einparametrischen Schar raumartiger Hyperebenen) oder eine „Gruppen-Bewegung“ (die Weltlinien sind Bahnkurven einer einparametrischen Schar von Lorentztransformationen) oder beides zugleich. Der Begriff der Gruppen-Bewegung ist nicht auf die spezielle Relativitätstheorie beschränkt; so kann eine ideale, kompressible, nicht wärmeleitende Flüssigkeit unter dem Einfluß des eigenen Gravitationsfeldes eine Gruppenbewegung ausführen, falls gewisse thermodynamische Bedingungen erfüllt sind. Verff. geben eine Näherungsmethode zur Integration der Feldgleichungen an, erläutern sie am Beispiel einer starr rotierenden, durch die eigenen Gravitationskräfte zusammengehaltenen Flüssigkeit und diskutieren die Erfüllbarkeit der Randbedingung (Verschwinden des Drucks an der Begrenzung). *W. Urich.*

Klein, O.: On a class of spherically symmetric solutions of Einstein's gravitational equations. Ark. Fys. 7, 487—496 (1954).

Verf. schlägt als Analogon der Polytropengleichung in der allgemeinen Relativitätstheorie die Beziehung  $p = A(\varepsilon - \varepsilon_0)^{n-1}$  zwischen dem Druck  $p$  und  $\varepsilon = 1/g_{44}$  vor und berechnet Reihenentwicklungen für kugelsymmetrische Lösungen mit  $\varepsilon_0 = 0$  und  $\varepsilon_0 \neq 0$ . Der Fall  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $n = 1$  entspricht dem Gravitations-Gleichgewicht schwarzer Strahlung und ist nicht durch eine ganz im Endlichen liegende Massenverteilung zu erzeugen; im Falle  $\varepsilon_0 \neq 0$  dagegen ist dies möglich, und zwar, anders als in der Newtonschen Theorie, für alle in Betracht kommenden  $n$ . *W. Urich.*

Callaway, Joseph: Mach's principle and unified field theory. Phys. Review, II. Ser. 96, 778—780 (1954).

Verf. vertritt die Auffassung, das Machsche Prinzip sei in der allgemeinen Relativitätstheorie unerfüllbar, da sich bei vorgegebener Materieverteilung Lösungen der Feldgleichungen grundsätzlich nur durch Hinzufügen nicht in der Theorie enthaltener Annahmen über Raum und Zeit finden ließen. Gibt man das Machsche Prinzip auf, so erhält man eine abgeschlossene Theorie, indem man entweder sämtliche Eigenschaften der Materie vom metrischen Feld her zu verstehen sucht (wie in der einheitlichen Feldtheorie A. Einsteins) oder aber die Einsteinschen Feldgleichungen durch zusätzliche Beziehungen zwischen der Materie und dem metrischen Feld ergänzt. Ein Beispiel für eine Theorie dieser letzteren Art bildet das System der Maxwell'schen Gleichungen und der Einsteinschen Feldgleichungen mit dem Maxwell-Tensor [J. A. Wheeler, Phys. Review, II. Ser. 94, 773 (1954)]. *W. Urich.*

Stephenson, G.: Some properties of non-symmetric unified field theories. Nuovo Cimento, IX. Ser. 12, 279—284 (1954).

Die Arbeit enthält drei voneinander unabhängige Abschnitte. Im ersten Abschnitt werden einige der Konsequenzen diskutiert, die sich ergeben, wenn man den antisymmetrischen Teil des Feldtensors  $g_{mn}$  nicht, wie Einstein, mit dem zum elektromagnetischen Feldtensor  $F^{mn}$  dualen Tensor, sondern mit  $F^{mn}$  selbst identifiziert. Diese Deutung macht Nebenbedingungen erforderlich, deren Vertraglichkeit mit den Feldgleichungen zweifelhaft ist. Im zweiten Abschnitt gibt Verf. ein 16 Gleichungen für die 16  $g_{mn}$  umfassendes System unabhängiger Feldgleichungen an, das an die Stelle der 18 von Einstein postulierten, nicht unabhängigen Gleichungen tritt. Im letzten Abschnitt werden die sechs möglichen Verallgemeinerungen der Relation  $g_{mn;k} = 0$  für den Fall nicht-symmetrischer, reeller oder komplexer  $g_{mn}$  untersucht; die einzig brauchbare ist die von Einstein verwendete  $g_{mn;k} = g_{mn,k} - g_{ms} \Gamma_{kn}^s$ .

$$g_{sn} \Gamma_{mk}^s = 0.$$

*W. Urich.*



Lichnerowicz, André: *Compatibilité des équations de la théorie unitaire du champ d'Einstein*. J. rat. Mech. Analysis **3**, 487—521 (1954).

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung bereits früher veröffentlichter Resultate [C. r. Acad. Sci., Paris **237**, 1383—1386 (1953)]. Im ersten Kapitel werden die Feldgleichungen aufgestellt: Über einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein unsymmetrisches Tensorfeld  $g_{\alpha\beta}$ , das eine quadratische Form der Signatur  $---+$  bestimmt, und ein beliebiger affiner Zusammenhang  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  gegeben. Die Feldgleichungen werden definiert als Gleichungen für die Extremalen des Integrals  $\int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|} dx^0 \dots dx^3$  gegenüber allen Variationen des Fundamentaltensors und des Zusammenhanges, die auf dem Rand von  $C$  verschwinden. Sie lassen sich nach Einführung eines neuen Zusammenhanges  $L_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + 2/3 \delta_\beta^\alpha S_\gamma$  in der Form (1)  $\partial_\sigma g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\sigma}^\mu g_{\sigma\mu} - L_{\sigma\mu}^\lambda g_{\lambda\sigma} = 0$ , (2)  $\partial_\sigma g^{[\sigma\beta]} = 0$ , (3)  $P_{\alpha\beta} = (2/3) (\mathcal{E}_\alpha S_\beta - \partial_\beta S_\alpha)$  schreiben, wobei  $P_{\alpha\beta}$  den Ricci-Tensor des Zusammenhanges  $L_{\beta\gamma}^\alpha$  und  $S_\alpha$  einen beliebigen Vektor bezeichnen. Dabei drückt sich in Gleichung (2) das Verschwinden des Torsionsvektors des neuen Zusammenhanges aus. Schließlich wird noch der Erhaltungssatz abgeleitet. Das zweite Kapitel behandelt das Cauchysche Problem für die Feldgleichungen. Zunächst kann man aus (1) den Zusammenhang  $L_{\beta\gamma}^\alpha$  bis auf einen Ausnahmefall eindeutig durch den Fundamentaltensor und seine ersten Ableitungen bestimmen (vgl. Hlavatý, dies. Zbl. **50**, 218 und Hlavatý-Sáenz, dies. Zbl. **51**, 203). Damit ergibt sich das Hauptproblem vorliegender Arbeit, nämlich aus der Vorgabe des Fundamentaltensors und seiner Ableitungen sowie des Vektors  $S_\alpha$  längs einer Hyperfläche  $F$  den Fundamentaltensor und den Vektor  $S_\alpha$  in der Umgebung von  $F$  aus den Feldgleichungen (2) und (3) zu bestimmen. Verf. zeigt nun, daß dieses Cauchysche Problem, von dem singulären Fall abgesehen, eine bis auf zulässige Koordinatentransformationen eindeutige Lösung besitzt, sofern  $F$  den Kegel  $ds^2 = l_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$  nicht berührt. Andernfalls ergeben sich völlig verschiedene Resultate; die diesen Kegel berührenden Hyperflächen erscheinen als Wellenflächen des einheitlichen Feldes. Eigentümlicherweise wird man hier auf den Tensor  $l_{\alpha\beta}$  (definiert durch  $l_{\alpha\beta} g^{(\mu\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu$ ) geführt, der in der einheitlichen Relativitätstheorie die Rolle des Gravitationsensors zu spielen scheint, und nicht auf  $g_{\alpha\beta}$ . W. Barthel.

Bonnor, W. B.: *The equations of motion in the non-symmetric unified field theory*. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **226**, 366—377 (1954).

Es ist bekannt, daß die Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen in verschiedenen Feldtheorien, die auf die affine Geometrie begründet sind, als nicht gelungen bezeichnet werden kann. Der Verf. gibt eine Verallgemeinerung der Einsteinschen Theorie (hierzu Einstein, dies. Zbl. **50**, 212) an, in welcher er die beiden Feldgleichungen von Einstein:  $R_{ik} = 0$  und  $R_{[ik,l]} = 0$  durch die Gleichungen  $R_{ik} + p^2 U_{ik} = 0$  bzw. durch  $R_{[ik,l]} + p^2 U_{[ik,l]} = 0$  ersetzt (wo  $U_{ik} = g_{ki} - g^{mn} g_{im} g_{nk} + \frac{1}{2} g^{mn} g_{im} g_{nk}$  und  $p$  eine Konstante bedeuten) und beweist, daß sich aus diesen Feldgleichungen mit Hilfe des bekannten Näherungsverfahrens von Einstein, Infeld und Hoffmann (dies. Zbl. **18**, 281) in erster Näherung die Bewegungsgleichungen  $(*) \frac{1}{m} \frac{d^2 w_i}{dt^2} = - \frac{1}{m} \frac{1}{m} w_i r^3 + p^2 q^2 \frac{1}{c} \frac{dw_i}{r^3}$  (mit  $p^2 q^2 = k/c^4$ , wo  $k$  die Gravitationskonstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeuten) ableiten lassen. Die angegebenen Feldgleichungen werden aus dem Variationsprinzip  $\delta \int \{ \mathfrak{L} + p^2 g^{ik} g_{ki} \} d\tau = 0$  abgeleitet, wo  $\mathfrak{L}$  die Einsteinsche Lagrangesche Funktion bedeutet. Die Feldgleichungen  $(*)$  enthalten nicht die ponderomotorische Kraft des magnetischen Feldes. Das hängt damit zusammen, daß dieser Teil der ponderomotorischen Kraft in der ersten Näherung verschwindet. Man sieht unmittelbar ein, daß sich das Feld für  $g_{ik} = 0$  auf das reine Gravitations-

feld reduziert; d. h., daß die  $g_{\mu\nu}$  die Potentiale des Gravitationsfeldes und  $g_{jk}$  die Komponenten der elektromagnetischen Feldstärken angeben. *J. I. Horváth.*

Scherrer, Willy: Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie. *Z. Phys.* **138**, 16–34 (1954).

Die „Lineare Feldtheorie“ ist eine geometrische Theorie der Gravitation und des Elektromagnetismus. Der verwendeten Geometrie liegen vier lineare Differentialformen zugrunde. Neben die Koordinatentransformationen treten die affinen Transformationen der Formen unter sich. Daher gibt es außer den üblichen kovarianten und kontravarianten Vektoren noch die bei Koordinatentransformationen invarianten „Formenvektoren“ und die entsprechenden tensoriellen Größen, deren Tensoralgebra und -analysis dargelegt wird. Die aus einem Wirkungsprinzip folgenden Feldgleichungen führen auf auch lokal geltende Erhaltungssätze und sind also frei von einer bekannten Schwierigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie. Mit Hilfe der linearen Grundformen läßt sich eine Metrik definieren; die aus Zusatzannahmen abgeleiteten Bewegungsgleichungen sind die Gleichungen der Geodätischen dieser Metrik.

*W. Urlich.*

Scherrer, Willy: Zur linearen Feldtheorie. I. (Ein Wirkungsprinzip und seine Anwendung in der Kosmologie.) *Z. Phys.* **139**, 44–55 (1954).

Verf. untersucht kosmologische Lösungen seiner linearen Feldtheorie (vgl. vorgeh. Referat). Ein gegenüber der früheren Arbeit erweitertes Wirkungsprinzip führt nach einigen Spezialisierungen und unter der Voraussetzung sphärischer Raumsymmetrie auf eine schon aus der Einsteinschen Theorie bekannte Lösung. Drei weitere Lösungen werden aus Feldgleichungen mit einem – dem kosmologischen Glied der Einsteinschen Theorie entsprechenden – Zusatzglied gewonnen. Die eine dieser Lösungen ist nur dann physikalisch sinnvoll, wenn man, nach dem Vorgehen von Behr, an Stelle der Hubbleschen Zahl den halben Wert einsetzt.

*W. Urlich.*

Gupta, Suraj N.: Gravitation und electromagnetism. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 1683–1685 (1954).

Tonnelat, Marie-Antoinette: Validité de la solution générale des équations d'Einstein  $g^{\mu\nu} : \varrho = 0$  dans le cas  $q = 0$ . *C. r. Acad. Sci., Paris* **239**, 1468–1470 (1954).

Goto, Ken-iti: Wave fields in de Sitter space. *Progress theor. Phys.* **12**, 311–354 (1954).

Es werden Wellengleichungen für Teilchen mit beliebigen Spinwerten bei Zugrundelegung eines de Sittersehen Raumes aufgestellt. Die drei kleinsten Spinwerte 0,  $\frac{1}{2}$  und 1 werden ausführlich behandelt.

*A. Papapetrou.*

Synge, J. L.: Note on the Whitehead-Rayner expanding universe. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **226**, 336–338 (1954).

Pirani, F. A. E.: On the influence of the expansion of space on the gravitational field surrounding an isolated body. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **50**, 637–638 (1954).

Verf. untersucht den Einfluß des kosmologischen Gliedes auf gewisse Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für eine inkohärente Flüssigkeit, die das Gravitationsfeld eines isolierten Körpers in einem homogenen, isotropen Kosmos beschreiben. Ist das kosmologische Glied verschieden von Null, so gibt es einen maximalen Radius für die stabilen Bahnen eines Probeteilchens im Feld des Zentralkörpers. Der maximale Bahnradius ist von der gleichen Größenordnung wie die beobachteten Radien lokaler Nebelhaufen.

*W. Urlich.*

### Quantentheorie:

Laugwitz, Detlef: Zur Rolle der pythagoreischen Metrik in der Physik. *Z. Naturforsch.* **9a**, 827–832 (1954).

Die von v. Weizsäcker (dies. Zbl. 48, 7) erhobene Forderung, die pythagoreische Metrik so zu begründen, daß auch die quadratische Metrik einbezogen wird, läßt sich durch ein Isotropiepostulat erfüllen. Dieses besagt im Zustandsraum, daß alle Zustände vor der Beobachtung gleichberechtigt sind. *H. Kümmel.*

**Tietz, T.:** Note to the solution of the Schrödinger equation for finite systems. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. 12, 449—451 (1954).

**Senitzky, I. R.:** Harmonic oscillator wave functions. *Phys. Review*, II. Ser. 95, 1115—1116 (1954).

**Gibbs, Julian H.:** Electric polarization of charged particles in square potential wells. *Phys. Review*, II. Ser. 94, 292—294 (1954).

Verf. untersucht die Schrödingerschen Wellenfunktionen eines geladenen Teilchens in einem linearen Kastenpotential mit einem zusätzlichen homogenen elektrischen Feld. Für kleine Felder liefert die Störungsrechnung eine positive Polarisierbarkeit des Grundniveaus, eine negative der höheren Niveaus; die letzte erklärt sich daraus, daß das Teilchen im Gebiet hoher potentieller Energie sich langsamer bewegt und daher länger verweilt. Die strenge Lösung für starke Felder zeigt beim zweiten Quantenzustand eine Umkehrung zu positiver Polarisierbarkeit, die Polarisierbarkeit der höheren Niveaus bleibt negativ. — Eine kanonische Gesamtheit zeigt im schwachen Feld für hohe Temperaturen einen linearen Anstieg der Polarisierbarkeit mit  $1/T$ , für tiefe Temperaturen einen Grenzwert, entsprechend der Polarisierbarkeit des Grundniveaus. *Walter Franz.*

**Braunbek, Werner:** Das einfachste Beispiel für die Ortskorrelation der Elektronen im quantenmechanischen 2-Elektronen-Problem. *Z. Naturforsch.* 9a, 959—963 (1954).

Die Wellenfunktionen und Ortskorrelationen von zwei Teilchen ohne Wechselwirkung im linearen Kastenpotential mit unendlichen hohen Wänden werden explizit angegeben und diskutiert. *W. Brenig.*

**Hove, Léon van:** Correlations in space and time and Born approximation scattering in systems of interacting particles. *Phys. Review*, II. Ser. 95, 249—262 (1954).

Es wird eine zeitabhängige Verallgemeinerung der quantenmechanischen Zweiteilchenkorrelation vorgeschlagen:  $G(\mathbf{r}, t)$  beschreibt die Korrelation der Anwesenheit eines Teilchens in  $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$  zur Zeit  $t + t'$  und der Anwesenheit eines Teilchens in  $\mathbf{r}'$  zur Zeit  $t'$  gemittelt über  $\mathbf{r}'$ . Sie tritt auf bei Streuversuchen als raumzeitliche Fouriertransformierte der Winkel- und Energieverteilung  $S(\mathbf{k}, \omega)$  der Streuteilchen und kann auf diese Weise experimentell bestimmt werden. Insbesondere spielt sie eine Rolle bei Streuversuchen mit langsamen Neutronen an festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen wegen des relativ großen Energieaustausches zwischen Neutronen und Streuobjekt und der daraus folgenden merklichen Energieverteilung der gestreuten Teilchen. *W. Brenig.*

**Sirokov, Ju. M.:** Über eine neue Klasse relativistischer Gleichungen für Elementarteilchen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 94, 857—859 (1954) [Russisch].

Verf. weist darauf hin, daß zur relativistischen Invarianz von Spinwellengleichungen vom Lubanskischen Typus die typischen Kommutatorrelationen der vierdimensionalen infinitesimalen Transformationen nur für den Gesamtdrehimpuls erfüllt sein müssen. Er läßt also die übliche vollständige Vertauschbarkeit zwischen allen Bahndrehimpulsoperatoren und allen Spinoperatoren fallen und zeigt durch ein Beispiel, daß die Verallgemeinerung nicht leer ist. Die entstehende Wellengleichung hat  $2s + 1$  Komponenten, wo  $s$  der Spin ist und erfordert zur Quantisierung keine Löchertheorie, also etwa als Gleichung des Protons nicht die Existenz eines Antiprotons. Verf. hat seine Wellengleichungen auf Zusammenhänge mit denen von Wigner nicht untersucht. *F. L. Bauer.*



**Wolfenstein, L.:** Possible triple-scattering experiments. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 1654—1658 (1954).

Streut man hochenergetische Protonen an einer einzigen Streusubstanz, so wirkt diese als Polarisator. Eine nochmalige Streuung an einer als Analysator wirkenden Streusubstanz erlaubt es, zwei Parameter aus zwei getrennten Streuexperimenten zu bestimmen, wobei bei dem ersten Experiment die beiden Streuebeneen zueinander parallel, bei dem zweiten zueinander senkrecht angeordnet werden.

*Th. Seel.*

**Kikuta, Takashi:** Upper and lower bounds of Born approximation. I. II. *Progress theor. Phys.* **12**, 225—233, 234—240 (1954).

Der Verf. untersucht die Eigenschaften der Bornschen Näherung in einer Dimension und zeigt, daß obere und untere Schranken für jede Ordnung der Bornschen Näherung angegeben werden können. Hierzu genügt ein einziger Parameter, nämlich die Angabe des Konvergenzradius. Im Konvergenzbereich der Bornschen Näherung wird bewiesen, daß im Falle positiv oder negativ definiter Wechselwirkungskraft die Bornsche Näherung von gerader Ordnung stets eine untere Grenze des absoluten Wertes von  $\tan \delta$  ( $\delta$  bedeutet die Phasenverschiebung) gibt. In einem Anhang zeigt der Verf. auch, daß unter den gleichen Bedingungen das Schwingersche Variationsprinzip stets der zweiten Bornschen Näherung überlegen ist. In Teil II erweitert der Verf. seine Untersuchungen über die Bornsche Näherung auf die Behandlung von dreidimensionalen Problemen. Er gibt Beziehungen an zwischen eindimensionalen und dreidimensionalen Bornschen Näherungen. Dann vergleicht er die Konvergenzradien für charakteristische Beispiele.

*P. Urban.*

**Altshuler, Saul and J. F. Carlson:** Time dependent variational principle. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 546—548 (1954).

Die Verff. geben ein Variationsprinzip für die Übergangsamplitude an, welches für Wechselwirkungen geeignet ist, die die Zeit explizit enthalten. Die Form des Verfahrens ist ähnlich dem Schwingerschen Variationsprinzip für die Übergangsamplitude der Stoßtheorie im Falle von stationären Zuständen.

*P. Urban.*

**Gell-Mann, M. and W. E. Thirring:** Use of causality conditions in quantum theory. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 1612—1627 (1954).

Die Verff. zeigen, daß die Schranken für die Streuamplituden durch die Kausalitätsforderungen auch durch die Forderung abgeleitet werden können, daß der Kommutator der Feldoperatoren verschwindet, wenn die Operatoren in raumartig gelegenen Punkten genommen werden. Dann werden die Probleme der Streuung spinloser Partikeln an einem Kraftzentrum und die Streuung von Photonen an einem quantisierten Materiefeld diskutiert. Die Kausalitätsforderungen führen in zwangloser Weise zur bekannten Dispersionsbeziehung von Kramers und Kronig. Eine neue Summenregel für den Kernphotoeffekt wird ebenfalls abgeleitet und die Streuung von Photonen an Nukleonen eingehend diskutiert.

*P. Urban.*

**Matthews, P. T. and Abdus Salam:** Renormalization. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 185—191 (1954).

Verff. berichten über die von Gupta (dies. Zbl. **42**, 455) vorgeschlagene Renormierungsmethode, in der von Anfang an mit „renormierten“ Feldfunktionen gerechnet wird, dafür dann Kompensationsterme in die Lagrangefunktion aufgenommen werden. Der Zusammenhang mit dem Verfahren von Dyson (dies. Zbl. **33**, 142) und Salam (dies. Zbl. **42**, 455, **44**, 434) wird aufgezeigt. Abschließend wird die Renormierung der Bethe-Salpeter-Gleichung besprochen.

*P. Penzlin.*

**Matthews, P. T. and A. Salam:** The Green's functions of quantised fields. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 563—565 (1954).

**Ferretti, B.:** On the renormalization technique in quantum electrodynamics. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 457—459 (1954).

Umezawa, H. and S. Oneda: Commutation relations between different fields. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. 12, 566—567 (1954).

Imamura, Tsutomu: Potential in quantum field theory. *Progress theor. Phys.* 12, 402—403 (1954).

Wataghin, G.: Sui campi non locali. *Nuovo Cimento*, Suppl., IX. Ser. 12, 103—106 (1954).

Rayski, J.: Mass quantization in non-local field theory. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. 12, 815—816 (1954).

Kortel, F.: Sind große Energieübertragungen mit nichtlokaler Wechselwirkung verträglich? *Z. Phys.* 138, 192—208 (1954).

Es wird untersucht, inwieweit die Einführung einer nichtlokalen Wechselwirkung die Möglichkeit einer Vielfacherzeugung von Elementarteilchen beeinflusst. Den Ausgangspunkt bilden die nichtlinearen Gleichungen von Schiff (schwache Kopplung) und Born-Infeld (starke Kopplung), in denen die nichtlokale Wechselwirkung vermitteltst eines lorentzinvarianten Formfaktors in die nichtlinearen Terme eingeführt wird. Es werden Lösungen gesucht, die von den Raumkoordinaten  $x_1, \dots, x_n$  und der Zeit  $t$  nur vermitteltst der Invarianten  $x_1^2 + \dots + x_n^2 - t^2$  abhängen. Die resultierenden gewöhnlichen Integro-Differentialgleichungen werden nun, nach Umformung in reine Integralgleichungen, mit der Methode der schrittweisen Näherung behandelt. Nach einer eingehenden Untersuchung der Lösungen und einem Vergleich mit den Heisenbergschen lokalen Resultaten (dies. Zbl. 47, 220) stellt sich heraus, daß die Möglichkeit großer Energieübertragungen auch in dem nichtlokalen Falle besteht, obwohl für die Bornsche Gleichung die Anzahl der entstehenden Elementarteilchen etwas vermindert, dagegen ihre Energie vergrößert wird.

*J. Rzewuski.*

Chrétien, M. and R. E. Peierls: A study of gauge-invariant non-local interactions. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A 223, 468—481 (1954).

The authors investigate a new type of non-local electrodynamics which possess (in contradistinction to other non-local formulations) the property of gauge-invariance. It is shown on the example of the electron self-energy and of the vacuum polarization, that the divergences appearing in the theory are still worse than those of the conventional local electrodynamics. The origin of these divergences is studied in some detail and it is concluded that no simple generalization of the proposed scheme may improve the situation.

*J. Rzewuski.*

Gell-Mann, M. and M. L. Goldberger: Scattering of low-energy photons by particles of spin 1/2. *Phys. Review*, II. Ser. 96, 1433—1438 (1954).

Les AA. reprennent le calcul de la diffusion des photons par les particules de spin  $\frac{1}{2}$  suivant les puissances de la fréquence de la lumière. Les deux premiers termes (terme Thomson pour l'ordre zéro, terme linéaire en fréquence), sont évalués par trois méthodes: 1° classiquement selon le modèle de Kramers pour la particule de Dirac, 2° selon la mécanique quantique de Dirac pour une particule portant un moment magnétique anormal, 3° exactement selon la théorie quantique des champs pour une particule de Dirac en interaction avec un champ local et renormalisable tel qu'un champ de photons ou de mésons. Les résultats des trois calculs sont identiques et montrent que le terme linéaire dépend seulement de la masse, de la charge et du moment magnétique de la particule diffusante.

*G. Petiau.*

Low, F. E.: Scattering of light of very low frequency by systems of spin 1/2. *Phys. Review*, II. Ser. 96, 1428—1432 (1954).

L'A. calcule les deux premiers termes du développement suivant les puissances de la fréquence de l'amplitude de diffusion de la lumière par un système de fermions de spin  $\frac{1}{2}$  couplés localement par des bosons de spin 0. Le premier terme correspond au terme de Thomson et ne dépend que de la charge  $e$  et de la masse  $m$ , tandis que le second terme plus complexe dépend de  $e$ ,  $m$  et du moment magnétique  $\mu$ . Les expres-

sions obtenues sont des conséquences directes de l'existence de l'invariance de jauge et de l'invariance relativiste.

*G. Petiau.*

**Foldy, Leslie L. and Erik Eriksen:** Some physical consequences of vacuum polarization. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 1048—1051 (1954).

**Cutkosky, R. E.:** Internal Bremsstrahlung. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 1222—1225 (1954).

**Senitzky, I. R.:** Quantum effects in the interaction between electrons and high-frequency fields. I. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 904—911 (1954).

In den letzten Jahren war man bestrebt, immer höhere Frequenzen zu erzeugen. Der Verf. behandelt die Frage, von welcher Größenordnung die Frequenz sein muß, so daß quantenmechanische Effekte wirksam werden, und welche Art von Effekten auftreten. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, diese Fragestellungen erschöpfend zu behandeln und befriedigende Untersuchungen des Problems durchzuführen. Es werden die quantenmechanischen Effekte als klein betrachtet und der Verf. beschränkt sich dabei nur auf Terme erster Ordnung. Die Störungsrechnung, welche verwendet wird, betrachtet die Wechselwirkung zwischen Elektron und Feld als klein. Die Rechnung wird nichtrelativistisch durchgeführt.

*P. Urban.*

**Kothari, L. S.:** Riesz potential and the elimination of divergences from meson theory. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **67**, 580—585 (1954).

Mit Hilfe der in einer früheren Arbeit (*Proc. phys. Soc., Sect. A* **65**, 930—933 (1952)) vom Verf. eingeführten „modifizierten Rieszschen Potentials“ werden berechnet: das Potential eines Punktteilchens auf seiner Weltlinie (klassisch), und (quantentheoretisch) die Selbstenergie eines Nukleons in einem neutralen vektoriellen bzw. pseudoskalaren Mesonfeld. Verf. erhält endliche Ausdrücke, die an Stelle der bei anderen Autoren auftretenden Abschneidefaktoren bzw. Hilfsfelder eine unbestimmte Konstante von der Dimension einer Länge enthalten.

*F. Penzlin.*

**Lee, T. D. and R. Christian:** Intermediate coupling method for meson-nucleon scattering. *Phys. Review*, II. Ser. **94**, 1760—1767 (1954).

An Hand der skalaren geladenen Mesonentheorie mit ruhenden Quellen wird gezeigt, daß die Meson-Nukleon-Streuung durch eine intermediäre Kopplung erfaßt werden kann. Die Ergebnisse der Rechnungen gehen in den beiden Grenzfällen in die Ergebnisse der Rechnungen mit der Methode der schwachen bzw. starken Kopplung über. Die Arbeit stellt eine Anwendung der Gedankengänge von Tomonaga [*Progress, theor. Phys.*, **2**, 6 (1947)] dar. Vergleiche mit den experimentellen Daten werden nicht gemacht; eine Anwendung der verwendeten Methodik auf das pseudoskalare Feld wird angekündigt. Aus den bisherigen Ergebnissen schließt Verf., daß die  $\pi^-p$ -Streuung durch ein anziehendes, und die  $\pi^-p$ -Streuung durch ein abstoßendes Potential kurzer Reichweite erzeugt wird.

*F. Cap.*

**Arnowitz, R. and S. Gasiorowicz:** Covariant approximation scheme for Green's functions of coupled fields. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 538—545 (1954).

Die Greenschen Funktionen für die Streuung und Erzeugung von einem Nukleon und einer beliebigen Anzahl von Mesonen genügen einem System von gekoppelten linearen Integralgleichungen. Unter gewissen Voraussetzungen kann dieses unendlich viele Gleichungen enthaltende System verkürzt werden. Methoden zur näherungsweise Lösung dieses Systems werden diskutiert und der Formalismus wird u. a. auf das 2-Nukleonenproblem angewendet.

*F. Cap.*

**Okubo, Susumu:** Note on the second kind interaction. *Progress theor. Phys.* **11**, 80—94 (1954).

Nach Einteilung von Sakata (Sakata und Umezawa, dies. Zbl. **49**, 275) nennt man nicht renormierbare Wechselwirkungen solche von „zweiter Art“. Da diese Einteilung jedoch auf der Störungstheorie beruht, besteht die Möglichkeit, daß ohne Heranziehung dieser Methode gewisse Wechselwirkungen anders zu klassifizieren



seien. Verf. zeigt zunächst, daß es Wechselwirkungen gibt, die frei von Divergenzen sind, wenn die störungstheoretische Methode nicht angewendet wird — eine Renormierung ist daher nicht notwendig. Insbesondere werden für verschwindende Mesonenmasse die pseudovektorielle Kopplung in der neutralen pseudoskalaren Theorie nach einer Dyson-Transformation und die skalare Theorie mit vektorieller Kopplung untersucht. In beiden Fällen werden alle Divergenzen ohne Renormierung durch Zusatzglieder in der Lagrangefunktion kompensiert oder als triviale multiplikative Faktoren herausgehoben. *F. Cap.*

**Klein, Abraham:** Suppression of pair coupling in nuclear forces. *Phys. Review*, II. Ser. **95**, 1061—1064 (1954).

Der Verf. zeigt, daß die effektive Kopplungskonstante für die Emission eines Mesonenpaares im Grenzfalle kleiner Energien ebenso groß ist wie die renormalisierte Kopplungskonstante der Meson-Nukleon-Streuung. Für diesen Beweis wird die Rechentechnik von Deser et al. [ibid. **91**, 711—723 (1954)] herangezogen. *F. Cap.*

**Verde, M.:** Pseudoscalar nuclear field and polarization. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 452—454 (1954).

**Gatto, R.:** Magnetic effects in the scattering of muons by nuclei. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 613—618 (1954).

**Minguzzi, A.:** Optical model of nuclei and elastic backscattering of mesons. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. **12**, 799—806 (1954).

**Hatano, Shigeaki, Tadashi Kaneno and Mitsuo Shinde:** The effects of heavy particles on  $\pi$ -meson-proton scattering. *Progress theor. Phys.* **12**, 167—176 (1954).

Da bei Energien in der Größenordnung von 900 MeV bereits schwere Teilchen erzeugt werden können, untersuchen die Verff. den Einfluß von Strahlungskorrekturen auf die  $\pi$ - $p$ -Streuung. Es werden 1 Teilchen mit dem Spin 0 oder 1 und  $\theta$  Teilchen mit dem Spin 0 oder 1, isotoper Spin  $\frac{1}{2}$  angenommen und  $\pi$  NN,  $\theta$  1 N und  $\pi$  1.1 Wechselwirkungen eingeführt. Es wird systematisch untersucht, ob derartige Wechselwirkungen in der Lage sind, breite Maxima im Wirkungsquerschnitt zu erzeugen. Dies ist zum Teil der Fall. *F. Cap.*

**Tamm, I. E., Ju. A. Goffand und V. Ja. Fajnberg:** Halbphänomenologische Theorie der Wechselwirkung von  $\pi$ -Mesonen mit Nukleonen. I. Die Streuung von  $\pi$ -Mesonen an Nukleonen. *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **26**, 649—667 (1954) [Russisch].

Ausgehend von Feldgleichungen, in denen das symmetrische pseudoskalare Mesonenfeld außer an das übliche Nukleonenfeld pseudovektoriell und pseudoskalar noch an ein Feld mit  $\sigma$ - und  $\tau$ -Spin  $3/2$ , das die isobaren Zustände der Nukleonen beschreiben soll, ladungsinvariant gekoppelt ist, berechnen die Verff. Wirkungsquerschnitte für die elastische Streuung von  $\pi$ -Mesonen an Nukleonen ohne und mit Ladungsaustausch. Dabei werden die S-Matrixelemente in niedrigster störungstheoretischer Ordnung ausgewertet und die dazugehörige Heitlersche Dämpfungsgleichung gelöst. Es gelingt den Verff., den drei Kopplungskonstanten und der angeregten Nukleonenmasse zwei Sätze numerischer Werte zuzuteilen, die beide zu befriedigender Übereinstimmung mit zur Zeit empirisch bekannten diesbezüglichen differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitten führen. *V. Glaser.*

### Kernphysik:

**Bruceckner, K. A.:** Nuclear saturation and two-body forces. II. Tensor forces. *Phys. Review*, II. Ser. **96**, 508—516 (1954).

In einer früheren Arbeit (Bruceckner-Levinson-Mahmoud, dies. Zbl. **55**, 431) wurde eine Methode entwickelt, mit der es möglich wird, die potentielle Energie eines Vielkörperproblems in guter Näherung aus dem Zweikörperpotential (mittels der hieraus berechneten Phasenverschiebungen bei Streuung) zu bestimmen. In der vorliegenden Arbeit werden die Tensorkräfte mit berücksichtigt und die ent-

sprechenden Phasenänderungen mit dem Experiment verglichen, für ausreichend gut befunden und anschließend daraus die Bindungsenergie sowie der Kernradius bei Sättigung berechnet. Hierbei spielen, verglichen mit der ersten Arbeit, sowohl die Tensorkräfte wie auch Oberflächeneffekte (auf dem Umweg über die Termdichte eines Fermigases) eine erhebliche Rolle.

*R. Hagedorn.*

**Trainor, L. E. H.:** Phenomenological many-body exchange forces. Phys. Review, II. Ser. **95**, 801—810 (1954).

Mit Hilfe der Permutationsgruppe lassen sich die 2-Körperraustauschkräfte zwanglos zu Mehrkörperraustauschkraften verallgemeinern. In der vorliegenden Arbeit wird dies durchgeführt und im Rahmen des Wignerschen „uniform model“ die 2-, 3- und 4-Körperkräfte (Erwartungswerte) angegeben. Die allgemeinen Bedingungen für Sättigung werden diskutiert. Für die entstehenden Matrixelemente der von 2, 3, ... Koordinatensätzen abhängenden Potentiale (d. h. unter Ausschluß der Permutationsoperatoren) hat man bestenfalls vage Größenordnungsabschätzungen. Für die 3-Körperkräfte folgen solche etwa aus den Energiedifferenzen benachbarter Isobaren: Hier sagt die Theorie voraus, daß eine solche Differenz besteht, je nachdem ob beim Isobar mit größtem Isotopenspin ( $\tau_z$ ) die Zahl der ungeraden oder der geraden Nukleonen überwiegt. Numerische Werte aus  $\beta$ -Zerfall zeigen eine schwache Tendenz dieser Art (Schaleneffekte können nicht berücksichtigt werden!) und lassen im Rahmen dieses Modells die Dreikörperkräfte als nicht vernachlässigbar erscheinen.

*R. Hagedorn.*

**Yamaguchi, Yoshio:** Two-nucleon problem when the potential is nonlocal but separable. I. II. Phys. Review, II. Ser. **95**, 1628—1634, 1635—1643 (1954).

Es wird versucht die Zweinukleonenprobleme auf Grund nichtlokalisierbarer, aber separabler Potentiale neu zu berechnen. Für ein lokalisierbares Potential gilt:  $(\mathbf{r} | V | \mathbf{r}') = V(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Sonst heißt das Potential nicht lokalisierbar. Ein nicht lokalisierbares, aber separables Potential nimmt die Form an  $(\mathbf{r} | V | \mathbf{r}') = (\hat{\mathbf{r}} | u) v^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}')$ , bzw. im Momentenraum  $(\mathbf{p} | V | \mathbf{p}') = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}} | u) g^*(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}')$ . Für  $g(\mathbf{p})$  wird der spezielle Ansatz gemacht  $g(\mathbf{p}) = (p^2 + p_0^2)^{-1}$ , was im Koordinatenraum die übliche Hulthénsche Deuteroneigenfunktion  $u = e^{-\alpha r} e^{-\beta r}$  ergibt. Es ist daher begreiflich, daß die erhaltenen Resultate sich mit den bisherigen, auf Grund der üblichen Potentiale berechneten im wesentlichen decken. Während in Teil I die einfachste mögliche Annahme  $g(\mathbf{p}) = g(p)$  zugrunde gelegt wurde, wird in Teil II die Annahme  $g(\mathbf{p}) = C(p) + 8^{-1/2} 3 p^{-2} (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}) (\hat{\sigma}' \cdot \mathbf{p}) = (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}') T(p)$  gemacht. Der zweite Term bewirkt die bekannte Mischung des Deuterongrundzustandes aus einem  ${}^3S_1$ - und  ${}^3D_1$  Zustand. Für den Spezialfall  $C(p) = (p^2 + p_0^2)^{-1}$  und  $T(p) = -t p^2 (\gamma^2 + p^2)^{-2}$  wird der Photoeffekt am Deuteron berechnet und ein wesentlicher Einfluß der Tensorkraft bei hohen Photonenenergien gefunden.

*Th. Seel.*

**Malenka, Bertram J.:** Polarization in high-energy elastic nucleon-nucleon scattering. Phys. Review, II. Ser. **95**, 522—526 (1954).

**Solbrig jr., A. W.:** Effects of certain three-body nuclear interactions in  $\text{H}^3$  and  $\text{He}^3$ . Phys. Review, II. Ser. **95**, 831—836 (1954).

**Redlich, Martin G.:** Interactions between some two-nucleon configurations. Phys. Review, II. Ser. **95**, 448—452 (1954).

**Levinger, J. S. and D. C. Kent:** Independent particle model and the nuclear photoeffect. Phys. Review, II. Ser. **95**, 418—424 (1954).

**Scott, J. M. C.:** Neutron-widths and the density of nuclear levels. Philos. Mag., VII. Ser. **45**, 1322—1331 (1954).

Unter der vereinfachenden Annahme (die in einer detaillierteren Untersuchung ohne weiteres fallen gelassen werden könnte), daß ein  $l = 0$ -Neutron niedriger Energie elastisch gestreut wird, werden statistische Mittelwerte für  $\Gamma/D$  berechnet, wo  $\Gamma$  die

Termbreite und  $D$  der mittlere Abstand der Resonanzniveaus des „compound nucleus“ ist. Bekanntlich bestimmen sich Lage und Breite der Resonanzniveaus aus den Nullstellen der logarithmischen Ableitung der Wellenfunktion des eingefangenen Neutrons im Kerninnern, genommen am Kernrande. Diese Ableitung wird mit Hilfe einer Störungsrechnung gewonnen, in der als ungestörter  $H$ -Operator  $H^i - H^v$  angesetzt wird:  $H^i$  ist der vollständige Operator des Targetkerns,  $H^v$  derjenige des Neutrons in einem Potential  $V(r)$ , der gestörte Operator ist der vollständige Operator des Compoundkerns:  $H^i + H^v + H'$ , wo  $H'$  nicht näher bestimmt wird. Über die zeitliche Entwicklung von einem ungestörten Eigenzustand aus geben die Diracsche Störungsrechnung einerseits und die Transformationsmatrix gestört - - ungestört andererseits Auskunft. Beide kann man leicht verknüpfen, wenn die Resonanzenergien dicht beieinander liegen, und man die Termdichte einführen kann. Dieselbe Transformationsmatrix bzw. Mittelwerte über gewisse ihrer Elemente gehen in die Darstellung der logarithmischen Ableitung der Wellenfunktion ein und bestimmen auf diese Weise die Breiten der Resonanzstellen. R. Hagedorn.

**Yoshida, Shiro:** Reduced widths on collective model. Progress theor. Phys. **12**, 141—155 (1954).

Die reduzierten Termbreiten (reduced level widths) für „compound nuclei“ werden auf Grund des „kollektiven Modells“ (Bohr-Mottelson, dies. Zbl. **51**, 443) mit den von Bohr und Mottelson angegebenen Wellenfunktionen berechnet. Der Verf. beschränkt sich auf die Fälle eines oder zweier Nukleonen außerhalb einer abgeschlossenen Schale, behandelt aber die von Bohr und Mottelson unterschiedenen Fälle starker und schwacher Kopplung (der Einzelnukleonen an die deformierbare Kernoberfläche) einzeln. Dabei ergibt sich, daß die schwache Kopplung etwas kleinere Termbreiten liefert als das Einteilchenmodell, während die Werte für starke Kopplung mit wachsendem Spin des compound nucleus rasch sehr klein gegen die des Einteilchenmodells werden. Bei schwacher Kopplung ist auch eine leichte Abnahme mit wachsender Nukleonenzahl bemerkbar. Für eine Reihe leichter Kerne ( $7 \leq A \leq 17$ ) werden die reduzierten Termbreiten für  $s$ - und  $d$ -Welle numerisch verglichen: Einteilchenmodell einerseits; Kollektivmodell, unterscheidend schwache und starke Kopplung, andererseits; dazu die experimentellen Werte. Letztere liegen meist zwischen den Werten für starke und schwache Kopplung (die wegen der niedrigen Spins untereinander nicht sehr verschieden ausfallen). R. Hagedorn.

**Spruch, Larry und G. Goertzel:** Magnetic internal Compton coefficients in the Born approximation. Phys. Review, II. Ser. **94**, 1671—1678 (1954).

Die absoluten und relativen Wahrscheinlichkeiten für eine gleichzeitige Emission eines  $\gamma$ -Quants und eines  $K$ -Elektrons bei der inneren Umwandlung werden für magnetische Multipolübergänge des Kerns berechnet. Dieser hier als innerer Compton-Effekt bezeichnete Prozess wird mit Hilfe der Bornschen Näherung behandelt. Die Rechnung gilt daher nur für kleine Kernladungszahlen und große Energiedifferenzen der betrachteten Übergänge. Die Berechnung wurde mittels des Feynman-Formalismus durchgeführt. Das Verhältnis der Zahl der kontinuierlichen  $\gamma$ -Quanten zur Zahl der  $K$ -Elektronen diskreter Energie ist vom Kernmatrixelement unabhängig und nimmt ab, wenn die Kernladungszahl oder die Multipolordnung des Kernübergangs zunimmt. Die Winkelverteilung (Winkel zwischen den  $\gamma$ -Quanten kontinuierlicher Energie und den zugehörigen  $K$ -Elektronen kontinuierlicher Energie) hängt empfindlich von der Multipolordnung des Übergangs ab, wenn große Winkel und vergleichbare Energien von  $\gamma$ -Quant und Elektron betrachtet werden. B. Stech.

**Baumann, K. und H. Robl:** Die Strahlungsverluste bei der inneren Umwandlung. Z. Naturforsch. **9a**, 511—515 (1954).

Die Energie- und Winkelverteilung der bei der inneren Umwandlung auftretenden  $\gamma$ -Strahlung (innere Bremsstrahlung) wird für elektrische und magnetische Multipolübergänge des Kerns ausgerechnet. Die Rechnung beschränkt sich auf



K-Elektronen und kleine Kernladungszahlen. Für den Zwischen- und Endzustand der Elektronen konnten daher näherungsweise ebene Wellen angenommen werden. Für energiereiche Lichtquanten ergeben sich in der Energie und in der Winkelverteilung ausgeprägte Maxima. Für kleine Strahlungsverluste geht das Ergebnis in die schon von Chang und Falkoff angegebene Formel über.

*B. Stech.*

**Kennedy, J. M. and W. T. Sharp:** Gamma radiation from reactions induced by polarized particles. *Phys. Review*, II. Ser. 95, 440 (1954).

• **Hughes, D. J.:** Neutron optics. New York: Interscience Publishers Inc. 1954. VII, 136 p., 34 illus., 1 table. \$ 2,50.

Es wird eine kurze, allgemein gefaßte Übersicht über die Grundlagen der Anwendung langsamer (thermischer) Neutronen gegeben. 1. Grundsätzliches zur Streuung von Neutronen, Vergleich mit Elektronen- und Röntgenstreuung. 2. Herstellung intensiver, möglichst gut monochromatischer Neutronenströme, Besprechung verschiedener Streuversuche. 3. Die Messung des kohärenten Streuquerschnittes, Neutron-Proton-Streuung, Neutron-Elektronstreuung. 4. Vorzüge der Neutronenstreuung gegenüber Elektronen- und Röntgenstreuung bei speziellen Fragen der Kristallstrukturbestimmung, Analyse von Gitterschwingungen und Spinwellen. 5. Magnetische Streuung an ferromagnetischem, antiferromagnetischem und paramagnetischem Material.

*W. Brenig.*

**Kolos, W.:** The influence of hindered rotation on the scattering of slow neutrons by bound protons. *Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. II* 2, 423 -427 (1954).

Berücksichtigt man bei der Streuung langsamer Neutronen an gebundenen Protonen die mögliche Drehbewegung des das Proton bindenden Moleküls als starren symmetrischen Rotator auf Grund des Bornschen Näherungsverfahrens, so zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung der gerechneten Wirkungsquerschnitte mit den experimentell von Janik gemessenen.

*Th. Sexl.*

**Sawicki, Jerzy:** The deuteron polarizability and its effect on the Rutherford scattering. *Acta phys. Polon.* 13, 225—228 (1954).

Läßt man eine Polarisation des Deuterons durch einfallende Teilchen zu, so besteht die gesamte Energie eines Deuterons aus der Summe der kinetischen Energie, der potentiellen Energie im Coulombfeld  $Z e^2/R$  und einer Polarisationsenergie  $a Z^2 e^2 / 2 R^4$  ( $a \sim 10^{-32} \text{ cm}^3$ ). Berechnet man den Einfluß des Polarisationsgliedes auf die Rutherford-Streuung nach der Newtonschen Mechanik, so ist die Gültigkeit der Resultate beschränkt auf einen Bereich  $n = Z e^2 / \hbar v = Z c / 137 v > 1$ . In der vorliegenden Arbeit wird der gleiche Effekt auf Grund quantentheoretischer Störungsmethoden abgeschätzt und für das Verhältnis des differentiellen Streuquerschnittes  $d\sigma$  zu dem der Rutherford-Streuung  $d\sigma_R$  folgende Formel erhalten:

$$d\sigma/d\sigma_R = 1 + Z \alpha (\pi n / \sin \pi n) e^{-\pi n} e^{n \ln \sin^2 (\theta/2)} k^2 \sin^2 (\theta/2) \cdot (1/\alpha) J(\theta)^2,$$

wobei  $J(\theta)$  ein nicht in geschlossener Form auswertbares Integral über eine hypergeometrische Funktion bedeutet. Approximative Näherungsformeln für große und kleine  $n$  werden angegeben. (Anmerkung des Ref.: Der letzte Ausdruck in der Klammer ist nicht dimensionslos und daher durch Druck- oder Rechenfehler entsteht).

*Th. Sexl.*

**Corinaldesi, E.:** High-energy expansions of phase shifts. *Nuovo Cimento*, IX. Ser. 12, 438—448 (1954).

Es werden die Phasenverschiebungen der Klein-Gordon- und Diracgleichung nach Potenzen des inversen Impulses entwickelt, unter Benützung einer Methode, welche auf der Iteration einer Integralgleichung beruht. Der Verf. zeigt, daß diese Entwicklungen nur unter gewissen einschränkenden Bedingungen für das Potential durchführbar sind. Ferner wird ein Verfahren angegeben, mit welchem die Phasenverschiebungen einer großen Anzahl von Potentialen aus jenen eines vorgegebenen Potentials berechnet werden können, wobei wieder Reihenentwicklungen nach Potenzen des inversen Impulses Verwendung finden. Es wird außerdem gezeigt, daß diese Methode für kleine Werte des Drehimpulses schon stark konvergiert und für die Berechnung der Streuung hochenergetischer Elektronen an Kernen sehr geeignet ist.

*P. Urban.*

## Fester Körper:

Müser, H. A.: The physical nature of a metal surface in conduction theory. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 45, 1237—1246 (1954).

Linek, Allan: A machine for the calculation of structure factors. *Czechosl. J. Phys.* 4, 180—185 und engl. Zusammenfassg. 186, (1954) [Russisch].

The problems of crystal structures continuously demand the calculation of structure factors, which represent the influence the distribution of the atoms in the crystal cell on the intensity of interference lines. In the structure factors we find the expressions

$$(1) \quad \cos 2\pi(hx + ky + lz) \quad \text{and} \quad \sin 2\pi(hx + ky + lz).$$

The paper describes a calculating machine for determining these expressions. It is composed of three parts. Into the first part we insert the values  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , and switch on the corresponding mathematical operations. The range is large enough to ensure the value of the argument (1) to less than one thousandth of the circumference of a circle. The adding part of the machine is composed of customary relays. The third part is a decoder, which connects a certain value of the argument (1) with the value of the corresponding sine or cosine together with the sign. The values of these functions are computed to 4 decimals. The total duration of the mathematical operations is about  $\frac{1}{4}$  of a second. Autoreferat.

Richter, H. und H. Krödler: Elektronenstrahl-Interferenzen an Einkristallen. *Z. Naturforsch.* 9a, 147—164 (1954).

Die kinematische Gittertheorie liefert für den Intensitätsverlauf von Kristalliten, deren Ausdehnung in Achsenrichtung  $a_3$  klein ist gegenüber derjenigen in  $a_1$  und  $a_2$ , bekanntlich im Fourierraum zu  $a_3$  parallele stäbchenförmige Reflexe. Mit Hilfe der Ewaldschen Ausbreitungskugel läßt sich bei gegebener Wellenlänge  $\lambda$  und Einstrahlrichtung parallel  $a_3$  die höchste noch auftretende Ordnung  $h_1$  der Reflexsorte  $(h_1, 0, 0)$  berechnen zu  $|h_{1\max}| = \lfloor a_1/a_2 \cdot \rfloor^2 a_1/2M_3$ , wobei  $M_3$  die Zahl der Elementarzellen in Richtung  $a_3$  ist. Bei Elektronenstrahlen von  $\lambda = 0,04 \text{ \AA}$  (Anregungsspannung 94 kV) und  $a_1 = a_2 = 2 \text{ \AA}$  ist z. B.  $|h_{1\max}| = 4$  für  $M_3 = 5$ . Wenn man also unter diesen Aufnahmebedingungen ein feststehendes kubisches Raumgitter bestrahlt, so treten alle Reflexe  $(h_1, h_2, 0)$  mit  $|h_1|^2 + |h_2|^2 \leq 4$  auf und es ist keine Rede vom Vorliegen eines „zweidimensionalen Flächengitters“. Dieses wird an zahlreichen Aufnahmen illustriert. Bei Durchstrahlen von auf  $10^{-6} \text{ cm}$  abgeätzten Metallfolien werden bei Ni Zwillingskristallite, längs (111) um 30° gegeneinander verdreht oder Drillingskristallite, längs (112) um 60° und (120° gegeneinander verdreht, beobachtet, wobei letztere unter geringförmiger Achsenveränderung auch auf ersteren aufwachsen können. Bei Bi werden 30° um die hexagonale Achse verdrehte Zwillinge beobachtet. Sind diese in eine mikrokristalline Bi-Phase gleicher Netzebenenabstände eingebettet, so wird Umwegenregung ihres (110)-Debye-Kreises an den (110)-Reflexen der Zwillinge beobachtet. Ebenso werden schuppenförmige  $\text{Me}(\text{OH})_2$ -Kristallite in der C-6- und  $\alpha$ -Form sowie auf polierter Kupferunterlage orientiert aufwachsende Kohlenwasserstoffe untersucht. R. Hosemann.

Jahrreiss, Heribert: Zur Berechnung von Elektroneninterferenzen an Zwillingskristallen. *Ann. der Physik*, VI. F. 15, 21—30 (1954).

Betrachtet wird ein allseitig flächenzentriertes kubisches Gitter, wobei als Elementarzelle eine hexagonale dreifach primitive Gitterzelle gewählt wird. Kristall I bzw. II weisen hierin die Atomlagen auf  $(0\ 0\ 0)$ ,  $(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3})$  bzw.  $(0\ 0\ 0)$ ,  $(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3})$ ,  $(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3})$ . Die letzte Zahl entspricht der Koordinate in Richtung der Trigyre,  $a_3$  sei die Länge der Elementarzelle in dieser Richtung. Sind ferner  $(h_1\ h_2\ h_3)$  die Miller-Indices dieser Elementarzelle und  $M_I$  bzw.  $M_{II}$  die Zahl der Gitterzellen in Richtung der Trigyre, so ist die Streuamplitude eines Kristalliten I bzw. II proportional

$$(1) \quad R_I = [1 - \exp(2\pi i M_I h_3)] [1 - \exp(2\pi i h_3)]^{-1} \times \\ [1 + \exp\{(2\pi i/3)(h_1 + 2h_2 + h_3)\} + \exp\{(2\pi i/3)(2h_1 + h_2 + 2h_3)\}],$$

$$(2) \quad R_{II} = [1 - \exp(2\pi i M_{II} h_3)] [1 - \exp(2\pi i h_3)]^{-1} \times \\ [1 + \exp\{(2\pi i/3)(2h_1 + h_2 + h_3)\} + \exp\{(2\pi i/3)(h_1 + 2h_2 + 2h_3)\}].$$

Dabei liegt die eine Ecke des Kristalliten jeweils bei  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Verschiebt man nun Kristall II parallel in sich so, daß diese Ecke liegt bei  $(0, 0, \frac{1}{3}M_{II}a_3)$ , so bilden beide Kristallite



I, II einen Zwilling mit der Berührungsebene  $x_3 = M_I a_3$ . Für seine Streuamplitude folgt (3)  $R = R_I + R_{II} \exp(2\pi i M_I a_3)$ . Verf. diskutiert die Gleichungen (1) bis (3) am Spezialfall  $M_I = M_{II} = 1$  und findet, daß das Kopplungsglied  $\exp(2\pi i M_I a_3)$  nur für  $M_I \lesssim 5$  merkliche Unterschiede zwischen der Streuintensität isolierter Kristallite I, II und derjenigen des Zwillings verursacht. Wenn Verf. aber allgemein schließt, „daß eine Berücksichtigung des Kohärenzverhaltens bei Zwillingsbildung nur dann notwendig ist, wenn man es mit extrem dünnen Schichten von der Dicke weniger Elementarzellen zu tun hat“, so steht dies nicht in Übereinstimmung mit den von ihm gefundenen Gleichungen (1) bis (3). Die Reflexe  $h_1 + 2h_2 = 3n$  ( $n$  ganze, positive oder negative Zahl) liefern nämlich

$$(4) \quad R = [1 - \exp(2\pi i (M_I + M_{II}) h_3)] [1 - \exp(2\pi i h_3)]^{-1} \times \\ [1 + \exp((2\pi i/3) h_3) + \exp((2\pi i/3) 2h_3)]; \quad h_1 + 2h_2 = 3n,$$

während bei den Reflexen  $h_1 + 2h_2 \neq 3n$  entweder (1) oder (2) verschwindet: (5)  $|R| = |R_I|$  oder  $R = R_{II}$ , falls  $h_1 + 2h_2 = 3n$ . Bei letztgenannten Reflexen reflektiert also immer nur der eine beider Zwillinge, die Streustrahlung zwischen den Zwillingen ist also „inkohärent“, bei ersteren dagegen streut stets der gesamte Zwilling kohärent, gleichgültig, wie groß  $M_I$  und  $M_{II}$  ist. Und dieses steht in volliger Übereinstimmung mit den Ergebnissen Pattersons (dies. Zbl. 48, 236) an Kristallen mit statistischer Vielfachzwillingsbildung, wo die Reflexgruppe (4) stets „kristallin“, die Reflexgruppe (5) stets „diffus“ ist.

R. Hosemann.

#### Kitajgorodskij, A. I.: Theorie der statistischen Methode der Strukturanalyse.

Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 94, 225—228 (1954) [Russisch].

Durch Einführung des Begriffes des Strukturproduktes von unitären Strukturamplituden  $X = F_{k_1 k_2} \cdot \bar{F}_{l_1 l_2} \cdot \bar{F}_{k_1 - l_1, k_2 - l_2} \cdot F_{l_1 l_2}$  wird eine Theorie entwickelt, welche zur Grundgleichung von Zachariasen  $S(F)_{k_1 k_2} \cdot S(F)_{h_1 k_1 l_1} = S(F)_{h_1 - l_1, k_1 + k_2, l_1 + l_2}$  ( $S$  = Vorzeichen von  $F$ ) führt. (Nach deutscher Übersetzung referiert). W. Nowacki.

Bertaut, Félix: Sur les relations linéaires entre constantes de Madelung. C. r. Acad. Sci., Paris 239, 234—235 (1954).

Auf analytischem Wege, mittels der Pattersonfunktion, gestützt auf eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 49, 284), beweist Verf., daß zwischen den Madelungkonstanten  $M(A B_j)$  der „Verbindungen“  $AB_j$  ( $j = 1$  oder 2) für das NaCl-, CsCl-, ZnS- und  $\text{CaF}_2$ -Gitter die beiden linearen Beziehungen bestehen

$$M(\text{CaF}_2) - 2M(\text{ZnS}) - M(\text{CsCl}) = 0 \text{ und } M(\text{CaF}_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right) M(\text{NaCl}) - 2M(\text{CsCl}) = 0.$$

Unter den verschiedenen Definitionsmöglichkeiten der Madelungskonstanten wählt Verf. hierbei diejenige, bei der der kleinste Ionenabstand in dem betr. Gitter als Längeneinheit dient. [Daß lineare Beziehungen zwischen diesen 4 Größen bestehen, folgt aber bereits daraus, daß sich die Gitterenergie dieser 4 Gitter durch nur 3 verschiedene Werte Epsteinscher Zetafunktionen linear ausdrücken lassen, wie Ref., Physik. Z. 24, 97—104 (1923), gezeigt hat. Da von diesen 3 Werten noch 2 voneinander linear abhängig sind, die eine das doppelte der anderen, müssen also 2 voneinander linear abhängige lineare Beziehungen zwischen den 4 Größen existieren.]

O. Emersleben.

Schiff, L. I.: Paper representations of the noncubic crystal classes. Amer. J. Phys. 22, 621—622 (1954).

Ariyama, Kanetaka and Shoichi Mase: Electronic structure of graphite and boron nitride. Progress theor. Phys. 12, 244—246 (1954).

Ariyama, Kanetaka and Shiochi Mase: An interpretation for the electronic conductivity and diamagnetic susceptibility of graphite. Progress theor. Phys. 12, 246—248 (1954).

Pfirsch, Dieter und Eberhard Spenke: Die effektive Masse eines Kristallelektrons und das Ehrenfestsche Theorem. Z. Phys. 137, 309—312 (1954).

Verff. weisen darauf hin, daß die Abweichung der effektiven Elektronenmasse von der gewöhnlichen Masse auf die Kräfte zurückzuführen ist, welche das Gitter auf das Elektron ausübt. Außer dem üblichen Wert  $m_{\text{eff}} = \hbar^2/(e E a k^2)$  hat man bei sehr rasch einsetzenden Kraftwirkungen ( $\sim 10^{-14}$  sec) rasch oszillierende Zusätze zu erwarten, welche mit Zenerschen Band-Band-Übergängen zusammenhängen.

Walter Franz.



**Koster, G. F.:** Theory of scattering in solids. Phys. Review, II. Ser. **95**, 1436—1443 (1954).

Die Streuung von Elektronen an Gitterstörungen wird mit Hilfe einer Linearkombination von Wannier-Funktionen behandelt. Die sich ergebenden Differenzgleichungen für die Koeffizienten der Wannier-Funktionen werden an Hand einfacher Beispiele diskutiert. Die Formulierung der Differenzgleichungen mit Hilfe einer Greenschen Funktion führt zu dem richtigen asymptotischen Verhalten der Streuwelle. Die Methode vermeidet eine Reihe von Annahmen, die bei den sonst üblichen Behandlungsmethoden des Streuproblems gemacht werden. *W. Oldekop.*

**Koster, G. F. and J. C. Slater:** Wave functions for impurity levels. Phys. Review, II. Ser. **95**, 1167—1176 (1954).

Die Berechnung der Störstellenterme in Kristallen wird mit Hilfe einer Linearkombination von Wannier-Funktionen durchgeführt. Für die Koeffizienten der Linearkombination ergibt sich ein System von Differenzgleichungen. Diese Differenzgleichungen werden für zwei einfache Störstellenprobleme bei einer linearen Kette gelöst und die bei der Lösung auftretenden Schwierigkeiten an diesen einfachen Fällen erläutert. Anschließend wird eine allgemeine Methode zur Lösung der Differenzgleichungen mitgeteilt, die gewisse Vorzüge gegenüber den früheren Behandlungsmethoden des Störstellenproblems haben dürfte. *W. Oldekop.*

**Koster, G. F. and J. C. Slater:** Simplified impurity calculation. Phys. Review, II. Ser. **96**, 1208—1223 (1954).

Die von den Verff. in früheren Veröffentlichungen beschriebene Methode für die Behandlung von Störstellen in Kristallen wird auf den Fall einer lokalisierten Störstelle in einem primitiven kubischen Gitter angewandt, wobei der Einfluß der Störstelle auf die Wellenfunktionen eines einzelnen Bandes betrachtet wird. Die Ergebnisse werden mit den Resultaten von Näherungsmethoden verglichen. *W. Oldekop.*

**Kerner, Edward H.:** Periodic impurities in a periodic lattice. Phys. Review, II. Ser. **95**, 687—689 (1954).

**Elliott, R. J.:** Theory of the effect of spin-orbit coupling on magnetic resonance in some semiconductors. Phys. Review, II. Ser. **96**, 266—279 (1954).

Es wird der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf die übliche Bandentheorie der Elektronen im Kristallgitter untersucht, wobei besonders die Bandstruktur von Störstellenhalbleitern mit Diamantgitter betrachtet wird. Die Landé'schen  $g$ -Werte werden für verschiedene Elektronenzustände berechnet, wobei sich unterschiedliche Werte ergeben, je nachdem wie weit die Fermikante von einer Bandentartung entfernt ist. Die berechneten Spin-Gitter-Relaxationszeiten stimmen mit den bei Silicium und Alkalimetallen beobachteten Werten recht gut überein. *W. Oldekop.*

**Elliott, R. J.:** Spin-orbit coupling in band theory. Character tables for some „double“ space groups. Phys. Review, II. Ser. **96**, 280—287 (1954).

Der Einfluß des Elektronenspins auf die Energiebänder in Kristallen wird vom gruppentheoretischen Standpunkt untersucht, wobei insbesondere das primitive, flächenzentrierte und raumzentrierte kubische Gitter, das Diamantgitter und die hexagonale Kugelpackung behandelt werden. Besondere Aufmerksamkeit wird der durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung hervorgerufenen Aufspaltung sonst entarteter Bänder gewidmet. *W. Oldekop.*

**Pikus, G. E.:** Der Photoeffekt an Oberflächenniveaus. Žurn. eksper. teor. Fiz. **27**, 369—381 (1954) [Russisch].

Es wird ein in einer Richtung begrenzter Kristall betrachtet, dessen periodische Struktur in der Ebene senkrecht dazu vernachlässigt wird. Einem solchen Potential kommen sogenannte Oberflächenzustände zu, die an der Oberfläche lokalisierten Elektronen entsprechen. Dieselben werden einer einfallenden Lichtwelle ausgesetzt und

mittels stationärer Störungsrechnung der dabei auftretende Photostrom berechnet. Die numerische Auswertung der Stromformel ergibt, daß der Photoeffekt aus Oberflächentermen sehr wohl eine beträchtliche Rolle spielen kann. *W. Brauer.*

**Herman, Frank, Joseph Callaway and Forman S. Aetn:** Comparison of various approximate exchange potentials. *Phys. Review, II. Ser. 95*, 371–373 (1954).

**Abrahams, Elihu:** Electron-electron scattering in alkali metals. *Phys. Review, II. Ser. 95*, 839–840 (1954).

**Pines, David:** Paramagnetic susceptibility of conduction electrons. *Phys. Review, II. Ser. 95*, 1090–1091 (1954).

**Ziman, J. M.:** The electrical and thermal conductivities of monovalent metals. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 226*, 436–454 (1954).

Verf. unterzieht die Näherungsansätze der Bloch'schen Leitfähigkeitstheorie, Vernachlässigung der Umklappprozesse, der Unterschiede zwischen Longitudinal- und Transversalfrequenzen der Gitterwellen und der Abhängigkeit des Streuquerschnitts der Elektronen vom Winkel, einer Kritik und versucht diese Effekte zu berücksichtigen. Numerische Rechnungen für Na zeigen bessere Übereinstimmung mit dem Experiment als die Bloch'schen Werte, aber es bleiben immer noch Diskrepanzen. Verf. versucht, aus der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes abzulesen, wie die Abhängigkeit des Streuquerschnitts vom Winkel beschaffen sein muß, um die experimentellen Resultate richtig zu beschreiben.

*W. Brenig.*

**Tessman, Jack R.:** Magnetic anisotropy at 0 K. *Phys. Review, II. Ser. 96*, 1192–1195 (1954).

Die Rechnung von Holstein und Primakoff über Spinwellen in einem Ferromagnetikum mit Austausch- und magnetischen Dipol-Wechselwirkungen wird zur Herleitung von Formeln für die Anisotropieenergie am absoluten Nullpunkt verwendet. Dabei kann der Ferromagnetismus auch durch eine von beiden Wechselwirkungen allein entstehen. Die drei Gittertypen: Einfach-kubisch, kubisch-raumzentriert und kubisch-flächenzentriert werden diskutiert.

*G. Heber.*

**Peski-Tinbergen, Tineke van and C. J. Gorter:** Susceptibilities of antiferromagnetic crystals at the absolute zero of temperature. *Physica 20*, 592–602 (1954).

Mittels der Molekularfeldtheorie des Antiferromagnetismus werden gewisse anormale Erscheinungen in der Suszeptibilität diskutiert, die auftreten, wenn das äußere Magnetfeld in die Größenordnung des Molekularfeldes gelangt. Es handelt sich also um den Übergang von Antiferromagnetismus zu Paramagnetismus. Entsprechende Beobachtungen sind bei tiefsten Temperaturen und Feldern von etwa 100 O an  $\text{Co}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$  und  $\text{CrNH}_3\text{CH}_3(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$  gemacht worden.

*G. Heber.*

**Mason, W. P.:** Derivation of magnetostriction and anisotropic energies for hexagonal, tetragonal and orthorhombic crystals. *Phys. Review, II. Ser. 96*, 302–310 (1954).

Die Arbeit hat zum Ziel, festzustellen, wie viele und welche Konstanten zur Charakterisierung der Magnetostriction und der Anisotropieenergie von hexagonalen, tetragonalen und orthorhombischen Kristallen notwendig sind. Es wird diskutiert, welche Experimente man auszuführen hat, um diese Größen zu bestimmen.

*G. Heber.*

**Cohen, M. H.:** Decomposition of the scalar product of two symmetric tensors. *Phys. Review, II. Ser. 95*, 674–675 (1954).

Es wird eine einfache Regel zur Zerlegung des skalaren Produktes zweier symmetrischer Tensoren (bez. der Drehgruppe)  $T$  und  $U$  in eine Summe von Produkten der irreduziblen Komponenten von  $T$  und  $U$  hergeleitet und an zwei Anwendungsbeispielen (Dipol-Dipol-Wechselwirkung und statische Multipol-Wechselwirkung) erläutert.

*W. Urlich.*

# Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben

- Abdel-Aty, S. H. (Non-central  $\chi^2$  distribution) 129.  
 Abrahams, Elihu (Electron-electron scattering) 453.  
 Abramjan, B. L. (Temperaturspannungen in einem Betonblock) 182.  
 Abramov, L. M. (Lebesguesche Funktionen gewisser Summationsmethoden) 61.  
 Abzug, Malcolm J. (Small-disturbance airplane dynamics) 196.  
 Acharya, Y. V. G. and L. S. Srinath (Stresses in isotropic material) 181.  
 Achieser, N. I. (Paare von Integralgleichungen) 100.  
 — — — und I. M. Glasermann (Lineare Operatoren im Hilbert-Raum) 111.  
 — — — s. N. Ja. Sonin 65.  
 Ackermann, W. (Decision problem) 245.  
 Acton, Forman S. s. F. Herman 453.  
 Adachi, Ryuzo (Second order differential equation) 118; (Simultaneous differential equations, I.) 119.  
 Adrian, Paul (Ausscheidungswahrscheinlichkeiten) 135.  
 Afriat, S. N. (Composite matrices) 15.  
 Aggarwala, B. D. (Singularly loaded plates, I.) 179.  
 Agmon, Shmuel (Quasi-conformal mappings) 304.  
 Agnew, Ralph Palmer (Fruilani integrals) 56; (Tauberman relations) 283.  
 Agudo, Fernando Roldão Dias s. Dias Agudo, Fernando Roldão 250.  
 Aitchison, J. and J. A. C. Brown (Estimation problem) 131.  
 Aitken, D. J. and K. B. Henderson (Algebra, I.) 14.  
 Al'ber, S. I. (Homologien homogener Räume) 164.  
 Albert, Stanislaw S. Ph. Morrison 229.  
 Albrecht, F. (Théorème de T. Ważewski) 80.  
 — R. s. J. Heinehold 74.  
 Alder, Henry L. (Rogers-Ramanujan identities) 40; (Method for finding primes) 41.  
 Aleskerov, S. A. und K. M. Cal'jan (Modell EM-8 als Integrationsapparat) 354.  
 Alexander, J. M. and H. Ford (Expanding a hole in a thin plate) 425.  
 Alexandroff (Aleksandrov) P. (S.) (Homöomorphie von Punktmengen) 417.  
 — — — s. Enzyklopädie der Elementarmathematik 13.  
 Altman, M. (Fredholm theory of linear equations) 110.  
 Altshuler, Saul and J. F. Carlson (Variational principle) 443.  
 Alumjaë, N. A. (Kreiszyklindrische Schale) 180.  
 Ammeter, H. (Théorie collective du risque) 135.  
 Andersen, B. W. (Vibration of plates) 428.  
 Anderson, Alan Ross (Modal system of Feys-von Wright) 248.  
 — Oskar (Statistische Methodenlehre in Sozialwissenschaften) 363.  
 — R. D. (Continuous collections of continuous curves) 161.  
 — — — and Mary-Elizabeth Hamstrom (Continuous curves filling up a continuous curve) 161.  
 André, Johannes (Nicht-Desarguessche Ebene) 385; (Perspektivitäten) 385.  
 Andrews, Fred C. (Asymptotic behavior of rand tests) 373.  
 Andrunakievič, V. A. (Ringe mit Minimalbedingung für Ideale) 29.  
 Ankeny, N. C. and P. Erdős (Diophantine equations) 35.  
 Antona, Giuseppina d' (Metrica angolare iperbolica) 386.  
 Antosiewicz, H. A. and P. Davis (Liapunov's conditions for stability) 87.  
 Arbault, Jean (Transformations de Reynolds) 125.  
 Arens, Richard and I. M. Singer (Function values as boundary integrals) 335.  
 Arf, C. (K. Erim) 148.  
 Arganovič, V. M. (Dispersion der optischen Aktivität von Kristallen) 239.  
 Ariyama, Kanetaka and Shoichi Mase (Electronic structure of graphite) 451; (Electronic conductivity of graphite) 451.  
 Arnowitt, R. and S. Gasiorowicz (Green's functions of coupled fields) 445.  
 Aronszajn, N. and K. T. Smith (Invariant subspaces of operators) 113.  
 Arrow, Kenneth J. (Leontief models) 135.  
 Arthur, George R. (Frequency sensitive device) 216.  
 Artmann, Kurt (Quantenmechanische Berechnung der Energie) 230; (Normalschwingungen von H<sub>2</sub>O) 230.  
 Asaka, Saburô (Velocity distribution over a symmetrical aerofoil, I.) 201.  
 Ashley, Holt s. E. Mollo-Christensen 194.  
 Atkinson, F. V. (Second-order differential equations) 81; (Perturbation of differential equations) 82.  
 Aubert, Karl Egil (*r*-idéaux de Prüfer-Lorenzen) 20.  
 Aumann, George (Reelle Funktionen) 52.  
 Avakumović, Vojislav G. (Question set by P. Erdős and L. K. Hua) 58.



- Ayant, Yves (Fonction de corrélation et de densité spectrale) 218.
- Azbelev, N. V. (Čaplyginsche Methode) 309.
- Babkin, B. N. (Integration nach der Methode von S. A. Čaplygin) 118.
- Backes, F. (Déformation des surfaces) 149; (Couple de cercles) 151; (Formules classiques d'analyse) 281; (Courbure géodésique) 402.
- Bade, William G. (Unbounded spectral operators) 348; (Limits of spectral operators) 348.
- Bagchi, Haridas (Equi-potential  $n$ -surfaces) 403.
- S. N. s. R. Hosemann 235.
- Bagemihl, F. and P. Erdős (Intersections of prescribed power) 50; ( $C_1$ -summable series) 282.
- — and H. D. Sprinkle (Proposition of Sierpiński's) 50.
- Bagley, R. W. (Orbital topologies) 416.
- Bailey, W. N. (Contiguous hypergeometric functions) 67.
- Baily, W. L. (Quotient of a manifold by a group of homeomorphisms) 169.
- Bajraktarević, Mahmud (Fractions continues) 284.
- Ballieu, Robert (Polynômes cyclotomiques) 254.
- Bambah, R. P. (Four squares and a  $k$ -th power) 44.
- Bang, Thøger (Große Primzahlen) 271.
- Baranowski, B. (Hittorf's effect) 233.
- Barcus, William (Cross-sections over CW-complexes) 165.
- Barden, S. E. (Space-charge forces) 214.
- Barlotti, Adriano (Criteri di irriducibilità) 394.
- Barnes, E. S. (Ternary quadratic form) 272; (Binary quadratic forms. IV.) 273.
- — — and H. P. F. Swinnerton-Dyer (Binary quadratic forms. III.) 273.
- Baroncini, D. (Problemi d'urto con un potenziale Coulombiano) 221.
- Barthel, Woldemar (Minimalflächen in gefaserten Finslerräumen) 412; (Minkowski
- skische und Finslersche Geometrie) 412; (Variationsprobleme in Cartanschen Räumen) 413.
- Bartholomew, D. J. (Sherman's statistic) 129.
- Basch, A. (Systeme mit zwei Freiheitsgraden) 174; (Differentialgeometrie der Strömung von Gasen) 191.
- Basov, V. P. (Systeme linearer Differentialgleichungen) 88.
- Bass, G. I. (Cauchysches Problem) 318.
- Ludwig (Mahlvorgänge) 102.
- Bastin, E. W. and C. W. Kilmister (Eddington's theory) 422; (The concept of order. I.) 422.
- Bauer, Ernest and Ta-You Wu (Cooling of a gas) 233.
- Friedrich L. (Spingruppen) 258.
- Heinz (Fonction additive d'ensemble) 54.
- Baumann, K. und H. Robl (Strahlungsverluste bei innerer Umwandlung) 448.
- Beale, E. M. L. (Linear programming) 137.
- Beauregard, O. Costa de s. Costa de Beauregard, O. 220.
- Beauvois, F.-Henri-A. (Problème de Fermat) 266.
- Bechhofer, Robert E., Charles W. Dunnett and Milton Sobel (Two-sample decision procedure) 130.
- — and Milton Sobel (Single-sample decision procedure) 130.
- Begle, Edward G. (Calculus) 45.
- Behari, Ram s. M. K. Singal 153, 410.
- Behrbom, Hermann (Minimum time flight path) 328.
- Bekefi, G. (Impedance of an antenna) 209.
- Bellman, R. (Time-lag, retarded control, and hereditary processes) 365.
- Benado, Mihail (Ensembles partiellement ordonnés. I.) 46.
- Benedicty, Mario e Mario Rosati (Un maestro) 4.
- Benjamin jr., Francis S. (John of Gmunden) 244.
- Bennett, B. M. (Fieller's theorem) 369.
- Benscoter, S. U. (Torsion bending for beams) 178.
- Berg, Lothar (Potenzreihenteilsummen) 293.
- Berge, Claude (Ensembles purs et ultrafiltres) 158.
- Berger, E. R. (Drillwiderstand) 179.
- Bergman, Stefan and M. M. Schiffer (Partial differential equations) 320.
- Berman, S. D. (Halbdirektes Produkt Abelscher Gruppen) 23.
- Bernard, Daniel (Pseudogroupes de Lie) 27.
- Bernhart, Arthur (Curves of pursuit) 243.
- Bernštejn, S. N. (Gesammelte Werke. Bd. II) 60.
- Berry, F. J. and M. Holt (Initial propagation of spherical blast) 202.
- Bers, Lipman (Non-linear elliptic equations) 321.
- —, S. Bochner and F. John, edited by (Partial differential equations) 316.
- Bertaut, E. F. (L'effet de tunnel) 220.
- Félix (Constantes de Madelung) 451.
- Besicovitch, A. S. and S. J. Taylor (Intervals of closed set) 278.
- Bezem, J. J. (Factors producing all-or-none effect) 378.
- Bhagavandin, Kettarnath (Motion of a pendulum in viscous fluid) 188.
- Bhattacharya, Shambhunath (Theory of relativity and expanding universe) 216.
- Bieri, H. (Konvexe Rotationskörper) 157.
- Biernacki, Mieczysław (Differentialgeometrie. I.) 148; (Formule de Parseval. II.) 296.
- Biglov, Z. I. (Differential-operator) 344.
- Bijlaard, P. P. (Buckling stress of shells) 425.
- Bilby, B. A. and R. Bullough (Formation of twins by a moving crack) 235.
- Bilharz, Herbert and Stefan Schottlaender (Geregelte Bewegung) 119.
- Bilimovitch, A. (Fonction non analytique) 76.
- Bilinski, Stanko (Sphärische Evoluten und Evolventen) 401.
- Bingen, R. (Solides au zéro absolu) 234.

- Bini, Umberto (Soluzioni intere dell'equazione  $x^3 + y^3 = K$ ) 35.
- Biot, A. (Aberration sphérique) 435.
- Biran, Lutfi (Roulement des surfaces réglées) 400.
- Birkhoff, G., H. H. Goldstone and E. H. Zarantonello (Plane cavity flows past obstacles) 430.
- Birnbaum, Allan (Tests of significance) 377.
- Z. W. and H. Rubin (Distribution-free statistics) 377.
- Bivins, Robert L., N. Metropolis, Paul R. Stein and Mark B. Wells (Characters of symmetric groups) 258.
- Blackburn, Jacob F. s. W. R. Mann 323.
- Blackwell, D. and M. A. Girshick (Games and statistical decisions) 363.
- Blanc, Charles (Intégration approchée d'équations différentielles) 117; (Intégration numérique d'équations différentielles) 118.
- Blanchard, René (Points de Feuerbach) 388.
- Blanuša, Danilo (Immersion de tores euclidiens dans un espace sphérique) 387; (Plan elliptique) 387.
- Blaquière, Augustin (Orbites dans le cosmotron) 214.
- Blaschke, Wilhelm (Variationsrechnung) 329; (Geometria proiettivo differenziale delle superficie  $V_2$ ) 408; (Abzählung in der Geometrie der Waben) 409.
- Bloch, Ingram and Yü-Chang Hsieh (Nuclear normal modes) 226.
- Blom, Gunnar (Transformations of distributions) 365.
- Blum, E. K. (Euler-Poisson-Darboux equation) 93.
- Julius R. (Stochastic approximation methods) 383.
- Boas jr., R. P. (Fourier transforms) 332.
- Bochner, S. s. L. Bers 316.
- Bodenstedt, E. (Phasenschwingungen beim Synchrotron) 214.
- Bodewig, E. (Iteration method for algebraic Eigenproblem) 117.
- Boggio, Tommaso (Funzione potenziale di un doppio strato) 99.
- Bogoljubov, N. N. (Green-Schwingersche Funktionen) 221.
- Bojanić, R. et M. Tomić (Transformée de sinus de Fourier) 332.
- Boltjanskij, V. (Schnittfläche von gefasertem Teilraum) 166.
- Bompiani, E. (Deformazioni di superficie) 405.
- Bonnevay, Georges (Interaction méson-méson) 224.
- Bonnor, W. B. (Equations of motion) 440.
- Bontsch-Brjewitsch, W. L. (Bonč-Brujevič, V. L.) s. F. F. Wolkenstein 237.
- Bopp, Fritz (Quantenmechanik) 218.
- Bordoni, Piero Giorgio (Trasformazioni termoelastiche) 182.
- Borel, Armand (Homologie et cohomologie des groupes de Lie) 164.
- E., R. Deltheil et R. Huron (Probabilités erreurs) 383.
- Boreli, Mladen (Problème d'écoulement plan) 204.
- Borok, V. M. (Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen) 317.
- Borozdin, K. V. (Satz von Heilbronn-Landau) 293.
- Bose, B. N. (Self-reciprocal functions) 333.
- Bottema, O. (Distances of skew planes) 139; (Skew quadrilateral) 141; (Veronese's surface) 147; (Three-bar seetic) 392; (Kinematik des Rollgleitens) 400.
- Botts, Truman (Lattice embeddings for sets) 46.
- Boughon, Pierre (Envelopes d'une famille à un paramètre) 145.
- Bouligand, Georges (Mécanique rationnelle) 170; (Cas limites d'équations  $f(x, y, z, p, q; m) = 0$ ) 319.
- Bouwkamp, C. J. and H. B. G. Casimir (Multipole expansions) 433.
- Bowen, N. A. and A. J. Macintyre (Theorems of Vitali and Montel type) 72.
- Box, G. E. P. (Analysis of variance problems. II.) 366.
- Boyer, Carl B. (Analytic geometry in Alexandrian age) 243.
- Bradley, Ralph Allan (Block designs. II.) 381.
- Braffort, Paul, Maurice Spiguel et Christophe Tzara (Action à distance) 225.
- Brauer, Alfred and B. M. Seelbinder (Problem of partitions. II.) 269.
- Braumann, Pedro Bruno Teodoro (Kombinationen und Partitionen) 14; (Eine aus der Kombinatorik bekannte Formel) 14.
- Braun, Günther s. W. Glaser 436.
- Braunbek, Werner (Beugung an kreisförmiger Öffnung) 434; (Ortskorrelation der Elektronen im 2-Elektronen-Problem) 442.
- Brdička, Miroslav (Elastic equilibrium equations) 176.
- Brelot, M. (Majorantes harmoniques) 325.
- Bremermann, Hans J. (Pseudokonvexe Gebiete und Holomorphiegebiete) 78.
- Breus, K. and G. Položij (V. E. D'jačenko) 4.
- Breusch, Robert (Irrationality of  $\pi$ ) 275.
- Bridgman, P. W. (Plastic flow) 427.
- Briggs, W. E. s. S. Chowla 32.
- Brillouet, Georges (Ondes liquides de gravité) 204.
- Brink, D. M. (Range forces and nuclear energy levels) 227.
- Brodskij, M. S. (Matrixfunktionen linearer Operatoren) 111.
- Brogie, Louis de (Revolution in physics) 169; (Justification de la mécanique ondulatoire) 226.
- Brouwer, L. E. J. (Intuitionistische Differenzierbarkeit) 13; (Contradictoriness in classical theory of functions) 13.
- Browder, Felix E. (Covering spaces) 166.
- Brown, Alan L. (Multiperfect numbers) 38.
- J. A. C. s. J. Aitchison 131.
- W. F. and T. Y. Thomas (Supersonic airfoils) 201.
- Brueckner, K. A. (Nuclear saturation. II.) 446.

- Bruijn, N. G. de and A. C. Zaanen ( $\sigma$ -finite measures) 54.
- Brusencov, N. P. (Wellenfunktionen des elliptischen Zylinders) 65.
- Brusotti, Luigi (Fasci reali di curve algebriche) 394.
- Buchdahl, H. A. (Optical aberration coefficients) 435.
- Buckens, M. F. (Flambage d'une plaque chauffée en son centre) 182.
- Buckingham, M. J. and M. R. Schafroth (Specific heat of metals) 234.
- Budiansky, Bernard s. J. M. Hedgepeth 196.
- Bühler, Hansruedi (Übergangsfunktion eines Regelkreises) 120.
- Büke, Altintas (Kommutativ-associativ und nilpotente Algebren) 264.
- Bukovics, Erich (Numerische Integration. III.) 353.
- Bulach, B. M. (Konische Strömungen) 194.
- Bullen, K. E. (Variation problems) 328; (Euler's equation) 328.
- Bullough, R. s. B. A. Bilby 235.
- Buquet, A. ( $G(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = z^2$ ) 35.
- Burger, E. (Reklameproblem) 137.
- Burniat, Pol (Surfaces algébriques de genre géométrique nul) 147; (Genre lineaire delle superficie algebriche) 395.
- Burrow, M. D. (Young diagram) 26.
- Butler, M. C. R. (Reducibility of polynomials) 17.
- Butzer, P. L. (Bernstein polynomials) 287.
- — — and W. Kozakiewicz (Riemann derivatives) 56.
- Cade, R. (Electrostatic forces on immersed bodies) 207.
- Calero, Gonzalo (Definition der Dimension) 417.
- Čal'jan, K. M. s. S. A. Alekserov 354.
- Callaway, Joseph (Mach's principle) 439.
- — s. F. Herman 453.
- Campbell, Robert (Séries de Neumann) 287.
- Capon, R. S. (Unified formalism in mechanics) 172.
- Caprioli, Luigi (Sistemi meccanici non-lineari) 175.
- Carafa, Mario (Funzioni analitiche) 305.
- Carathéodory, C. (Theory of functions. II.) 67.
- Carlitz, L. (Representations by skew forms) 17; (Quadratic forms in a finite field) 17; (Systems of equations) 32; (Congruences for the number of  $n$ -gons) 36; (Quadratic equations) 37; (Congruences for the solutions of difference equations) 267; (Theorem of Glaisher) 268; (Euler numbers and polynomials) 268; (Equations in a finite field) 268.
- — and R. F. Olson (Bernoulli and Euler numbers) 36.
- Carlson, J. F. s. S. Altshuler 443.
- Carnap, Rudolf (Symbolische Logik) 6.
- Carrier, G. F. (Acoustic resistance of an immersed shell) 431.
- Casesnoves, D. Maravall s. Maravall Casesnoves, D. 206.
- Casimir, H. B. G. s. C. J. Bouwkamp 433.
- Cassels, J. W. S. (Product of linear forms) 272.
- Castoldi, Luigi (Formalismo delle connessioni proiettive) 156; (Prove ripetute) 358.
- Castro, Antonio de (Equazione differenziale delle oscillazioni di rilassamento) 83; (Risposta di un circuito elettrico) 311.
- Gustavo de (Grenzverteilungen geordneter Statistik) 376.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Triangle des centres de carrés construits sur les côtés d'un triangle) 388; (Triangoli ortogonalmente associati) 388.
- Černikov, S. N. (Lineare Ungleichungen) 250.
- Čačaturov, A. A. (Maß eines Gebietes des Euklidischen Raumes) 55.
- Chakrabarti, S. C. (Higher differences. I. II.) 309.
- Chalk, J. H. H. (Primitive lattice points) 42.
- Chandra Das, S. s. Das, S. Chandra 181.
- Chandrasekhar, S. (Characteristic value problems in high order differential equation) 83; (Stability of viscous flow) 429; (Inhibition of convection. II.) 438.
- Chang, S. C. (Polyhedron) 420.
- Charrueau, André (Transformations projectives) 142; (Transformations géométriques) 143.
- Chartres, B. A. and H. Messel (Electron-photon showers) 229.
- Chase, D. M. (Equations of motion of charged test particles) 216.
- Chaskind, M. D. (Wellenbewegungen schwerer Flüssigkeit) 203.
- Chen, Yian-Nian (Torsionsschwingungen) 178.
- Cheng, Hsien K. (Loadings over slender airfoils) 430.
- — — and N. Rott (Thin airfoil theory) 187.
- Chern, Shing-Shen, Philip Hartman and Aurel Wintner (Isothermic coordinates) 402.
- Chernoff, Herman (Likelihood ratio) 371.
- — and E. L. Lehmann (Maximum likelihood estimates in  $\chi^2$  tests) 371.
- Chiba, Shin (Pion-nucleon scattering) 225.
- Chintschin (Chinč'in), A. J. s. Enzyklopädie der Elementarmathematik 13.
- Chion, Ja. V. (Archimedisches geordnete Ringe) 263.
- Chochlov, R. V. (Theorie der Resonanz) 174.
- Chodžajev, L. Š. (Cauchysches Problem) 114.
- Chou, Pei Chi (Compressible fluid flow problems) 429.
- Chow, Wei-Liang (Jacobian variety) 144.
- Chowdhury, S. B. (Unbiased critical regions) 131.
- Chowla, S. and W. E. Briggs (Discriminants of binary quadratic forms) 32.
- Chrétien, M. and R. E. Peierls (Gauge-invariant interactions) 444.
- Christian, R. s. T. D. Lee 445.
- Chung, K. L. s. B. V. Gnedenko 360.
- Ciliberto, Carlo (Equazioni paraboliche) 319.



- Civin, Paul (Orthonormal cyclic groups) 287.
- Clagett, Marshall (De curvis superficiebus Archimedis) 2; (Arabic tract on the hyperbola) 3; (Elements of Euclid) 3.
- Clair, Harry S. (Euclid's algorithm) 37.
- Clifford, A. H. (Hahn's theorem) 255.
- Clogston, A. M. and H. Heffner (Focusing of an electron beam) 214.
- Coburn, N. (Discontinuities in compressible fluid flow) 188.
- Cocchi, Giovanni (Campi potenziali attorno a schiere di cerchi) 99.
- Cohen, M. H. (Scalar product of two symmetric tensors) 453.
- Cohn, Harvey (Periodic algorithm for cubic forms. II.) 42.
- Collingwood, Edward F. (Ensembles d'accumulation des fonctions analytiques) 297.
- Collins, George E. (Distributivity and an axiom of choice) 248.
- Colloque Internat. de Logique Mathématique (Applications scientifiques de la logique mathématique) 7.
- Colonnetti, Gustavo (Secondo principio di reciprocità) 177; (Équilibre élastique) 183.
- Comét, Stig (Characters of the symmetric group) 355.
- Conforto, Fabio (Sistemi di integrali semplici) 397.
- Consoli, T. S. Y. Garti 358.
- Conte, S. D. and W. C. Sangren (Singular first order equation) 90.
- Conti, R. S. G. Sansone 89.
- Cooke, K. L. (Algebraic differential-difference equations) 312.
- Corinaldesi, E. (High-energy expansions of phase shifts) 449.
- Cornock, A. F. (Poisson's and bi-harmonic equations) 119.
- Corput, J. G. van der (Sums of systems) 269.
- Cossu, Aldo (Confronto di due connessioni affini) 155.
- Costa de Beauregard, O. (Equation de Gordan) 220.
- Cowling, V. F. and W. J. Thron (Zero-free regions of polynomials) 254.
- Cox, D. R. (Variation of range in small samples) 366.
- Coxeter, H. S. M. (Six uniform polyhedra) 141; (Regular honeycombs) 386.
- Croisot, Robert (Demi-groupes) 254.
- Cronin, Jane (Branch points. II.) 342.
- Crowley, T. H. (Reciprocity theorems) 432.
- Crownfield jr., Frederic R. and Peter Havas (Point particles in neutral meson fields) 225.
- Crysdale, J. H. („Diffraction of waves“) 434.
- Császár, Ákos (Ensembles de niveau des fonctions réelles) 57.
- Cuesta, N. (Deduktive Strukturen) 247.
- Čunichin, S. A. (Faktorisierung endlicher Gruppen) 22.
- Curtis, Charles W. (Representations of nilpotent Lie algebras) 31.
- M. L. (Fiber spaces) 168.
- Cutkosky, R. E. (Bremsstrahlung) 445.
- Czechowski, T. s. H. Steinhauß 364.
- Dahlquist, Germund (Monte-Carlo-Methode) 122.
- Dain, J. and I. A. D. Lewis (Electron gun for crossed field devices) 213.
- Dalgarno, A. (Integrals occurring in molecular structure) 233.
- Dalton, John P. (Symbolic operators) 115.
- Daniels, H. E. (Test for regression parameters) 134.
- Danielsson, Olafur (Elementargeometrie) 139.
- Dantzig, D. van and C. Scheffer (Stochastic processes) 126.
- Darbo, Gabriele (Convergenza in variazione) 280.
- Das, Sisir Chandra (Stress concentrations) 181; (Stresses due to spherical inclusion in elastic solid) 425.
- Daugavet, I. K. (Konvergenz der Galerkinschen Methode) 119.
- Davenport, H. (Diophantine approximation) 43.
- and G. L. Watson (Minimal points of a quadratic form) 42.
- David, H. A. (Range in non-normal populations) 365.
- —, H. O. Hartley and E. S. Pearson (Ratio of range to standard deviation) 366.
- Davidson, J. F. (Dynamic lateral instability of beams) 178.
- Davies, E. T. s. K. Yano 399.
- R. O. and J. W. Leech (Statistics of scaled random events) 126.
- Davin, Marcel (Éléments idéalement plastiques) 183.
- Davis, Philip and Henry Pollak (Complex biorthogonality for sets of polynomials) 292.
- — and P. Rabinowitz (Quadrature errors) 291.
- — s. H. A. Antosiewicz 87.
- Robert B. (Derivative problem for a partial differential equation) 92.
- Dean, W. R. (Infinite cylinder in viscous liquid) 195.
- Deaux, R. (Involutions de Möbius et inversion isogonale) 139; (Point de Steiner) 139; (Géodésiques d'un hélicoïde) 150; (Spirale conique) 402.
- Dedò, Modesto (Teorema di Lüroth) 395.
- Dehalu, M., J.-L. Pauwen et P. Ledoux (Publications de R. H. Germa) 5.
- Dekker, J. C. E. (Hypersimple sets) 249.
- Delange, Hubert (Théorème de Ikehara) 331.
- Delerue, P. s. L. Poli 332.
- Delone, B. N. (Diskriminanten von algebraischen Zahlkörpern) 33.
- Delsarte, Jean (Systèmes d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue) 64.
- Deltheil, R. s. E. Borel 383.
- Demidovič, B. F. (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen) 99.
- Demkov, J. N. (Symmetriegruppe eines Oscillators) 219.
- Dempsey, E. and D. ter Haar (Ferromagnet) 238.

- Dénes, Peter (Irreguläre Kreiskörper) 33.
- Dengler, Max (Numerische Lösung von  $\int_C f(u) \{w(u) - w(g)\}^2 du$ ) 353.
- A. (Oscillating wings) 430.
- Denisjuk, I. N. (Aufgabe des Dehnungsstoßes) 186.
- Denison, M. Richard (Tip or loading-edge temperatures) 431.
- Denjoy, Arnaud (Énumération transfinie. III.) 47; (IV.) 48; (Points inflexionnels) 157; (Couples de continus joints. I.) 161.
- Deny, Jacques et Jacques Louis Lions (Espaces de B. Levi) 334.
- Deppermann, K. und W. Franz (Beugung an der Kugel) 211.
- Deprit, André (Distributions de L. Schwartz) 106; (Problèmes de Cauchy) 221; (Klein-Gordon equation) 423.
- Derman, Cyrus (Brownian motion process) 362.
- Deskins, W. E. (Radical for near-rings) 29.
- Devidé, Vladimir (Metrische Relationen über Simplexe) 389; (Formel von L'Huilier) 390.
- Devonshire, A. F. (Ferroelectrics) 239.
- Dias Agudo, Fernando Rol-dão (Charakteristische Gleichung einer Matrix) 250.
- Dilworth, R. P. (Finite modular lattices) 262.
- Dimitroff, Emmanuel s. K. Popoff 206.
- Dini, Ulisse (Opere. II.) 2.
- Dirac, P. A. M. (Theory of electrons. III.) 215.
- Discussion générale. (I. Divers thèmes) 249; (II. Logique et mathématiques) 249; (III. Logique et physique) 249.
- Dixon, W. J. (Nonparametric tests) 129.
- D'jakov, S. P. (Wechselwirkung von Stoßwellen mit Unstetigkeiten) 431.
- Dnestrovskij, Ju. N. (Änderung der Eigenwerte bei Änderung der Gebietsgrenzen) 324.
- Doetsch, Gustav (Trasformazione di Laplace) 330.
- Dolapčiev, Bl. (Wirbelwiderstand) 196.
- Domar, Yngve (Diophantine equation) 36.
- Domb, C. (Random-walk problem) 126.
- Dorfman, A. G. (Variation der Lösungen von Differentialgleichungen) 404.
- Doss, Raouf (Fonctions presque périodiques) 308.
- Dotcheff, Kyrille s. K. Popoff 206.
- Dresden, Arnold s. B. L. v. d. Waerden 242.
- Drobot, S. and M. Warmus (Dimensional analysis) 132.
- Drucker, D. C. and E. T. Onat (Stability of inelastic systems) 203.
- Dubnov, Ja. S. (Gleichungen von Peterson) 149.
- Dubrovskij, V. M. (Iterationsmethode) 117.
- Dumontet, Pierre (Images d'objets partiellement cohérents) 212.
- Duncan, D. G. (Algebra of S-functions) 17.
- Dunford, Nelson (Spectral operators) 346.
- Dunnett, Charles W. and Milton Sobel (Student's t-distribution) 367.
- — — s. R. E. Bechhofer 130.
- Duparc, H. J. A. (Recurring computing circuit) 38; (Recurring sequences. II.) 37.
- Durand, Émile (Équation des ondes planes) 93; (Distributions de charges fixes et vecteur de Poynting) 207; (Charge électrique ponctuelle dans le vide) 225.
- Dürr, K. (Logistik) 5.
- Dushnik, Ben (Bounds of order types) 49.
- Dwinger, Ph. (Closure operators) 262.
- Dynkin, E. B. (Grenzwertsätze) 361.
- Džanelidze, G. Ju. (Prinzip von Saint-Venant) 176.
- Džavadov, M. A. (Geometrien über Matrizen) 137.
- Džrbašjan, M. M. s. S. N. Mergeljan 71.
- Džvaršejsvili, A. G. (Absolut stetige Funktionen) 280.
- Eberl, W. (Zufallsweg in einer Markoffschen Kette) 362.
- Eberlein, W. F. (Elementary transcendental functions) 281.
- Eckmann, Beno (Structures complexes) 154; (Räume mit Mittelbildungen) 164.
- Eden, R. J. (Heisenberg operators) 222.
- Eder, G. (Nukleon-Pion-Wechselwirkungen) 224.
- Efimov, N. V. (Analytische Geometrie) 391.
- Egervary, E. (Contractive transformations of vector space) 110; (Hypermatrices) 251.
- Ehrenpreis, Leon (Problems of division. I.) 106.
- Ehrling, Gunnar (Eigenwerte und Eigenfunktionen beim einfachen Schwingungsproblem) 323; (Eigenvalue problems for elliptic differential operators) 323.
- Elfvig, G. (Convex sets in statistics) 372.
- Elliott, R. J. (Effect of spin-orbit coupling on magnetic resonance) 452; (Spin-orbit coupling in band theory) 452.
- Ellis, David (Infinite series of sets) 45.
- Elsasser, Walter M. (Dimensional relations) 437.
- El'sgol'c, L. É. (Differenzen-Differentialgleichungen) 92.
- El'sin, M. I. (Unvollständige Differentialgleichung) 88.
- Emerson, R. C. (Maximizing an integral) 328.
- Enzyklopädie der Elementarmathematik. (I. Arithmetik) 13.
- Epstein, Benjamin (Number of exceedances) 375.
- — and M. Sobel (Life testing) 382.
- Erdélyi, A. (Laplace transformation) 331.
- and C. H. Papas (Diffraction by a strip) 434.
- Erdős, Paul (Set theory. III.) 51; (Additive number theory) 270.

- Erdős, Paul s. N. C. Ankeny 35.  
 — s. F. Bagemihl 50, 282.  
 Eriksen, Erik s. L. L. Foldy 445.  
 Erismann, Theodor (Echtes Kugelgetriebe) 121.  
 Ertel, Hans (Feldstärke in Potentialfeldern) 99.  
 Etkin, Bernard and Frank A. Woodward (Lift distribution on wings) 201.  
 Eubanks, R. A. (Stress concentration) 181.  
 Evans, Robert L. (Erratum) 80.  
 Eves, Howard (Particles with a common centroid) 173.  
 Eygrafov, M. A. (Vollständige Systeme) 104; (Vollständigkeit benachbarter Systeme) 334.  
**F**addeeva, V. N. und N. M. Terent'ev (Tafeln der Funktion  

$$w(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$$
  
 356.  
 Fadini, Angelo (Piani affini) 138.  
 Fajenberg, V. Ja. s. I. E. Tamm 446.  
 Falk, Sigurd (Algebraische Eigenwertprobleme) 351.  
 Fantappiè, Luigi (Funzioni di una matrice) 15; (Autovalori e autofunzioni degli operatori) 342.  
 Faragó, Tibor (Definition of group) 21.  
 Farinha, João (Zéros d'un polynôme) 18.  
 Fáy, István (Algèbre de cochaines) 163.  
 Fastov, N. S. (Kinetik der Restdeformation) 176.  
 Fava, Franco (Invariante di Mehmke-Segre) 391; (Reti di coniche) 391; (Riflessione rispetto ad una curva) 394.  
 Fekete, Michel (Approximations par polynomes avec conditions diophantiennes. I.) 68; (II.) 292.  
 Feldman, Jacob and Richard V. Kadison (Regular operators) 337.  
 Fell, J. and D. C. M. Leslie (Inviscid supersonic theory) 431.  
 Fels, Eberhard (Burgers Variante eines Spielmodells) 137.  
 Fenchel, W. (Curvature and Levi-Civita's parallelism) 153.  
 Feodos'ev, V. I. (Stabilität einer sphärischen Schale) 180.  
 Fer, Francis ( $\Delta u = (1/c^2)(\partial^2 u / \partial t^2) = 0$ ) 226.  
 Fériet, J. Kampé de s. Kampé de Fériet, J. 125.  
 Ferrari, F. and C. C. Villi (Generalized statistics) 206.  
 Ferraris, Giulia Pozzolo s. Pozzolo Ferraris, Giulia 390.  
 Ferretti, B. (Renormalization technique) 443.  
 Feshbach, H., C. E. Porter and V. F. Weisskopf (Nuclear reactions with neutrons) 228.  
 Fetisov, A. J. (Beweis in der Geometrie) 383.  
 Fiala, F., H. Goldmann, H. König et A. Portmann (Idée de preuve dans les sciences) 7.  
 Fick, E. (Konforme Abbildungen) 296.  
 Fieller, E. C. and H. O. Hartley (Sampling with control variables) 374.  
 Fieschi, R., S. R. de Groot and P. Mazur (Galvanomagnetic and thermomagnetic phenomena. I. III.) 238.  
 — — — — — P. Mazur and J. Vlieger (Galvanomagnetic and thermomagnetic phenomena. II.) 238.  
 Fil'čakov, P. F. (Konstanten des Christoffel-Schwarzschen Integrals) 191.  
 Filippi, Lidia (Superficie generate da covarianti di forme binarie) 393.  
 Finikov, S. P. (Lehrstuhl für Differentialgeometrie) 148.  
 Finkbeiner, D. T. and O. M. Nikodym (Convex sets in abstract linear spaces) 333.  
 Finkelburg, Wolfgang (Atomphysik) 169.  
 Finn, Robert (Problem of type) 303.  
 Finsler, Paul (Infinitesimalgeometrische Betrachtungen) 384.  
 Finston, Morton (Convection from surfaces at non uniform temperatures) 189.  
 Fischer-Hjalmars, Inga (Hybridization of atomic orbitals) 231.  
 Fisz, Marek (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik) 122.  
 — — s. H. Steinhaus 364.  
 Flanders, Harley (Hilbert's Nullstellensatz) 265; (Solutions of  $d\omega = \Omega$ ) 315.  
 Flax, A. H. s. H. R. Lawrence 195.  
 Floyd, E. E. and V. L. Klee (Lattice of closed subspaces) 104.  
 Fok, V. A. (Arbeit F. I. Frankl's) 216.  
 — — — s. V. N. Faddeeva 356.  
 Foldy, Leslie L. and Erik Eriksen (Vacuum polarization) 445.  
 Follin jr., James W. s. F. N. Frenkiel 357.  
 Følner, Erling (Theorem of Bogoliouboff) 27.  
 Forbat, N. (Problème de mouvement relatif) 172.  
 Ford, Hugh (Theory of plasticity) 183.  
 — — s. J. M. Alexander 425.  
 Forster, H. K. and N. Zuber (Vapor bubble in a superheated liquid) 205.  
 Fort jr., M. K. (Open topological disk) 161; (Theorem about topological  $n$ -cells) 418.  
 — Tomlinson (Loaded vibrating net) 91.  
 Fox, Charles (Chain transforms) 330.  
 Fraïssé, Roland (Théorie des relations et sémantique) 248.  
 Frame, J. S. (Trigonometric approximations) 281.  
 Frank, Philipp (Introduction) 2.  
 — Wilhelm (Potentialströmungsfelder) 192.  
 Frankland, J. M. and R. E. Roach (Combined tension and bending) 185.  
 Franqui, Benito and Mariano García (Multiply perfect numbers) 38.  
 Franz, Walter (Greensche Funktionen des Zylinders) 211; (Trentinisches Absorptionsgitter) 211.



- Franz, Walter s. K. Deppermann 211.  
 — — s. J. Homilius 239.  
 Fraser, P. A. (Diatomic molecules. III.) 233.  
 Fréchet, Maurice (Surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication) 76; (Variation de  $n$  observations indépendantes, I.) 357.  
 Freedman, A. L. (Waiting time in automatic computers) 355.  
 Freese, Ernst (Gebundene Teilchen und Streuprobleme) 222; Wellengleichungen) 223.  
 Freire, Luiz (La langage et les mathématiques) 249.  
 Frenkiel, François N. and James W. Follin jr. (Probability distributions) 357.  
 Freudenthal, Alfred M. (Inelastic thermal stresses) 182, 426.  
 — — — and E. J. Gumbel (Minimum life in fatigue) 132.  
 — Hans (Probleme von K. A. Sitnikov) 160; (Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie) 259.  
 Frey, Annemarie und Karl Strubecker (Quadratische Linienkomplexe. I.) 405.  
 Friedman, Henry D. (Coincidence of pulse trains) 215.  
 Frisch, Ragnar (Linear expenditure functions) 136.  
 Fröhlich, H. (Electrons in lattice fields) 237.  
 Frost, Richard C. (Supersonic flap lift effectiveness) 199.  
 Fryer, H. C. (Statistics) 363.  
 Fuchs, L. (Basic subgroups) 23.  
 —, A. Kertész and T. Szele (Abelian groups) 23.  
 — W. H. J. (Growth of functions) 297.  
 Fuentes Miras, José Ramón (Deduktive Wahrheit) 13.  
 Fujita, Shigeichi (Second law of thermodynamics) 204.  
 Fuks, B. A. (Pseudokonforme Abbildung) 306; (Pseudokonformität einer Abbildung) 306.  
 Fuller, F. B. (Homotopy theory of coincidences) 165; (Harmonic mappings) 411.  
 Fullerton, R. E. (Representation of linear operators) 339.  
 Fung, Y. C. (Static stability of a panel in supersonic flow) 203.  
 Furstenberg, Harry (Extension of Ceva's theorem) 139; (Menelaus' theorem) 139.  
 Furuya, Shigeru (Van der Pol's equation) 312.  
 Gagliardo, Emilio (Oscillazione per gli integrali di un'equazione differenziale lineare) 83.  
 Gajduk, Ju. M. (Geometrische Ideen Lobačevskijs) 4.  
 Galli, Mario (Fondazione della dinamica) 3.  
 Gallissot, F. (Formes extérieures) 171.  
 Gambier, M.-B. (Trisectrices des angles) 139.  
 Gans, David (Models of the Euclidean plane. II.) 353.  
 Garabedian, P. R. (Applications of analytic continuation) 320.  
 — — —, Edward McLeod jr., and Martin Vitousek (Conformal mapping) 186.  
 García, Mariano s. B. Franqui 38.  
 Gårding, Lars (Eigenfunction expansions) 96.  
 Garnier, René (Représentation conforme d'un domaine variable) 302.  
 Garti, Y. et T. Conzoli (Produit de variables aléatoires) 358.  
 Gaschütz, Wolfgang (Modulare Darstellungen endlicher Gruppen) 24; (Endliche Gruppen mit treuen absolut irreduziblen Darstellungen) 257.  
 Gasińcowicz, S. s. R. Arnowitt 445.  
 Gatto, R. (Scattering of muons by nuclei) 446.  
 Gavurin, M. K. (Eigenwerte und Eigenvektoren eines gestörten Operators) 112.  
 Geddes, A. (Coefficient fields for complete equicharacteristic local rings) 29.  
 Geiringer, Hilda (Transcendental numbers) 275.  
 Gejdel'man, R. M. (Vierparametriger Kreiskomplex) 451; (Stratifizierung  $k$ -parametriger Familien) 409.  
 Gelf'fer, S. A. (Variation mehrwertiger Funktionen) 299.  
 Gelfond, Alexander O. (Ganzzahlige Lösungen) 35.  
 Gell-Mann, M. and M. L. Goldberger (Scattering of photons) 444.  
 — — and W. E. Thirring (Causality conditions in quantum theory) 443.  
 Gellerstedt, Sven (Übungsaufgaben aus der Mathematik) 1.  
 Gernay, R. H. (Fonctions intégrables) 56.  
 Geronimus, Ja. (Ya.) L. (Integralgleichungen) 100; (Polynomials orthogonal on a circle) 103; (In einer Kreisscheibe stetige Funktionen) 298.  
 Gerstenhaber, Murray and H. E. Rauch (Extremal quasi-conformal mappings. I. II.) 75.  
 Geymonat, Ludovico (Spazializzazione degli insiemi) 414.  
 Ghosh, M. N. (Asymptotic distribution of serial statistics) 133.  
 — N. L. (Resistance in potential flows. I.—IV.) 196.  
 Ghurye, S. G. (Random functions) 124.  
 Gibbs, Julian H. (Polarization of charged particles) 442.  
 Gichman, I. I. (Markovsche Prozesse) 132.  
 Gillman, L., M. Henriksen and M. Jerison (Theorem of Gelfand and Kolmogoroff) 108.  
 Gini, Corrado (Dispersione) 376.  
 Ginsburg, Jekuthiel (Triplets of triangles) 35.  
 — V. L. (Kosmische Strahlen) 229.  
 Girault, Maurice (Droites de régression confondues) 367.  
 Girshick, M. A. s. D. Blackwell 363.  
 Glansdorff, P. (Ventilation à parois perméables) 191.  
 Glaser, Walter (Wellenmechanische Elektronentheorie) 219.  
 — — und Günther Braun (Elektronenoptische Abbildung. I.) 436.

- Glauz, R. D. and E. H. Lee (Transient wave analysis) 427
- Glazman (Glasmann), I. M. (Anwendung der Zerspaltungsmethode) 345.
- — — s. N. I. Achiezer 111.
- Gnedenko, B. V. und L. A. Kaloujnine (Kalužnin) (Mathematisches Leben in der DDR) 1.
- — — and A. N. Kolmogorov (Sums of independent random variables) 360.
- Godeaux, Lucien (Analyse mathématique. I.) 45; (Surface cubique) 147; (Involutions cycliques) 147; (Correspondance entre surfaces) 150; (Surfaces algébriques) 395; (Surfaces multiples) 395; (Quadriques et coniques de Moutard) 408; (Congruenze W) 408.
- Goertel, G. s. L. Spruch 448.
- Goheen, H. E. (Theorem of Zassenhaus) 255.
- Gold, Ben K. s. J. M. Howell 363.
- Louis (Charged particle in crossed magnetic and electric fields) 215; (Curves associated with trajectories of charged particles) 215; (Density of states in phase space) 236.
- Goł'danskij, V. I. und G. B. Ždanov (Čerenkov-Strahlung) 211.
- Goldberg, A. A. (Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche) 303.
- Goldberger, M. L. s. M. Gell-Mann 444.
- Goł'denvejzer, A. L. (Berechnung von Schalen auf Punktkräfte) 180.
- Goldhaber, J. K. and E. S. Wolk (Maximal ideals) 336.
- Goldmann, H. s. F. Fiala 7.
- Goł'dstine, H. H. s. G. Birkhoff 430.
- Goł'fand, Ju. A. s. I. E. Tamm 446.
- Golomb, Michael (Mappings with positive Jacobians) 105.
- Goncalves, J. Vicente (Variation totale des fonctions discontinues) 58.
- Goodell, John D. (Machine systems) 355.
- Goodman, Leo A. and William H. Kruskal (Cross classifications) 128.
- Goormaghtigh, R. (Pentagone) 140; (Cycloïdales et coniques) 143; (Hexagone inscriptible) 388.
- Gorn, S. (Maximal convergence intervals) 60.
- Gorter, C. J. s. T. van Peski-Tinbergen 453.
- Görtler, H. (Charakteristiken-theorie in der Hydrodynamik) 186.
- Goto, Ken-iti (Wave fields in de Sitter space) 441.
- Morikuni (Algebraic homogeneous spaces) 398.
- Gotô, Yûzô (Projectively connected space with torsion) 156.
- Goudet, Georges (Fonctions de Bessel) 63.
- Gouyon, E. (Mécanique rationnelle) 172.
- Grabar, M. I. (Ergodizität dynamischer Systeme) 88.
- Graf, Ulrich und Rolf Wartmann (Extremwertkarte bei Fabrikationskontrolle. I. II.) 132, 375.
- Graffi, D. (Reziprozitätssatz) 176.
- Grant, Harold S. (Prime number theoren) 41.
- Grauert, Hans (Métrique kaehlérienne) 78.
- Green, A. E. (Torsion of incompressible cylinders) 181.
- — — and E. W. Wilkes (Finite plane strain for orthotropic bodies) 181.
- — — and W. Zerna (Elasticity) 182.
- J. R. (Confidence interval) 371.
- J. W. (Convex functions) 58.
- Louis C., Marjorie M. Mulder, Paul C. Milner, Margaret N. Lewis, John W. Woll jr., Eleanor K. Kolchin and David Mace (Wave function of Hyleraas) 232.
- Green, S. L. (Advanced level pure mathematics. II. III.) 242.
- Greene, John C. (American astronomy) 244.
- Grell, Heinrich s. 8. Polnische Mathematikerkongreß 2.
- Grenander, Ulf (Regression coefficients) 382.
- Grenville-Wells, H. Judith and Kathleen Lonsdale (Absolute configuration) 235.
- Griffith, W. C. s. A. Kahane 204.
- Griffiths, H. B. (Theory of manifolds) 163; (Fundamental group of spaces) 163.
- Grinberg, G. A., N. N. Lebedev, I. P. Skal'skaja und J. S. Ufljand (Wellenproblem für parabolischen Spiegel) 210.
- Grohne, D. (Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen) 431.
- Groot, S. R. de, s. R. Fieschi 238.
- Grosjean, C. C. and V. J. Vanhuyse (Spectrometer) 214.
- Grossman, Howard D. (Fun with lattice points) 14.
- Gudkov, D. A. (Koeffizienten ebener algebraischer Kurven) 143; (Klassifikation algebraischer Kurven) 143.
- Gumbel, E. J. (Statistical theory of extreme values) 131.
- — — s. A. M. Freudenthal 132.
- Gupta, Hansraj. (Triangular numbers) 267.
- S. s. R. C. Majumdar 226.
- Suraj N. (Gravitation and electromagnetism) 441.
- Gurevič, B. L. (Neue Typen von Räumen) 317.
- G. B. (Liesche Standard-Algebren) 265.
- Gusejn-Zade, M. A. (Umströmung zweier Profile) 191.
- Guv, Jean s. J. Tillieu 230.
- Guzzo, Augusto („Posizione“ e deduzione in Euclide) 243.
- Haantjes, J. (Notion of geometric object) 399.
- Haar, Dirk ter (Statistical mechanics) 170.
- — — s. E. Dempsey 238.
- Haase, D. (Strömung in 90°-Knie) 191.
- Hadamard, Jacques (Psychology of invention) 1; (History of science) 1; (Histoire des sciences) 4.

- Haga, Eijirō (Slow electrons in a polar crystal) 237.
- Hahn, Wolfgang (Grenzwertbeziehungen bei unendlichen Produkten) 71.
- Hain, Klaus (Gebundene Zustände von  $\pi$ -Mesonen) 224.
- Haken, H. (Wechselwirkung zwischen Elektron und Gitterschwingungen) 237.
- Hall, Marshall and H. J. Ryser (Normal completions of incidence matrices) 251.
- jr., Marshall (Correction to „projective plane“) 385.
- P. (Soluble groups) 256.
- R. (Threefolds) 147.
- Hällström, Gunnar af (Einschnittgebiete) 301.
- Halmos, Paul R. (Polyadic Boolean algebras) 9.
- Hamstrom, Mary-Elizabeth s. R. D. Anderson 161.
- Handelman, G. H. and W. H. Warner (Loading paths) 183.
- Hanson, H. A. (Normality of numbers) 44.
- Haque, S. M. A. (Stability of a viscous liquid) 429.
- Harary, Frank (Balance of a signed graph) 421.
- Harish-Chandra (Semisimple Lie groups. V. VI.) 259.
- Harrold jr., O. G. (Enclosing of arcs and curves by polyhedra) 417.
- Harrop, R. (Propositional calculus) 8.
- Hartley, H. O. s. H. A. David 366.
- — — s. E. C. Fieller 374.
- — — s. E. S. Pearson 127.
- Hartman, Philip (Spectra of differential operators) 83.
- — and Aurel Wintner (Non-linear differential equations) 84; (Spectra of Toeplitz's matrices) 113.
- — s. Sh.-Sh. Chern 402.
- Hartree, D. R. (Diffraction integral) 354.
- Hatakar, M. M. (Elementary particles in general relativity) 218.
- Hatano, Shigeaki, Tadashi Kaneno and Mitsuo Shindo ( $\pi$ -meson-proton scattering) 446.
- Hatcher jr., E. C. and A. Leitner (Radiation from a point dipole) 209.
- Hattori, Akira s. N. Iwahori 21.
- Haupt, O. et Chr. Pauc (Bases de dérivation) 276.
- Haus, H. A. (Passive nonreciprocal network) 432.
- Havas, Peter s. F. R. Crownfield jr. 225.
- Hawthorne, W. R. (Secondary flow about struts) 193.
- Hayashi, Chikio (Multidimensional quantification) 380.
- Hayes, Wallace D. (Vibrating string) 93.
- Hayman, W. K. and F. M. Stewart (Real inequalities) 72.
- Heath, Royal Vale (Puzzles and games) 14.
- Hedgepeth, John M., Bernard Budiansky and Robert W. Leonard (Flutter in compressible flow of a panel) 196.
- Hedtfeld, Karlheinz (Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen) 305.
- Heerema, Nickolas (Algebra determined by binary cubic form) 30.
- Heffner, H. s. A. M. Clogston) 214.
- Heffter, Lothar (Differenzierbarkeit einer Funktion) 68.
- Heinhold, J. (Funktionalgleichungen) 116.
- — und R. Albrecht (Konforme Abbildung) 74.
- Heins, Maurice (Asymptotic values of an entire function) 73.
- Heisenberg, W. (Quantisierung nichtlinearer Gleichungen) 222; (Nichtrenormierbare Wellengleichungen) 222.
- Helgason, S. (Banach algebra) 109.
- Heller, Siegfried (Fehler in Archimedes-Ausgabe) 242.
- Hellund, Emil J. and Katsumi Tanaka (Quantized space-time) 226.
- Helmberg, Gilbert (Endliche Gruppe, Gruppenring und Darstellungen) 257.
- Helphen, Étienne (Analyse intrinsèque d'une distribution) 356.
- Hély, Jean (Champ unitaire) 217; (Équations d'Einstein) 218.
- Hemmingsen, E. (Plane continua) 161.
- Hendersen, K. B. s. D. J. Aitken 14.
- Henkin, L. (Boolean representation) 9; ( $\omega$ -consistency) 11.
- Henrici, Peter (Funktionen von Gegenbauer) 98.
- Henriksen, M. s. L. Gillman 108.
- Herbeck, M. (Heat transfer) 189.
- Herbst, Roland F. (Nuclear forces) 228.
- Herivel, J. W. (Liquid helium II) 234.
- Herlestad, Tore (Linear difference equations) 90.
- Herman, Frank (Energy band structures of diamond) 236.
- —, Joseph Callaway and Forman S. Acton (Exchange potentials) 453.
- Hermann, Robert (Isométries infinitésimales) 411.
- Herrmann, G. (Forced motions of elastic rods) 427.
- Herschel, Rudolf s. A. O. Gelfond 35.
- Hewitt, Edwin and Isidore Hirschman jr. (Maximum problem in harmonic analysis) 105.
- Heywood, P. (Integrability of functions defined by trigonometric series) 61.
- Hieke, Max (Temperaturspannungsproblem) 425.
- Hildreth, Clifford (Point estimates of ordinates of concave functions) 383.
- Hill, I. D. (Regression coefficient) 134.
- Hille, Einar (Théorème de perturbation) 341.
- Hiong, King-Lai (Théorème de Nevanlinna-Milloux) 73.
- Hiraga, Yoshihiko, Hidenori Morimura and Hisao Watanabe (Three-sample test) 373.
- Hirokawa, Hiroshi and Gen-ichirō Sunouchi (Riemann summability) 283.
- Hirschman jr., Isidore s. E. Hewitt 105.
- Hirzebruch, Friedrich (Differentiable and complex manifolds) 168.
- Hitotumatu, Sin (Neumann function) 322.
- Hittmair, Otto (Distributions de probabilités dans une chaîne de Markoff) 362;



- (Principe extrémal d'une chaîne de Markoff) 362.
- Hlavatý, Václav (Maxwell's field in Einstein field theory) 217.
- Hlawka, Edmund (Minima von Sternkörpern) 273; (Geometrie der Zahlen) 273; (Überdeckung durch konvexe Körper) 274.
- Ho, Lo (Interpolation) 354.
- Hochschild, G. (Representations of Lie algebras) 31.
- Hoel, Paul G. (Sequential *t*-test) 368; (Confidence bands for polynomial curves) 379.
- Hoffman, William C. (Outputs of a linear detector) 216.
- Hofmann, Ludwig (Achsiäle Lagen von kollinearen Räumen) 421.
- Höhler, G. (Bewegung von Raumladungen) 215.
- Höiland, Einar (Hydrodynamische Störungstheorie) 187.
- Holt, M. s. F. J. Berry 202.
- Homilius, J. und W. Franz (Innere Feldemission in Kristallen) 239.
- Hong, Imsik (Exceptional values of a differential equation) 310; (Boundary value problem) 323.
- Hopkins, H. Geoffrey and William Prager (Plastic circular plates) 184.
- Hoppe, H. (Wärmeübertragung in Regeneratoren) 206.
- Hörmander, Lars (Inequality of Bohr) 308.
- Horne, M. R. (Buckling of members of symmetrical *I*-section) 423.
- Hornfeck, Bernhard (Satz über die Primzahlmenge) 39.
- Hornich, Hans (Lineare Differentialoperatoren) 316.
- Horninger, H. (Trochoidenschraubenlinien) 400.
- Hort, Wilhelm (Differentialgleichungen) 79.
- Hosemann, R. and S. N. Bagchi (Diffraction effects of crystals) 235.
- — und D. Joerchel (Babinet'sches Theorem) 433.
- Hosszú, Miklós (Functional equation of transitivity) 116.
- Hove, Léon van (Correlations in space and time) 442.
- Howell, John M. and Ben K. Gold (Elementary statistics) 363.
- Howson, A. G. (Intersection of free groups) 21.
- Hsieh, Yü-Chang s. I. Bloch 226.
- Huard de la Marre, R. (Prix global de la production) 137.
- Huber, Alfred (Isoperimetric inequality) 158.
- Huckemann, Friedrich („One-circle“ problem) 326.
- Hudson, G. E. (Deformation of a thin material shell) 180.
- Hughes, D. J. (Neutron optics) 449.
- Hunt, J. N. (Turbulent transport of suspended sediment) 198.
- Huppert, Bertram und Noboru Itô (Faktorisierebare Gruppen. II.) 22.
- Hurley, A. C. (Molecular energies. I. II, III.) 231.
- Huron, R. s. E. Borel 383.
- Huth, J. H. (Elastic wedge problem) 177.
- Hylleraas, Egil (Products of Laguerre polynomials) 66.
- Hyllén-Cavallius, Carl (Trigonometrical kernel) 63.
- brahim, E. M. (Theorem by Murnaghan) 26.
- Ikeda, Mineo (Einstein's theory of gravitation. I.) 217.
- Illingworth, C. R. (Boundary layer growth) 196.
- Imamura, Tsutomu (Potential in quantum field theory) 444.
- — s. R. Utiyama 224.
- Ingarden, R. S. (Einbettung eines Finslerschen Raumes in Minkowskischen Raum) 153.
- — — and H. Ochman (Optimal optical systems) 213.
- Ingraham, R. L. (Interface between superposed fluids) 429.
- Irmai, S. (Rheological bodies under periodic stresses) 427.
- Isay, W.-H. (Potentialströmung) 194.
- Isbell, J. R. (Continuity of real roots of an algebraic equation) 108.
- Iseki, Kanetsiroo (Divisor problem) 42; (Fundamental theorem of algebra) 253.
- Iséki, Kiyoshi (Hannerization of spaces) 159; (Retraction in normal spaces) 159.
- Ishiguro, Kazuo (Équation fonctionnelle) 116.
- İslinskij, A. Ju. (Stabilität elastischer Platten) 177; (Längsbewegungen eines Seiles) 177; (Gleichgewicht elastischer Körper) 177; (Focussierung geladener Teilchen) 437.
- Ito, Daisuke and Hiroshi Tanaka („Overlapping divergences“) 225.
- Itô, Noboru (Monomial representations of finite groups) 25.
- — s. B. Huppert 22.
- Iwahori, Nagayosi (Matrix operators) 31.
- — and Akira Hattori (Nilpotent groups) 21.
- Iyer, P. V. Krishna and M. N. Kapur (Probability distributions) 126.
- R. Venkatachalam (Multi-grades) 35.
- Izumi, Shin-ichi (Trigonometrical series. IX. X. XI.) 288.
- Yoshihisa (Formes normales) 11.
- ablonskij, S. V. (Lineare Funktion) 13.
- Jackson, J. L. and M. C. Yovits (Quantum statistical impedance) 207.
- Jacobsthal, Ernst (Kreise, die auf konzentrischen Kreis abgebildet werden) 391.
- Jaekel, K. (Statistische Prüfverteilungen) 131.
- Jaeger, Arno (Riccatische Differentialgleichung) 32.
- Jahrreiss, Heribert (Elektroneninterferenzen an Zwillingkristallen) 450.
- Jakšić, Borivoj (Selection rules for meson decays) 225.
- Jambunathan, M. V. (Beta and gamma distributions) 128.
- James, I. M. and J. H. C. Whitehead (Fibre spaces)

- 167; (Homotopy theory of sphere bundles. I.) 167.
- Janiczak, A. (Reducibility of decision problems) 12; (Partially recursive functions) 12.
- Jaśkowski, S. (Systems of ordinary differential equations) 13.
- Jataev, M. (Stabilität der Lösungen von Differentialgleichungen) 115.
- Jauch, J. M. (Quantization of spinor fields) 221.
- Jean, Maurice (Dérivation du potentiel nucléaire) 225.
- Jecklin, H. und P. Strickler (Mechanische Ausgleichung) 134.
- Jeeves, T. A. (Linear manifolds) 381.
- Jeffreys, Harold (Hamilton's principle) 172.
- Jenkins, G. M. (Angular transformation for correlation coefficient) 365.
- James and Marston Morse (Curve families  $F^*$ ) 99.
- A. (Trajectories of a quadratic differential) 304.
- Jenner, W. E. (Algebras over algebraic function fields) 265.
- Jerison, Meyer (Extreme points of convex sets) 104.
- — s. L. Gillman 108.
- Jeżewski, M. and J. Oderfeld (Distributions of strength indices) 366.
- Jindra, F. (Hohlkugel bei nichtlinearem Elastizitätsgesetz) 426.
- Joerchel, D. s. R. Hosemann 433.
- John, F. s. L. Bers 316.
- Jónsson, Bjarni (Modular lattices and Desargues' theorem) 384.
- Jost, Res (Lineare Differenzgleichungen) 91.
- Julia, Gaston (Produits de deux symétries) 339.
- Jurkat, W. and A. Peyerimhoff (Fatou-Rieszscher Satz) 330.
- Just, Walter (Seitenstabilitätseigenschaften eines Flugzeuges) 196.
- Justice, Howard K. s. Edward S. Smith 142.
- Kac, A. M. (Biharmonische Schwingungen eines Systems) 174.
- G. I. (Topologische Räume) 415.
- M. (Toeplitz matrices in probability theory) 102; (Signal and noise problems) 126.
- Kadison, Richard V. s. J. Feldman 337.
- Kahane, A., W. R. Warren, W. C. Griffith and A. A. Marino (Wave interactions with channels) 204.
- Kaku, Kōichi (Hydrogen bond. I.) 233.
- Kakutani, Shizuo (Uniform boundedness of spectral measures) 347.
- Kale, M. N. (Magic square) 14.
- Kaloujnine (Kalužnin), L. A. s. B. V. Gnedenko 1.
- Kalugina, E. P. (Die Klasse  $L_\Phi$ ) 334.
- Kamat, A. R. (Moments of mean deviation) 127; (Estimates for standard deviation) 131.
- Kämmerer, C. (Strömung in Expansionsdüse) 430.
- Kampé de Fériet, Joseph (Transformations de Reynolds) 125.
- Kanazawa, Akira and Masao Sugawara (Magnetic moment of nucleon) 228.
- Kandō, Tetsuo (Characterization of topological spaces) 158.
- Kane, T. R. (Reflection of flexural waves) 428.
- Kaneno, Tadashi s. Sh. Hatanano 446.
- Kangro, G. (Methode der gewogenen arithmetischen Mittel) 282.
- Kanitani, Jōyō (Forme de Darboux. I.) 156.
- Kanold, Hans-Joachim (Vollkommene und befreundete Zahlen) 38.
- Kaplan, S. A. (Spektralgleichungen) 438.
- — und K. P. Stanjukovič (Magneto-Gasdynamik) 438.
- Wilfred (Gross star theorem) 296.
- Kappos, Demetrios A. (Totaladditivität der Wahrscheinlichkeit) 356.
- Kapur, M. N. s. P. V. Krishna Iyer 126.
- Karpinski, Louis (Bibliography of mathematical works) 2.
- Karpov, K. A.
- $$\left(w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx\right) 122.$$
- Kashiwagi, Sadao s. Sh. Ozaki 305.
- Kasriel, Robert H. (Decomposition of a space) 158.
- Kauderer, H. (Nichtlinearer freier Schwingen) 174; (Dämpfung freier Schwingungen) 175.
- Kaufmann, Walther (Hydro- und Aeromechanik) 189.
- Kawata, Tatsuo (Fourier-Stieltjes transform) 332.
- Kazavčinskij, Ja. Z. (Konstanten der Zustandsgleichung eines realen Gases) 233.
- Keldyš, Ljudmila (Nulldimensionale offene Abbildungen) 160.
- Keller, Ott-Heinrich (Komposition endlicher Gruppen) 23.
- Kelly, Howard R. (Normal-force, drag and pitching-moment coefficients for bodies of revolution) 195; (Laminar boundary layer on a circular cylinder) 197.
- John B. and L. M. Kelly (Paths and circuits in graphs) 169.
- L. M. s. J. B. Kelly 169.
- Kemmer, N. (Quantum-mechanical perturbation) 219.
- Kendall, M. G. (Estimation of autocorrelation) 133; (Problems in sets of measurements) 370.
- Kennedy, E. C. (Elliptic integrals) 353.
- J. M. and W. T. Sharp (Gamma radiation) 449.
- Kenney jr., J. T. (Vibrations of beam) 428.
- Kent, D. C. s. J. S. Levinger 447.
- Keogh, F. R. (Bounded schlicht functions) 74; (Inequalities) 300.
- Kerawala, Sulaiman (Darboux-Riccati equation) 80.
- Kerner, Edward H. (Periodic lattice) 452.
- Kertész, A. and T. Szele (Non-discrete topologies in

- infinite Abelian groups) 260.
- Kertész, A. s. L. Fuchs 23.
- Kibel (Kibel'), I. A. s. N. J. Kotschin 186.
- Kikuta, Takashi (Born approximation. I. II.) 443.
- Kilmister, C. W. and G. Stephensen (Unified field theories. I. II.) 216.
- Kilpi, Yrjö (Komplexes Momentenproblem) 345.
- Kim, Sen En (Imprimitive Liesche Gruppen) 27.
- King, E. P. (One-criterion variance components analysis) 128.
- — — s. E. Lukacs 124.
- Kinoshita, Toichiro and Yoichiro Nambu (Many-particle systems) 237.
- Kiprijanov, I. A. (Trigonometrische Interpolationspolynome) 291.
- Kiselev, A. A. (Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit) 92.
- Kitagawa, Tosio (Empirical functions) 380.
- Kitajgorodskij, A. I. (Strukturanalyse) 451.
- Kjellberg, Bo (Maximum and minimum modulus of entire functions) 73.
- Klamkin, Murray S. (Rational points on a circle) 35; (Vector triple product) 399.
- Klee, V. L. s. E. E. Floyd) 104.
- Klein, Abraham (Pair coupling) 446.
- O. (Einstein's gravitational equations) 439.
- Klepper, W. (Natürliche Gleichung) 149.
- Kline, Morris (Newtonian mathematics) 1.
- S. J. s. A. H. Shapiro 202.
- Klingenberg, Wilhelm und Ernst Wilt (Artsche Invariante) 253.
- Klinger, H. H. (Mikrowellen) 209.
- Kneser, Martin (Zentrum der Cliffordschen Algebren) 253.
- Knödler, H. s. H. Richter 450.
- Kobayashi, Shoshichi (Groupe de transformations) 156.
- Koch, R. J. (Primitive idempotents in semigroups) 27.
- Kočin, N. E. s. N. J. Kotschin 186.
- Kočina, N. N. (Instationäre Bewegung eines Gases) 203.
- Kodis, Ralph D. (Comments of „Diffraction of electromagnetic waves“) 211.
- Kolchin, Eleanor K. s. L. C. Green 232.
- Kolmogorov, A. N. (Bedingt periodische Bewegungen) 315.
- — — s. B. V. Gnedenko 360.
- Kołos, W. (Hindered rotation) 449.
- Komatu, Yûsaku (Probability-generating functions) 134; (Neumannsche Randwertaufgabe) 322.
- — — and Hisao Mizumoto (Boundary value problems for a sphere) 322.
- Kondorskij, E. und A. Pachomov (Spontane Magnetisierung von Metallen) 238.
- König, H. s. F. Fiala 7.
- Korevaar, Jacob (Entire functions) 293.
- Koroljuk, V. S. (Verträglichkeitskriterien) 129.
- Korowkin (Korovkin), P. P. (Ungleichungen) 45.
- Kortel, F. (Große Energieübertragungen) 444.
- Koschmieder, Lothar (Determinanti ortosimmetrici di funzioni) 251.
- Kosiński, A. (2-polytopes) 418; (Divisors of polytopes) 418.
- Kostandjan, B. A. (Drehung einer Welle) 423.
- Kosteljanec, P. O. und Ju. G. Rešetnjak (Additive Funktion) 55.
- Koster, G. F. (Scattering in solids) 452.
- — — and J. C. Slater (Wave functions for impurity levels) 452; (Impurity calculation) 452.
- Kostjučenko, A. G. (Cauchysches Problem für System partieller Differentialgleichungen) 317.
- — — und G. E. Šilov (Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen) 316.
- Kostjuk, A. G. (Rotierender Vollzylinder) 183.
- Kothari, L. S. (Riesz potential. I.) 223; (III.) 224; (Riesz potential and elimination of divergences from meson theory) 445.
- Köthe, Gottfried (Widerspruchsfreiheit der Mathematik) 245; (Kompakte Operatoren) 340.
- Kotsakis, D. (Mathematical simplicity and elegance in natural research) 1.
- Kotschin, N. J. (Kočin, N. E.), I. A. Kibel und N. W. Rose (Hydromechanik. I.) 186.
- Kowalsky, Hans-Joachim (Limesräume und Komplettierung) 414.
- Kozakiewicz, W. s. P. L. Butzer 56.
- Kožechnikov, S. N. (Mechanismen und Maschinen) 401.
- Krasnosel'skij, M. A. (Kritische Werte gerader Funktionale auf der Sphäre) 107; (Aufgaben der nichtlinearen Analysis) 114.
- — — und L. A. Ladyženskaja (Vollständigkeit des Operators von P. S. Urysohn) 340; (Spektrum inhomogener Operatoren) 340.
- Krasovskij, N. N. (Nichtlineare Differentialgleichungen) 86; (Integralkurven von zwei Differentialgleichungen) 89.
- Krein, S. G. (Unbestimmte Gleichungen im Hilbertschen Raum) 111.
- Kreyszig, E. (Eigenwerte hermitescher Matrizen) 351.
- Krishna Iyer, P. V. s. Iyer, P. V. Krishna 126.
- Kröner, Ekkehart (Spannungsfunktionen der Elastizitätstheorie) 425.
- Kronig, R. (Physics) 169.
- Kručkovič, G. I. („Klassifikation Riemannscher Räume“) 410.
- Kruskal, William H. s. L. A. Goodman 128.
- Krzywoblocki, M. Z. v. (Bénard-Kármán vortex street. II.) 429.
- Kudrjavcev, L. D. (Differenzierbare Abbildungen) 57.
- Kufarev, P. P. (Extremalgebiete des Koeffizientenproblems) 300.
- — — und N. V. Semuchina (Aufgabe von N. N. Luzin) 298.



- Kuljabko, E. S. s. V. I. Smirnov 4.
- Kuntzmann, Jean (Représentations approchées de dérivées) 287.
- Kunz, K. S. (Microwaves between conducting surfaces) 209.
- Kuranishi, Masatake (Homotopy groups) 164.
- Kuratowski, Kazimierz (Mathematisches Leben in Volkspolen) 242; (Fonctions rationnelles homotopes à des fonctions biunivoques) 420; (Homéomorphies définies sur des continus plans) 421.
- Kurita, Minoru (Isometry of a homogeneous Riemann space) 152.
- Kužmina, A. L. (Reihen nach Orthogonalpolynomen) 68.
- Kuznecov, P. L., R. L. Stratonicov und V. I. Tichonov (Röhrengenerator) 215.
- La**asonen, Pentti (Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe) 118.
- Ladyženskaja, O. A. (Lösbarkeit fundamentaler Randwertaufgaben) 95; (Aufgabe von Lavrent'ev-Bicadze) 319.
- Ladyženskij, L. A. s. M. A. Krasnosel'skij 340.
- LaFara, Robert L. (Inverse trigonometric functions) 353.
- Laffleur, Charles (Fonction de Dirac) 107.
- Laha, R. G. (Canonical correlations) 357; (Gamma distribution) 358.
- Lambek, J. and L. Moser (Sequences of natural numbers) 269.
- Lance, G. N. (Oscillating wings in subsonic flow) 194.
- Landau, Henry J. (Approximation to continuous functions) 71.
- Lange, O. s. H. Steinhaus 364.
- Langman, Harry (Problem in checkers) 14.
- Laugwitz, Detlef (Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I.) 151; (II.) 152; (Pythagoreische Metrik) 441.
- Lawrence, H. R. and A. H. Flax (Wing-body interference) 195.
- Lebedev, N. N. s. G. A. Grinberg 210.
- Ledoux, P. s. M. Dehalu 5.
- Lee, E. H. s. R. D. Glauz 427.
- T. D. and R. Christian (Meson-nucleon scattering) 445.
- Leech, J. W. s. R. O. Davies 126.
- Lefschetz, Solomon (Periodic solutions of differential equations) 311.
- Legrain-Pissard, N. (Réseaux homaloïdaux de courbes) 394.
- — — S. O. Rozet 408.
- Lehman, R. Sherman (Surface waves) 240; (Mapping function) 302.
- Lehmann, E. L. s. H. Chernoff 371.
- Lehto, Olli (Meromorphic functions) 297.
- Leigh-Dugmore, C. H. (Particle-size calculations) 206.
- Leisegang, Gertrud (Descartes Dioptrik) 3.
- Leitner A. s. E. C. Hatcher jr. 209.
- Leja, F. (Polynômes extrémaux) 74.
- Lejbenzon, Z. L. (Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe) 62.
- Lelong, Pierre (Dérivées d'une fonction plurisous-harmonique) 78.
- Lemmlejn, V. (Euklidische Ringe) 264.
- Lenz, Hanfried (Quadratsummandarstellung) 33; (Absolute Polarität) 138.
- Leonard, Robert W. s. J. M. Hedgepeth 196.
- Leonardi, Raffaele (Bimagic matrices) 267.
- Leptin, Horst (Linear kompakte abelsche Gruppen. I.) 260.
- Leray, Jean (Physical facts and differential equations) 170.
- Leslie, D. C. M. s. J. Fell 431.
- Lessen, M. (Infinitesimal disturbances in gases) 429.
- Levenson, L. B. (Mechanismen und Maschinen) 401.
- Levey, Martin (Abraham Savasorda) 3.
- Levinger, J. S. and D. C. Kent (Particle model) 447.
- Levitant, B. M. (Entwicklung nach Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators) 94; (Entwicklung nach Eigenfunktionen von  $\Delta u + \{\lambda - q(x)\} u = 0$ ) 97.
- Lévy, Paul (Mouvement brownien) 126; (II.) 362; (Addition des variables aléatoires) 359.
- Levy, Solomon (Effect of temperature changes upon laminar boundary layers) 198.
- Lewin, L. (Diffraction of electromagnetic waves) 210.
- Lewis, I. A. D. s. J. Dain 213.
- Margaret N. s. L. C. Green 232.
- Li, Ting-Yi und H. T. Nagamatsu (Effect of heat transfer on laminar boundary layer) 431.
- Libermann, Paulette (Équivalence de structures infinitésimales) 154.
- Liberberg, T. I. und K. B. Tolpygo (Bewegung eines Elektrons) 236.
- Lichnerowicz, André (Groupes d'automorphismes de variétés kählériennes) 412; (Théorie unitaire du champ d'Einstein) 440.
- Lidov, M. L. (Instationäre Bewegungen eines Gases) 202.
- Lieblein, Julius (Extreme values and tensile strength) 132.
- Lin, C. C. (Stability of parallel flows) 190; (Perturbation theory) 199.
- Linek, Allan (Machine for calculation of structure factors) 450.
- Linnik, Ju. V. (Gitterpunkte auf der Sphäre) 275.
- Lions, Jacques Louis s. J. Deny 334.
- Livesay, George R. (Theorem of F. J. Dyson) 419.
- Livšic, M. S. (Inverses Problem der Operatoren. I. II.) 111.
- Ljance, V. E. (Randwertaufgabe für parabolische Differentialgleichungssysteme) 95.
- Ljapin, E. S. (Halbgruppen. I. II.) 254.
- Ljaščenko, N. Ja. (Asymptotische Stabilität der Lösungen eines Differentialgleichungssystems) 87;

- (Zerlegungsgesetz für lineare Differentialgleichungen) 313.
- Ljunggren, Wilhelm (Diofantische Gleichung) 36.
- Loève, Michel (Relations entre lois limites) 361.
- Lomax, K. S. (Business failures) 137.
- Lomazzi, Luigi (Curve notevoli) 392.
- Lombardo-Radice, Lucio (Piani di rifrazione) 255.
- Longo, Carmelo (Complessi lineari di piani) 142.
- Lonsdale, Kathleen s. H. J. (Grenville-Wells) 235.
- Lonseth, A. T. (Fredholm-type integral equations) 100.
- Look, C. H. (Fourier coefficients of  $l(\omega_1, \omega_2)$ ) 296.
- Lord, R. D. (Hankel transform in statistics. II.) 124.
- — — (Distribution of distance in a hypersphere) 363.
- Lorentz, G. G. (Problem of additive number theory) 39.
- Lorenzen, Paul (Zweiwertige Aussagenlogik) 7.
- Loś, J. (Théorème de Gödel) 10.
- Lotkin, M. and M. E. Young (Binomial coefficients) 122.
- Low, F. E. (Scattering of light) 444.
- Löwdin, Per-Olov (Atomic self-consistent fields. II.) 230.
- Lowe, J. R. (A. D. E. integrator) 121.
- Ludwig, Rudolf (Iterationsverfahren für Gleichungen. II.) 352.
- — s. W. Schulz 189.
- Lukacs, Eugene and Edgar P. King (Normal distribution) 124.
- Lukaszewicz, J. and H. Steinhäus (Telephone network) 117.
- L. (Electronic analyser) 354.
- Lundmark, Knut (Metagallactic distance indicators) 240.
- Lundqvist, Stig O. (Binding energy of the LiH-crystal) 231.
- Lüst, R., A. Schlüter und E. Trefftz (Multipolfelder) 170.
- MacDonald III, William M. and John M. Richardson (Variational principle in quantum statistics) 206.
- Mace, David s. L. C. Green 232.
- Mach, E. (Physical optics) 213.
- Macintyre, A. J. s. N. A. Bowen 72.
- Mack, C. (Number of clumps) 126.
- MacKenzie, Robert E. (Commutative semigroups) 19.
- MacLean, Willam (Strong electromagnetic waves in massive iron) 207.
- MacRobert, T. M. (Integrals involving Bessel function) 64; (Functions of a complex variable) 291.
- Maehara, Shōji (Intuitionistische Logik) 247.
- Magness, T. A. (Non-Gaussian noise) 362.
- Magnus, Wilhelm (Differential equations for a linear operator) 341.
- Mahler, Kurt (Geometry of numbers) 274; (Problem in elementary geometry) 387.
- Majo, A. de (Quadrangle) 140.
- Majumdar, R. C., S. Gupta and S. K. Trehan (Point particle in a meson field) 226.
- Makar, Bushra H. s. Ragy H. Makar 69.
- Ragy H. (Algebraic basic sets of polynomials. I. II.) 68; (Simple monic set of polynomials) 68; (Derived basic sets of polynomials) 70.
- — — and Bushra H. Makar (Algebraic basic sets of polynomials. I. II.) 69.
- Malenka, Bertram J. (Polarization in nucleon-nucleon scattering) 447.
- Malgrange, Bernard (Équations aux dérivées partielles) 107.
- Malkin, I. G. (Resonanz in quasiharmonischen Systemen) 87.
- Malliavin, Paul (Problèmes de Watson) 295; (Séries de Dirichlet) 295.
- Malmquist, Sten (Confidence contours) 378.
- Malyšev, A. V. (Gitterpunkte auf Ellipsoiden) 275.
- Manara, Carlo Felice (Invarianti proiettivi differenziali) 150; (Teorema di geometria descrittiva) 421.
- Manioine, M. J. s. A. M. Wahl 183.
- Mann, W. Robert and Jacob F. Blackburn (Temperature problem) 323.
- Manukjan, M. M. (Schrumpfungsspannung in Eisenbetonelementen) 185.
- R. A. (Balken unter Wirkung von Punktkräften) 178.
- Manwell, A. R. (Variation of compressible flows) 193.
- Mapleton, Robert (Cross-section theorem) 221.
- Marakathavalli, N. (Distribution of  $t_1$ ) 369.
- Maravall Casesnoves, Dario (Aleatorische Funktionen der Mikrophysik) 206.
- Marchionna, Ermanno (Curve algebriche appartenenti ad una quadrica) 144.
- Mardešić, Sibe (Sous-espaces linéaires) 51.
- Marino, A. A. s. A. Kahane 204.
- Mariot, Louis (Champ électromagnétique singulier) 216.
- Markov, A. A. (Konstruktive Funktionen) 249.
- Markušević (Markusche-witsch), A. I. (Bemerkenswerte Kurven) 141; (Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen) 300.
- — — s. Enzyklopädie der Elementarmathematik 13.
- Markwald, Werner (Konstruktive Wohlordnungen) 47.
- Marmion, A. (Sphères podaires par rapport à un tétraèdre. I.) 140; (II.) 389; (Quadriques normalement inscrites à un tétraèdre) 141.
- Marnjanskij, I. A. (Beugung der Wellen um eine vertikale Platte) 204.

- Marre, R. Huard de la s. Huard de la Marre, R. 137.
- Marriott, F. H. C. and J. A. Pope (Autocorrelations) 133.
- Marsaglia, George (Limits for dependent variables) 361.
- Marstrand, J. M. (Plane sets of fractional dimensions) 55.
- Martin, A. I. (Wave equation) 94; (Eigenfunction expansions) 325.
- C. F. (Summability theory) 281.
- Norman M. (Decision element sets) 248.
- Marušvič, T. I. (Reelle Wurzeln algebraischer Gleichungen) 354.
- Maruhn, K. (Hydrodynamische Existenzbetrachtung) 186.
- Marx, Imanuel (Recurrence relations) 63.
- Mason, W. P. (Magnetostriktion und anisotropic energies for crystals) 453.
- Mase, Shoichi s. K. Ariyama 451.
- Massera, José L. (Total stability) 314.
- Mastrogiacomo, Pasquale (Trasformazioni puntuali) 407.
- Masuyama, Motosaburo (Screening defective articles) 132; (Error in crop cutting experiment) 383.
- Matschinski, Matthias (Moyennes-tenseurs) 123; (Équations de la plasticité) 427; (Vibrations d'une plaque plane infinie) 428.
- Matsusaka, Teruhisa (Theorem of Castelnuovo-Enriques) 146.
- Matsushima, Yozô (Pseudogroupe d'isomorphismes locaux) 259.
- Mathews, P. M. s. A. Ramakrishnan 233.
- Matthews, P. T. and Abdus Salam (Renormalization) 443; (Green's functions of quantised fields) 443.
- Maurin, K. (Systeme elliptischer Differentialgleichungen) 320.
- Mautner, F. I. (Congruence characters) 271.
- Maxfield, J. E. (Programming for analog computers) 121.
- Maxwell, E. A. (Analytic calculus. I, II.) 45.
- James Clerk (Electricity and magnetism) 206.
- May, K. O. (Models of the Euclidean plane. III.) 353.
- Mayer-Kalkschmidt, Jörg (Laplace-Stieltjes-Integrale) 331.
- Mazur, P. s. R. Fieschi 238.
- Mchitarjan, A. M. (Filtration) 204.
- McKean jr., Henry P. (Finitely additive measures) 277.
- McLain, D. H. (Characteristically-simple group) 22.
- McLeod jr., Edward s. P. R. Garabedian 186.
- McMaster, William H. (Polarization and Stokes parameters) 220.
- McMinn, Trevor J. (Measure splitting) 276.
- McNaughton, Robert (Truth definition) 12.
- Meixner, Josef und Friedrich Wilhelm Schäfke (Eigenwertkarten der Sphäroiddifferentialgleichung) 84.
- Mel, H. C. (Entropy production) 206.
- Mendes, M. (Équation aux dérivées partielles du troisième ordre) 92.
- Mergeljan, S. N. (Gewogene Approximationen) 61.
- — — und M. M. Džrbašjan (Annäherungen durch rationale Funktionen) 71.
- Méric, Jean (Formule de Walker) 130.
- Merk, H. J. (Influence of melting on thermal convection) 198.
- — — and J. A. Prins (Thermal convection. II. III.) 197.
- Merman, G. A. (Geschwindigkeit beim Dreikörperproblem) 240.
- Meschkowski, Herbert (Bergmannsches Orthonormalsystem) 71.
- Messel, H. s. B. A. Chartres 229.
- Metelka, Josif (Bemerkung zu Analogon zum Pascalschen Satz) 391.
- Metropolis, N. s. R. L. Bivins 258.
- Meyer, M. A. and David Middleton (Signals and noise after rectification and filtering) 215.
- Michael, D. H. (Conducting fluid rotating about an axis) 186.
- Michelson, V. S. (Vorzeichen der Lösung linearer Gleichungen) 16.
- Middleton, David s. M. A. Meyer 215.
- Miele, Angelo (Turbojet aircraft) 196.
- Mignolet, J. C. P. (Film adsorbé composé de dipôles) 432.
- Mihăileanu, N. (Nichteuklidische Geometrie) 138.
- Mikołajska, Z. (Propriété asymptotique des intégrales d'une équation différentielle) 80.
- Miles, John W. (Equations of non-steady flow) 199.
- Milford, F. J. (Odd-nucleon-plus-liquid-drop-model) 227.
- Miller, K. S. s. F. J. Murray 313.
- Maximilian (I. Newton: Analysis mit unendlichen Reihen) 4.
- Millington, G. (Sextic equation) 116.
- Milner, Paul C. s. L. C. Green 232.
- Minami, Shigeo (Meson-nucleon interaction) 224.
- Minguzzi, A. (Optical model of nuclei) 446.
- Minorsky, N. (Stroboscopic method) 314.
- Minozzi, Luisa (Equazione di Liénard) 312.
- Miras, J. R. Fuentes s. Fuentes Miras, J. R. 13.
- Mirguet, J. (Dérivabilité des orthosurfaces) 57.
- Miroslavlev, E. N. (Nicht-lineare Systeme mit Korrekturvorrichtung) 315.
- Mises, Richard von (Mehrdimensionale Integrale) 285.
- — — s. Studies in Mathematics and Mechanics.
- Mishkin, E. (Squirrel-cage induction machine) 432.
- Mitchell, A. R. (Poisson's equation) 120.
- B. E. (Unitary multiples of a matrix) 250.
- Mitra, Sujit Kumar (Minimum variance in unbiased estimation) 381.



- Mitrinović, Dragoslav S. (Aufgabensammlung) 1.
- Mitropol'skij, Ju. A. (Wirkung einer „sinusoidalen“ Kraft auf einen Vibrator) 175.
- Mitter, H. und P. Urban (Streuung schneller Elektronen) 228.
- Mittmann, Otfried M. J. (Analyse empirischer Funktionen) 133.
- Mizumoto, Hisao s. Y. Komatsu 322.
- Moessner, Alfred s. G. Xeroudakes 267.
- Mohanty, R. and M. Nanda (Cesaro mean of derived Fourier series) 61.
- Mollo-Christensen, Erik and Holt Ashley (Piston theory) 194.
- Monseau, M. (Points inverses) 142.
- Montague, Richard and Jan Tarski (Postulates for Boolean algebras) 28.
- Montel, Paul (Critère de normalité) 298.
- Moór, Arthur („Dualität Finslerscher und Cartanscher Räume“) 412.
- Moore, Charles N. (Nörlund means) 284.
- Morawetz, Cathleen S. (Frankl's problem) 319.
- Morduchaj-Boltovskoj, D. (Geodätische Linien eines Ellipsoids) 150.
- Morduchow, Morris (Method of averages) 383.
- Morgan, Antony J. A. (Stress distributions in semi-infinite solids) 181.
- Morgenstern, Dietrich (Maxwell-Boltzmann equation) 205.
- — s. W. Schmeidler 101.
- Morphen, Karl und Kurt Rothe (Strömung im Axiallader) 191.
- Morimoto, Akihiko (Free group) 21.
- Morimura, Hidenori s. Y. Hiraga 373.
- Morinaga, Kakutaro and Takayuki Nôno (Non-commutative solutions of  $e^x e^y = e^{x+y}$ ) 15.
- Morito, Nozomu (Chromatic field aberration of magnetic electron lens) 213.
- Morrey jr., Charles B. (Equations of hydrodynamics) 205.
- Morris, D. N. and J. W. Smith (Grenzschichtgleichungen) 196.
- Morrison, Philip, Stanislaw Albert and Bruno Rossi (Cosmic rays) 229.
- Morse, Anthony P. (Intervals of prescribed lengths) 279.
- Marston s. J. Jenkins 99.
- Moser, L. s. J. Lambek 269.
- Moses, H. E. (Variational principles) 221.
- Mostert, Paul S. (Group acting on a manifold) 28; (Fibre spaces) 167.
- Muggia, Aldo (Trasmissione termica per una piastra) 188.
- Mulder, Marjorie M. s. Louis C. Green 232.
- Muller, G. M. (Indefinite integrals of functions) 63.
- Müller, Claus (Hardysche Identität) 43; ( $\Delta U = F(x, U)$ ) 322.
- H. (Eigenwertaufgaben) 345.
- Werner (Hodographenmethode der Gasdynamik) 192; (Rotationskörper in der reibungslosen Flüssigkeit) 194; (Biegungstheorie einer Vierpilzplatte) 424; (Trägheitskoeffizienten unsymmetrischer Rotationskörper) 430.
- Munakata, Ken-iti (Plane shock wave) 203.
- Muracchini, Luigi (Varietà  $V_3$  analitiche) 151.
- Murnaghan, Francis D. (Representations of unimodular unitary group) 25; (Unitary invariants of a square matrix) 251; (Analyses of  $\{m\} \otimes \{1^k\}$ ) 257.
- Murray, F. J. and K. S. Miller (Ordinary differential equations) 313.
- Müser, H. A. (Metal surface) 450.
- Muth, John F. (Balanced growth) 135.
- Myrberg, Lauri (Harmonische Funktionen) 75.
- Myškis, A. D. (Fixpunkt eines dynamischen Systems) 89.
- Mysovskich, I. P. (Čaplygin'sche Methode) 322.
- Nagamatsu, H. T. s. T.-Y. Li 431.
- Nagamiya, Takeo (Antiferromagnetic resonance) 238.
- Nagata, Jun-iti (Uniform topology of functional spaces) 333.
- Nagell, Trygve (Congruences) 267.
- Najmark, M. A. (Spektrum und Entwicklung nach Eigenfunktionen eines Differentialoperators) 311; (Darstellungen der Lorentzgruppe) 338; (Eigenvektoren und assoziierte Vektoren eines linearen Operators) 343.
- Nakai, Yoshikazu s. H. Mishimura 145.
- Nambu, Yoichiro s. T. Kinoshita 237.
- Nanda, M. s. R. Mohanty 61.
- Natanson, I. P. (Funktionen einer reellen Veränderlichen) 52.
- Naumann, Herbert (Das zweite Distributivgesetz) 385; (Affine Geometrie) 385.
- Naylor, Derek (Simple wave in rotational gas flow) 189.
- Nazarov, A. G. (Widerstandsfähigkeit gegen Erdbeben) 186.
- Nebe, Wolfgang (Permutationsgruppen) 23.
- Nef, Walter (Zerlegungsäquivalenz von Mengen) 54.
- Nehari, Zeev and Binyamin Schwarz (Coefficients of Laurent series) 299.
- Neisser, Hans (Balanced growth) 136.
- Nelder, J. A. (Negative components of variance) 127.
- Nelson, C. W. s. Ning-Gau Wu 178.
- Nemyckij, V. V. (Methode der drehenden Funktionen) 88; (Spektrum nicht-linearer Operatoren) 345.
- Netanyahu, E. (Differential equations of the elliptic type) 98.
- Neuber, H. (Torsionsschwingungszahlen) 428.
- Neugebauer, O. („Hippopede“ of Eudoxus) 243.
- Neumann, B. H. (Algebraic systems) 29.

- Neumer, Walter (Ordnungszahlen. I. II. III.) 49.
- Newton, Roger G. (Radiative effects) 223.
- Neyman, Jerzy and Elizabeth L. Scott (Spatial distribution of galaxies) 240.
- Nicholson, W. L. (Analysis of variance test) 128.
- Nickel, K. (Tragflügelgitter. I.) 193.
- Nicol, C. A. ( $(r^{p-1} - 1)p$ ) 37.
- — — and H. S. Vandiver (Von Sterneck arithmetical function) 40.
- Niehurs, H. (Strahlungsfeld bei Elektroneninterferenzen) 235; (Elektronen-Doppelinterferenz) 236.
- Nikitin, A. A. (Verbotene Linien  $\text{Ca}^+$  im Sonnenspektrum) 230.
- Nikodým, O. M. s. D. T. Finkbeiner 333.
- Nikolaev, P. V. (N-rationale Gleichungen) 121.
- Ninot, Joachim (Hauptsatz der Galoisschen Theorie) 32.
- Nishimura, Hajime and Yoshikazu Nakai (Curve connecting given points) 145.
- Nitsche, Joachim (Verbiegung der Halbkugel. II.) 405.
- Nocilla, Silvio (Equazioni alle derivate parziali) 321.
- Noli, Walter (Schraubenabbildungen) 401.
- Nôno, Takayuki s. K. Morinaga 15.
- Nordbotten, Svein (Optimal sample size) 380.
- Norguet, François (Domaines d'holomorphie des fonctions uniformes) 77; (Produit tensoriel) 335.
- Nörlund, Niels Erik (Hypergeometrische Funktionen) 66.
- Northcott, D. G. (Local cone of a point) 145.
- Oberhettinger, F. (Diffraction of waves) 435.
- Ochman, H. s. R. S. Ingarden 213.
- Oderfeld, J. (Product of powers of random variables) 128.
- — — s. M. Jeżewski 366.
- — — s. H. Steinhaus 364.
- Odqvist, F. K. G. (Column buckling) 185.
- Ogasawara, Tôzîrô (Finite-dimensionality of Banach algebras) 109.
- — — and Kyôichi Yoshinaga (Banach \*-algebras) 337.
- Ohgane, Masayoshi s. K. Yano 218.
- Ohkubo, Takeo (Connections in Finslerian space) 413.
- Ohtsuka, Makoto (Functions bounded and analytic in the unit circle) 298.
- Okamoto, Masashi (Matrices with application to experimental design) 16.
- Okubo, Susumu (Second kind interaction) 445.
- Okugawa, Kôtarô (Differential algebra) 264.
- Oldroyd, J. G. (Hydrodynamic and thermodynamic pressures) 206.
- Olejnik, O. A. (Cauchysches Problem für nicht-lineare Gleichungen) 318.
- Oliveira, J. Tiago de s. Tiago de Oliveira, J. 382.
- Olsen, Haakon (Laguerre polynomials) 65.
- Olson, R. F. s. L. Carlitz 36.
- Onat, E. T. and W. Prager (Necking of a tension specimen) 184.
- — — s. D. C. Drucker 203.
- Oneda, S. s. H. Umezawa 444.
- Ono, Takashi (Orthogonal groups) 28.
- Oppenheim, A. (Inequalities connected with Hermitian forms. II.) 16.
- Ore, Øystein (Niels Henrik Abel) 4.
- Orsinger, Heinz (Resultantensysteme) 252.
- Osborn, R. K. s. M. E. Rose 228, 229.
- Osório, Vasco (Elimination) 18.
- Ostrowski, A. (Problems in abstract algebra) 352.
- O'Sullivan, D. G. (Diffusion equations) 206.
- Otsuki, Tominosuke (Closed surfaces of negative curvature in  $E^4$ ) 410.
- Ott, Karl (Kaskadentheorie) 229.
- Ozaki, Shigeo, Sadao Kashiwagi and Teruo Tsuboi (Schwarzian lemma in matrix space) 305.
- Pachomov, A. s. E. Kondorskij 238.
- Page, E. S. (Continuous inspection schemes) 380.
- Pagni, Plinio (Partizioni numeriche. I. II.) 269.
- Pai, Shih-I. (Vortex sheet 200; (Laminar flow of an electrically conducting fluid) 438.
- Pais, A. (Spherical spinors) 399.
- Palman, Dominik (Flächen 3. Ordnung) 392.
- Pandya, S. P. (Scattering of mesons) 225.
- Papas, C. H. (Sommerfeld's complex order wave functions) 208.
- — — s. A. Erdélyi 434.
- Parchomenko, A. S. (Was ist eine Linie) 160.
- Paria, Gunadhar (Stress distribution in plates. I.) 424.
- Parker, E. T. (Semigroups of residue classes) 20.
- Parodi, Maurice (Courbes planes) 401.
- Parry, William Tuthill (Symbolism for propositional calculus) 8.
- Parzen, Emanuel (Uniform convergence of integrals) 280.
- Pastori, Maria (Teoria unitaria di Einstein) 217.
- Patankar, V. N. (Goodness of fit of frequency distributions) 372.
- Patterson, H. D. (Errors of lattice sampling) 381.
- Pauc, Chr. s. O. Haupt 276.
- Pauwen, J.-L. s. M. Dehaeu 5.
- Payne, L. E. (Crack and punch problems) 181.
- Pchakadze, Š. S. (Mengen vom Maße Null) 278.
- Pearson, E. S. and H. O. Hartley (Biometrika tables. I.) 127.
- — — s. H. A. David 366.
- — — J. D. (Rightangled junctions in wave guides) 210.
- Peierls, R. E. s. M. Chrétien 444.
- Penrose, O. (Quantization of sound waves. I.) 234.
- Pepping, R. A. (Flight flutter testing) 203.

- Perron, Oskar (Kettenbrüche. I.) 59.
- Peski-Tinbergen, Tineke van and C. J. Gorter (Susceptibilities of antiferromagnetic crystals) 453.
- Pestel, E. (Strömungsgleichnis der Torsion) 179.
- Peter, Hans (Wirtschaftskreislauf) 135.
- Peters, A. S. and J. J. Stoker (Diffraction problems) 434.
- Petersen, G. M. (Summation) 58.
- Petiau, Gérard (Ondes des corpuscules en mouvement rectiligne et uniforme) 219; (Mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule de spin  $\frac{h}{2}$ ) 220; (Représentation des corpuscules en mouvement rectiligne et uniforme) 220.
- Petresco, Julian (Commutateurs) 255.
- Petrov, V. V. (Cramérscher Grenzwertsatz) 360.
- Peyerimhoff, A. s. W. Jurkat 330.
- Pezzana, Mario (Differenzialità delle funzioni) 280.
- Pezzo, Gaetano del (Tempo) 250.
- Pfirsch, Dieter und Eberhard Spenke (Effektive Masse eines Kristallelektrons) 451.
- Phillips, William (Curve of deaths) 135.
- Piccard, Sophie (Structure de groupes) 21; (Théorie des substitutions) 21; (Groupes jouissant de la propriété  $P' \pmod{p}$ ) 257.
- Piekara, A. (Polarization of ferroelectric titanates) 239.
- Pierce, J. R. (Noise in electron streams) 215.
- Pikus, G. E. (Photoeffekt an Oberflächenniveaus) 452.
- Pillai, K. C. S. and K. V. Ramachandran (Ratio of the  $i$ -th observation in an ordered sample to the standard deviation) 377.
- Pines, David (Paramagnetic susceptibility) 453.
- Pirani, F. A. E. (Gravitational field surrounding an isolated body) 441.
- Plackett, R. L. (Multivariate integrals) 357.
- Plainevaux, J. E. (Guidage rectiligne sur lames élastiques) 177; (Profil optimum) 177.
- Pleijel, Åke (Green's functions of the membrane equation) 97.
- Arne (Teilung konvexer Bereiche) 157.
- Plesset, M. S. and S. A. Zwick (Vapor bubbles in superheated liquids) 205.
- Plessis, N. du (Functions in Lip  $a$ ) 287.
- Plíš, A. (Ordinary differential equations) 312; (Nonlinear partial differential equations) 319; (Rational functions) 421.
- Plotkin, B. I. (Verbandsisomorphismen auflösbarer  $R$ -Gruppen) 21.
- Plunkett, Robert L. (Semi- $I$ -connectedness) 162.
- Podderjugin, V. D. (Ordnung eines beliebigen Ringes) 263.
- Pogorzelski, W. (Construction mécanique) 423.
- Pohlack, Hubert (Lichtabsorption in Metallschichten) 436.
- Poincaré, H. (Electricité et optique) 432.
- Poincelot, Paul (Répartition du courant) 208.
- Poli, L. et P. Delerue (Calcul symbolique) 332.
- Pollak, Henry s. Ph. Davis 292.
- Položij, G. s. K. Breus 4.
- — N. (Gebietsinvarianz für Systeme von Differentialgleichungen) 304; (Satz über Ränderzuordnung) 304.
- Pólya, G. (Introduction and analogy in mathematics) 241; (Patterns of plausible inference) 241; (Eigenvalues) 324; (Gauss-Bonnet theorem) 390.
- — and M. Schiffer (Convexity of functionals) 327.
- Pomerančuk, I. Ja. s. A. D. Galanin 444.
- Pope, J. A. s. F. H. C. Marriott 133.
- Popoff, Kyrrill (Äußere Ballistik) 173; (Thermodynamique des processus irréversibles) 206.
- —, Emmanuel Dimitroff et Kyrrille Dotcheff (Équations différentielles de la thermodynamique des processus irréversibles) 206.
- Popov, Blagoj S. (Réductibilité des équations différentielles) 309.
- Popova, Helen (Finite quasigroups. I.) 255.
- Porcelli, Pasquale (Integrals) 56.
- Porter, C. E. s. H. Feshbach 228.
- Portmann, A. s. F. Fiala 7.
- Povarov, G. N. (Abtrennbarkeit Boolescher Funktionen) 9.
- Pozzolo Ferraris, Giulia (Costruzione della tangente) 390.
- Prachar, K. (Resultat von A. Walfisz) 42.
- Prager, William (Plastic flow) 183; (Kinematics of soils) 426.
- — s. H. G. Hopkins 184.
- — s. E. T. Onat 184.
- — s. A. J. Wang 426.
- — s. H. J. Weiss 185.
- Prasad, Ayodhya (Interrelations of paths) 155.
- Preston, G. B. (Inverse semigroups) 19, 20.
- Prigogine, I. (Liquid helium) 234.
- Primrose, E. J. F. (Coincidence points) 144; (Quartic curves) 392.
- Prins, J. A. s. H. J. Merk 197.
- Pritchard, H. O. and F. H. Sumner (Electronic digital computers. I.) 232.
- Privalov, I. I. (Analytische Geometrie) 390.
- Proudman, I. and W. H. Reid (Decay of a velocity field) 199.
- Prvanovitch, Mileva (Hyperlignes de Darboux) 410; (Darboux lines) 410.
- Przykowski, Tadeusz (Kopernikusscher Gedanke) 244.
- Puppe, Dieter (Abbildungen eines Polyeders) 420.
- Putnam, C. R. (Dynamical systems) 85; (Correlation functions) 85; (Riemannian zeta-function) 295; (Spectra of commutators) 343.
- Quine, W. W. (Quantification and the empty domain) 10; (Dyadic predicate) 11.



- Quinet, J. (Mathématiques supérieures. I. II. IV. V. VI.) 44.
- Rabinowitz, P. s. P. Davis 291.
- Rachajsky, B. (Transformations de contact) 318.
- Rachmanov, B. N. (Schlichte Funktionen) 300.
- Råde, Lennart (Modified  $t$ -test) 368.
- Rademacher, Hans (Dedekind sums and lattice points) 274.
- Radon, Johann (Stabilität gespannter Netze) 403.
- Ragab, F. M. (An integral involving product of Bessel functions) 63.
- Raher, W. (D'Alembertsches Prinzip in Motorsymbolik) 186.
- Rahnberg, Gösta (Vortex filament in a cylinder) 187.
- Raj, Des (Truncated sampling) 131.
- Rajski, C. (Comparing general populations) 369.
- Ramachandran, K. V. s. K. C. S. Pillai 377.
- Ramakrishnan, Alladi and P. M. Mathews (Molecular distribution functions. II.) 233.
- Ramasarma, B. V. (Partitions of zero into 4 cubes) 267.
- Raševskij, P. K. (Darstellungen Liescher Gruppen) 26; (Inneralgebraische Liesche Gruppen) 259.
- Rasiowa, H. and R. Sikorski (Existential theorems in functional calculi) 11.
- Rattray, B. A. (Antipodal-point, orthogonal-point theorem) 418.
- Rau, P. S. (Parabolas related to a triangle) 139.
- Rauch, H. E. s. M. Gerstenhaber 75.
- Ravner, C. B. (Application of the Whitehead theory to non-static systems) 216.
- Rayski, J. (Mass quantization) 444.
- Read jr., W. T. (Dislocations in germanium) 235.
- Reade, Maxwell (Fonctions univalentes) 299.
- Readey, William B. (Indeterminate frames) 175.
- Rédei, Ladislaus (Ringe mit gegebenem Modul) 264.
- Redlich, Martin G. (Two-nucleon configurations) 447.
- Reich, Edgar (Theorem of Beckenbach) 73.
- Reichenbach, Hans (Nomological statements) 244.
- Reid, W. H. s. I. Proudman 199.
- William T. (Moment problems) 103; (Tauberian theorem) 283.
- Reiersol, Olav (Tests of linear hypotheses) 373.
- Reissig, Rolf ( $\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D \cdot \frac{dx}{d\tau} + \mu \operatorname{sign} \frac{dx}{d\tau} + x - \Phi(\eta\tau)$ ) 311.
- Reiter, Hans ( $L^1$ -Räume auf Gruppen. I. II.) 105.
- Rembs, Eduard (Randvorgaben bei Verbiegung konvexer Flächen) 404.
- Rešetnjak, Ju. G. s. P. O. Kostljanec 55.
- Rham, Georges de (Division de formes) 316.
- Riabouchinsky, Dimitri (Méthode des variables topographiques) 190; (Champs gazodynamique et électromagnétique) 191; (Expérience de Michelson) 216.
- Ricci, Giovanni (Punti critici) 293.
- Rice, O. K. (Higher-order phase transitions) 234.
- Richardson, John M. s. W. M. MacDonald III 206.
- Richter, Hans (Norm der Inversen einer Matrix) 14.
- — und H. Knödler (Elektronenstrahl - Interferenzen) 450.
- Ridder, J. (Modale Aussagenlogiken und Strukturen. I. II. III. IV. V. VI.) 10.
- Riguet, Jacques (Calcul des relations binaires) 28.
- Riley, James D. s. R. C. Roberts 199.
- Rivier, William (Solutions entières de  $rx + sy = m$ ) 35.
- Rivlin, R. S. and C. Topaloglu (Finite elastic deformations) 426.
- Roach, R. E. s. J. M. Frankland 185.
- Robbins, Herbert (Joint distribution of cumulative sums) 128.
- Roberts, Richard C. and James D. Riley (M. I. T. cone tables) 199.
- Robinson, G. de B. (Modular representations of symmetric group. IV.) 25.
- — — and O. E. Taulbee (Product of representations of  $S_n$ ) 257.
- J. E. (Continuity of transformation groups) 416.
- Robl, H. s. K. Baumann 448.
- Rodosskij, K. A. (Kleinste Primzahl in arithmetischer Progression) 271.
- Rogers, G. L. (Abbe theory of microscopic vision) 213.
- Rogosinski, W. W. (Extremum problems for polynomials) 61, 289.
- Romberg, W. und H. Vier-voll (Darstellung eines Kurvenstückes) 353.
- Rosati, Mario s. M. Benedicty 4.
- Rose, M. E. and R. K. Osborn (Pseudoscalar interaction and beta spectrum of RaE) 228; (Nuclear matrix elements) 229.
- N. W. (Roze, N. V.) s. N. J. Kotschin 186.
- Rosen, David (Continued fractions) 307.
- Rosenbaum, S. (Test of dispersion) 376; (Nonparametric test of location) 376.
- Rosenberg, Alex (Subalgebras of all continuous linear transformations) 109.
- Rosenfeld L. (Causalité statistique) 170.
- Rossi, Bruno s. Ph. Morrison 229.
- Rothe, Kurt s. K. Morghen 191.
- Rothstein, Wolfgang (Satz von Casorati-Weierstrass) 76.
- Rott, N. s. H. K. Cheng 187.
- Roy, Purnendu Mohon (Construction of block designs) 128.
- S. N. (Theorem in matrix theory) 15.
- Roze, N. V. s. N. W. Rose 186.
- Rozet, O. et N. Legrain-Pissard (Congruences) 408.
- Rubin, H. s. Z. W. Birnbaum 377.

- Rubinow, S. I. (Scattering amplitude) 220.
- Rubinowicz, A. (Signale in Wellenleitern) 210; (Beugungswelle) 435.
- Rüdiger, D. (Drehsymmetrische Membrane) 424.
- Rutherford, R. S. G. (Contagious distribution) 359.
- Rutishauser, Heinz (Quotienten-Differenzen-Algorithmus) 350; (Valeurs propres d'une matrice) 350.
- Ryser, H. J. s. M. Hall 251.
- Saban, Giacomo (Funzioni totalmente derivabili) 76.
- Sadowski, W. s. H. Steinhäus 364.
- Saelman, B. (Airplane stopping distance) 196.
- Saenz, A. W. (Elektromagnetischer Tensor) 217.
- Saeterhaug, Odd H. (Knickproblem) 423.
- Šafarevič, I. R. (Körper mit vorgegebener Galoisscher Gruppe) 33; (Existenzsatz in der Theorie der algebraischen Zahlen) 34; (Gleichungen höheren Grades) 254.
- Šaginjan, A. L. (Approximation durch Polynome) 292.
- Sakover, Meyer s. Edward S. Smith 142.
- Salam, Abdus s. P. T. Matthews 443.
- Salem, R. (Problem of Smithies) 287.
- — and A. Zygmund (Properties of trigonometric series) 290.
- Salmon, George (Conic sections) 142.
- Salter, L. (Simon melting equation) 205.
- Salzman, G. and A. H. Taub (Born-type rigid motion) 438.
- Samelson, H. (Groups and spaces of loops) 168.
- Sampei, Yoemon (Lattice completions) 262.
- Sandgren, Lennart (Convex cones) 157.
- Sandham, H. F. (Infinite series) 40.
- Sangren, W. C. s. S. D. Conte 90.
- Sankey, G. O. s. A. M. Wahl 183.
- Sansone, Giovanni (Problema del Bianchi) 403.
- — ed R. Conti (Equazione di T. Uno ed R. Yokomi) 89.
- Šapiro, I. S. s. V. V. Turovcev 228.
- Sapogov, N. A. (Regressionslinien) 134.
- Sarantopoulos, Spyridon (Intégrales holomorphes des équations différentielles) 309.
- Sasayama, Hiroyoshi (Affine connection parameters) 155.
- Satō, Masako (Fourier series. I. II.) 287.
- Sauer, R. (Modelle zur Differentialgeometrie) 148; (Flächenklassen) 404.
- Saul'ev, V. K. (Konvergenz der Eigenfunktionen) 325.
- Savin, G. N. (Dynamische Kräfte im Aufzugsseil eines Schachtes) 185.
- — — und V. N. Ševelo (Schwingungen einer Last) 185.
- Sawicki, Jerzy (Deuteron polarizability) 449.
- Scanlan, R. H. (Beam and column problems) 179.
- Schaefer, Helmut (Nichtlineare Integralgleichungen) 101.
- Schaeffer, A. C. (Power series and Peano curves) 294.
- Schäfer, Wilhelm (Mutungsproblem der Besetzungsverteilung) 128.
- Schaffner, J. S. and J. J. Suran (Diffusion equation for transistors) 237.
- Schäfer, Friedrich Wilhelm s. J. Meixner 84.
- Schafroth, M. R. s. M. J. Buckingham 234.
- Scheffer, C. s. D. van Dantzig 126.
- Scheidegger, Adrian E. (Statistical hydrodynamics in porous media) 204.
- Schenkman, Eugene (Finitely generated groups) 255.
- Scherrer, Willy (Lineare Feldtheorie. I.) 441.
- Schiff, L. I. (Noncubic crystal classes) 451.
- Schiffer, M. (Variation of domain functionals) 327.
- — s. G. Pólya 327.
- — M. s. St. Bergman 320.
- Schinzel, A. (Fonctions  $\varphi(n)$  et  $\sigma(n)$ ) 270.
- — et W. Sierpiński (Fonctions  $\varphi(n)$  et  $\sigma(n)$ ) 270.
- Schlichting, H. and E. Truckenbrodt (Flow on a rotating body) 198.
- Schlüter, A. s. R. Lüst 170.
- Schmeidler, W. (Lineare Operatoren) 339.
- — und Dietrich Morgens-tern (Alternativsatz der Fredholmschen Theorie) 101.
- Schmidt, Jürgen (Abgeschlossenheits- und Homomorphiebegriffe) 45.
- Schoenberg, I. J. (Isoperimetric inequality for closed curves) 157.
- Schönberg, M. (Hydrodynamical model of quantum mechanics) 219.
- Schottlaender, Stefan s. H. Bilharz 119.
- Schouten, J. A. (Tensor analysis) 170.
- Schütte, Kurt (System der Analysis) 246.
- Schützenberger, Marcel Paul (Treillis universel des géométries projectives) 384.
- Schuh, H. (Wärmeübergang in Grenzschichten) 197; (Temperature distribution and thermal stresses) 203.
- Schultz, W. (Kontakt Metall-Halbleiter) 239.
- Schultze, Ernst (Pure natural modes) 185.
- Schulz, Werner und Rudolf Ludwig (Flugmechanik) 189.
- Schumann, Winfried Otto (Oberfelder bei der Ausbreitung langer Wellen) 240; (Strahlung langer Wellen. I.) 240; (Ausbreitung langer Wellen um die Erde) 240.
- Schwartz, J. (Perturbations of spectral operators. I.) 349.
- Laurent (Multiplication des distributions) 106.
- Schwarz, Binyamin s. Z. Nehari 299.
- Schwiedefsky, K. (Photogrammetrie) 422.
- Scott, Elizabeth L. s. J. Neyman 240.

- Scott, J. M. C. (Neutron-widths) 447.
- Seelbinder, B. M. s. A. Brauer 269.
- Seeliger, O. (Crelles Rechentafeln) 355.
- Segal, I. E. (Abstract probability spaces) 123.
- Segre, Beniamino (F. Conforto) 4; (G. Fubini) 244; (Teorema di Noether) 396; (Sistemi di forme quadratiche) 397; (Questioni di realtà) 398; (Dilatazioni e varietà canoniche) 398.
- Seide, Paul („Buckling of sandwich columns“) 178.
- Seiden, Joseph (Amplitudes des oscillations) 214.
- Seidenberg, A. (Decision method for elementary algebra) 18.
- Seidenfaden, J. (Tragfähigkeit dünnwandiger U-Profile) 178.
- Seiler, J. A. and P. S. Symonds (Deformation in beams under loads) 184.
- Seiberg, Sigmund  

$$\left( \sum_{n \leq r} \frac{\mu(n)}{nd(n)} \right) 211.$$
- Selig, F. (Potentialbegriff in der Motorrechnung) 177.
- Selmer, Ernst S. ( $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ ) 267.
- Seman, O. I. (Relativistische Aberrationsfunktionen) 437.
- Semin, F. (Surface surescuelles par leurs cercles de courbure) 402.
- Semuchina, N. V. s. P. P. Kufarev 298.
- Senitzky, I. R. (Harmonic oscillator) 442; (Interaction between electrons and high-frequency fields. I.) 445.
- Serini, Rocco (Momento risultante delle azioni capillari) 204; (Adiabaticità) 205.
- Šestakov, V. I. (Transformation einer monozyklischen Folge) 12.
- Šestopalov, V. P. (Strömung einer zähen Flüssigkeit) 188.
- Sevelo, V. N. s. G. N. Savin 185.
- Sextl, Theodor (Poiseuillesche Strömung) 429.
- Sgarbazzini, Carlo („Nomenclatura“) 121.
- Shah, S. M. and S. K. Singh (Maximum function of a meromorphic function) 296.
- Shapiro, A. H. and S. J. Kline (Shock waves in a perfect gas) 202.
- Victor L. (Subharmonic functions) 99.
- Sharp, W. T. s. J. M. Kennedy 449.
- Sheffer, I. M. (Functions related to harmonic functions) 326.
- Sheingold, Leonard S. and James E. Storer (Circumferential gap in a circular wave guide) 210.
- Shenton, L. R. (Integral including a new continued fraction) 120; (Class of definite integral) 281.
- Shibata, Kêichi s. Y. Tôki 75.
- Takashi (Differential equations equivalent to Dirac's equation for hydrogen atom) 220.
- Shield, R. T. (Stress and velocity fields) 184.
- Shimrat, M. (Embedding in homogeneous spaces) 416.
- Shindo, Mitsuo s. Sh. Hatanô 446.
- Shipman, J. S. s. R. L. Sternberg 432.
- Shoemaker, E. s. A. M. Wahl 183.
- Sholander, Marlow (Medians and betweenness) 261; (Medians lattices and trees) 262.
- Sichardt, W. (Satz vom Kreis) 141.
- Siddiqi, Jamil A. (Theorem of Fejér) 62.
- Siegel, Carl Ludwig (Proof of  $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)/\tau$ ) 295.
- Sierpiński, W. (Existence de puissance  $\aleph_1$ ) 50; (Congruence of sets) 279; (Espaces métriques séparables) 415.
- — s. A. Schinzel 270.
- Sigalov, A. G. (Aufgaben der Variationsrechnung) 329.
- Sikorski, R. (Closure homomorphisms) 158.
- — s. H. Rasiowa 11.
- Šilov, G. E. s. A. G. Kostjučenko 316.
- Singal, M. K. and Ram Behari (Codazzi's equations) 153; (Geodesic subspaces) 410.
- Singer, I. M. s. R. Arens 335.
- Singh, K. R. (Vortex round the bend of a channel) 191.
- S. K. s. S. M. Shah 296.
- Sinjukov, N. S. (Geodätische Abbildung Riemannscher Räume) 153.
- Simoni, Franco de (Statica a simmetria sferica) 217.
- Širokov, Ju. M. (Relativistische Gleichungen für Elementarteilchen) 442.
- Skal'skaja, I. P. s. G. A. Grinberg 210.
- Šklovskij, I. S. (Quellen der kosmischen Radiostrahlung) 229.
- Skolem, Th. (Grundlagenforschung) 245; (Considerations concerning recursive arithmetic) 248; (Quadratic non-residue modulo  $p$ ) 267.
- Skornjakov, L. A. (Kurvensysteme) 162.
- Slater, J. C. s. G. F. Koster 452.
- Slibar, A. (Schwingungstilgung) 175.
- Smirnov, V. I. und E. S. Kuljabko (M. Sofronov) 4.
- Smith, C. Bassel s. K. O. Walters 424.
- Edward S., Meyer Sakover and Howard K. Justice (Analytic geometry) 142.
- J. W. s. D. N. Morris 196.
- K. T. s. N. Aronszajn 113.
- Šnol', E. E. (Sturm-Liouville-sche Operatoren) 344.
- J. E. (Eigenfunktionen) 84.
- Sobel, Milton s. R. E. Bechhofer 130.
- — s. Ch. W. Dunnett 367.
- — s. B. Epstein 382.
- Socio, Marialuisa de (Frequenze critiche in una guida d'onda) 210.
- Sokolov, N. P. (Invarianten ternärer kubischer Formen) 253; (Klassifikation ternärer kubischer Formen) 253.
- Solbrig jr., A. W. (Three-body nuclear interactions) 447.
- Solomon, L. (Helikoidale Schale) 179.
- Somerville, Paul N. (Optimum sampling) 379.
- Sonin, N. Ja. (Zylinderfunktionen und spezielle Polynome) 65.



- Sonntag, G. (Lochrandbelastung einer gelochten Scheibe) 179.
- Sorkin, Ju. I. (Einbettung von Strukturoiden) 28.
- Souček, E. (Unterwassertragfläche) 194.
- Spampinato, Nicolò (Varietà determinata da una terna di ipersuperficie) 146.
- Specker, E. (Kontinuums-hypothese) 50.
- Speiser, Ambros P. (Elektronisches Rechengerät) 355.
- Spence, D. A. (Characteristics of airfoils) 193.
- Spenke, Eberhard s. D. Pfirsch 451.
- Spiegel, Murray R. (Applications of Dirac delta function) 170.
- Spighele, Maurice s. P. Braffort 225.
- Sprinkle, H. D. s. F. Bagemühl 50.
- Spruch, Larry and G. Goertel (Compton coefficients) 448.
- Srinath, L. S. s. Y. V. G. Acharya 181.
- Stampacchia, Guido (Equazioni differenziali ordinarie) 313; (Problemi variazionali per gli integrali multipli) 329.
- Standley, Gerald B. (Ideographic computation) 8.
- Stanjukovič, K. P. s. S. A. Kaplan 438.
- Stanković, Bogoljub (Fonction du calcul opérationnel) 103.
- Stanoyevitch, Tchaslav (Inégalité de M. Kolmogoroff) 125.
- Staržinskij, V. M. (Stabilität der trivialen Lösung linearer Differentialgleichungssysteme) 86.
- Stavropoulos, Pothitos (Diamètres rectilignes des courbes algébriques) 392.
- Steiger, A. L. von (Satzkalkül des „Common sense“) 8.
- Stein, Paul R. s. R. L. Bivins 258.
- S. (Families of curves) 419.
- Steinhardt, F. s. C. Carathéodory 67.
- Steinhaus, H. (Dispersionsmeter) 127; (Shuffled numbers) 134.
- Steinhaus, H. s. J. Łukasiewicz 117.
- —, T. Czechowski, M. Fisz, O. Lange, J. Oderfeld und W. Sadowski (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 364.
- Stelson, H. E. (Root of an equation) 352.
- Stephens, Robert E. (Achromatic objectives) 213.
- Stephenson, G. (Unified field theories) 439.
- — s. C. W. Kilmister 216.
- Sternberg, R. L., J. S. Shipman and W. B. Thurston (Bennett functions) 432.
- Steuerwald, Rudolf (Natürliche Zahlen  $N$  mit  $\sigma(N) = 3N$ ) 38.
- Stewart, B. M. (Sums of divisors) 270.
- F. M. s. W. K. Hayman 72.
- Stöhr, Alfred (Symmetrische Polynome) 17.
- Stoker, D. J. (Wilcoxon's test statistic. I. II.) 374.
- J. J. s. A. S. Peters 434.
- Stoll, Wilhelm (Fortsetzbarkeit analytischer Mengen) 79.
- Storer, James E. s. L. S. Sheingold 210.
- Stratonovic, R. L. s. P. I. Kuznecov 215.
- Strebel, Kurt (Distance of two boundary components) 302.
- Strickler, P. s. H. Jecklin 134.
- Stroh, A. N. (Formation of cracks) 235.
- Strubecker, Karl s. A. Frey 405.
- Studies in Mathematics and Mechanics 2.
- Sugawara, Masao s. A. Kanazawa 228.
- Suits, Daniel B. (Dynamic growth) 136.
- Šulikovskij, V. I. (Metrik einer Spiralfäche) 149.
- Sumner, F. H. s. H. O. Pitcheard 232.
- Sundrum, R. M. (Estimating efficiency and power of tests) 131.
- Sunouchi, Genichirō s. H. Hirokawa 283.
- Haruo (Maximal ideal) 108.
- Suprunenko, D. (Untergruppen der symmetrischen Gruppe) 23.
- Suran, J. J. s. J. S. Schaffner 237.
- Süss, Wilhelm (Minkowskische Geometrie) 407.
- Suyama, Yukio (Second order linear differential equation) 310.
- Švec, Marko (Differentialgleichung vierter Ordnung) 310.
- Swain, R. L. (Models of the Euclidean plane. I.) 353.
- Swainger, Keith (Deformation. I.) 175.
- Symonds, P. S. s. J. A. Seiler 184.
- Synge, J. L. (Transfer of energy) 433; (Whitehead-Rayner expanding universe) 441.
- Syrovatskij, S. I. (Tangentiale Unstetigkeiten in kompressiblem Medium) 176.
- Szablewski, W. (Turbulente Strömungen) 431.
- Szabó, István (Technische Mechanik) 423.
- Szász, Paul (Poincarésches Kreismodell) 138.
- Szegő, G. (Singularities of zonal harmonic expansions) 65.
- Szele, T. (Basic subgroups of Abelian  $\mu$ -groups) 23.
- — s. L. Fuchs 23.
- — s. A. Kertész 260.
- Szélpál, I. (Abelian groups) 22.
- Szép, J. (Satz von O. Ore) 256.
- Szymański, Z. (Electrodynamics with higher derivatives) 207.
- T**aam, Choy-Tak (Osgood's oscillation theorem) 82.
- Tachibana, Syun-ichi (Imbedding of projectively connected space) 414.
- Tafeln des Integral-Sinus und -Cosinus 122.
- Takahashi, Yasushi (Gauge invariance) 223.
- Takano, Kazuo (Contact transformations) 413.
- Takeno, Hyōitirō (Problem of many bodies) 216.
- Taldykin, A. T. (Eigenwerte bei linearen Operatoren) 343.
- Tamari, Dov (Applications of logic and mathematics) 245; (Uniform structures and spaces) 415.

- Tamm, I. E., Ju. A. Gol'fand und V. Ja. Fajnberg (Wechselwirkung von  $\pi$ -Mesonen mit Nukleonen. I.) 446.
- Tammi, Olli (Conformal mapping of schlicht domains) 74.
- Tan, H. S. (Motion of submerged cylinder) 430.
- Tanaka, Chuji (Dirichlet series. XII. XIII.) 294.
- Hiroshi s. D. Ito 225.
- Katsumi (Čerenkov radiation) 230.
- — s. E. J. Hellund 226.
- Tandori, Károly (Singuläre Integrale) 284.
- Tani, Itiro (Laminar boundary-layer equations) 197.
- Tanturri, Giuseppe (Particolare quartica piana) 144.
- Tarski, Jan s. R. Montague 28.
- Tashiko, Yoshihiro s. K. Yano 399.
- Tate, Robert F. (Correlation between a discrete and a continuous variable) 367.
- Taub, A. H. s. G. Salzman 438.
- Tauber, G. E. and Ta-You Wu (Magnetic moment of  $K^0$ ) 227.
- Taulbee, O. E. s. G. de B. Robinson 257.
- Taylor, S. J. s. A. S. Besicovitch 278.
- Tchen, Chan-Mou (Motion of small particles) 188; (Transport processes as foundations of theories of turbulence) 198.
- Teicher, Henry (Convolution of distributions) 332; (Poisson distribution) 358; (Factorization of distributions) 359.
- Tenca, Luigi (Particolare elica sferica) 402.
- Teral, Procopio Zorua s. Zorua Teral, Procopio 124.
- Terent'ev, N. M. s. V. N. Faddeeva 356.
- Terpstra, T. J. (Problem of  $k$ -samples) 375.
- Terracini, Alessandro (Gino Loria) 244; (Superficie razionali iperspaziali) 395.
- Tesch, H. (Elastizitäts-Störmoment beim Pendel) 428.
- Tessman, Jack R. (Magnetic anisotropy) 453.
- Tewordt, Ludwig (Stoßionisation) 239.
- Thalberg, Olaf M. (Algebraic curves) 394.
- Thébault, V. (Curiosités arithmétiques) 14; (Angles de Brocard et de Steiner) 139; (Tetrahedron) 140; (Tétraèdres transmutables) 140; (Sphères associées à un tétraèdre) 140; (Complete quadrilateral) 388; (Tétraèdre associé au tranchet d'Archimède) 389.
- Thierrin, Gabriel (Demi-groupes) 19.
- Thimm, Walter (Meromorphe Abbildungen komplexer Mannigfaltigkeiten) 306.
- Thirring, W. E. s. M. Gell-Mann 443.
- Thoma-Fulda, Alfred s. Wilhelm Hort 79.
- Thomas, T. Y. (Grid rotation in Lüders bands) 184; (Formation of a Lüders band) 184; (Yield condition and stress-strain relations) 184; (Supersonic airfoils) 200.
- — — s. W. F. Brown 201.
- Thomson, W. T. (Impulsive response of beams) 186.
- Thron, W. J. s. V. F. Cowling 254.
- Thurston, H. A. (Congruences on a distributive lattice) 262.
- W. B. s. R. L. Sternberg 432.
- Tiago de Oliveira, J. (Composite distributions) 382.
- Tichonov, V. I. s. P. I. Kuznecov 215.
- Tien, Ping King (Focusing of an electron stream) 214.
- Tietz, T. (Schrödinger equation for finite systems) 442.
- Tietze, Heinrich (Gustav Herglotz) 5.
- Tillieu, Jacques et Jean Guy (Susceptibilités et anisotropies magnétiques moléculaires) 230.
- Tillmann, Heinz-Günther (Dualität in Potentialtheorie) 334.
- Titchmarsh, E. C. (Distribution of eigenvalues) 83.
- Tôki, Yukinari and Kêichi Shibata (Pseudo-analytic functions) 75.
- Tolpygo, K. B. s. T. I. Libenberg 236.
- Tomić, M. (Séries trigonométriques) 62.
- Tomić, M. s. R. Bojanić 332.
- Tomonaga, Yasuro (Betti numbers of Riemannian manifolds. III.) 411.
- Tonnelat, Marie-Antoinette (Équations d'Einstein  $g_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ ;  $q = 0$ ) 441.
- Topakoglu, C. s. R. S. Rivlin 426.
- Tornehave, Hans (Stepanov almost periodic functions) 308.
- Török, C. s. H. Zocher 234.
- Torre, C. (Ansatz für elastisch-zähe Stoffe) 182.
- Trainor, L. E. H. (Exchange forces) 447.
- Tranter, C. J. (Dual integral equations) 433.
- Treffitz, E. s. R. Lüst 170.
- Trehan, S. K. s. R. C. Majumdar 226.
- Trevisan, Giorgio ( $y''(x) + A(x)y(x) = 0$ ) 310.
- Trezona, P. W. (Colour equations. II.) 213.
- Trickett, W. H. and B. L. Welch (Comparison of two means) 370.
- Tricomi, F. G. (Strömung mit Durchgang durch Schallgeschwindigkeit) 199; („Tricomi-gas“) 200.
- Trjitzinsky, W. J. (Problèmes de totalisation) 325.
- Truckenbrodt, E. s. H. Schlichting 198.
- Truesdell, C. (Bulk viscosity of fluids) 185; (Kinematics of vorticity) 186.
- Tsuboi, Teruo s. Sh. Ozaki 305.
- Tsuji, Masatsugu (Boundary distortion on conformal mapping) 301; (Linear group of Schottky type) 307.
- Tsurumi, Shigeru (Ergodic theorem) 277.
- Tsuya, Noboru (Spin wave field theory) 238.
- Tumarkin, G. C. (Approximation von Funktionen) 71.
- Turner, C. H. M. (Instantaneous power spectrum) 363.
- Turovcev, V. V. und I. S. Šapiro (Strahlungs-K-Einfall) 228.
- Turri, Tullio (Trasformazioni birazionali involutorie aventi una stella unita



- di rette) 393; (Trasformazioni birazionali involutorie associate a un complesso lineare) 393.
- Tzara, Christophe s. P. Brafort 225.
- Tzou, K. H. (Champs vectoriel et pseudovectoriel) 224.
- Uffland, Ja. S. s. G. A. Grinberg 210.
- Uhler, H. S. (Perfect numbers) 38.
- Umegaki, Hisaharu (Positive linear functional) 108.
- Umezawa, H. and S. Oneda (Commutation relations between fields) 444.
- Toshio (Star-like theorems) 73; (Coefficients of meromorphic functions) 297.
- Underwood, F. (Differential equations) 80.
- Upadhyay, M. D. (Curves in a Riemannian space. II.) 410.
- Urban, P. s. H. Mitter 228.
- Urbanik, K. (Théorèmes sur les mesures) 55; (Problème de J. F. Pál) 161.
- Utiyama, Ryôyû and Tsutomu Imamura (Infinites due to complex poles of modified propagators) 224.
- Vaccaro, Giuseppe (Cerchi iperoscultori ad una superficie) 402.
- Vaidya, P. C. (Symmetric solutions in nonsymmetrical field theories. II.) 217.
- Vajnberg, M. M. (Quadratische Integralformen) 112.
- Vandakurov, Ju. V. (Beugung elektromagnetischer Wellen) 212.
- Vandiver, H. S. (Cyclotomic fields) 41; (Fermat's last theorem) 41; (Trinomial congruence criteria) 41; (Trinomial equations) 268.
- — — s. C. A. Nicol 40.
- Vanhuyse, V. J. s. C. C. Grosjean 214.
- Vanlaer, G. (Calcul avec 15 chiffres) 135.
- Vaona, Guido (Trasformazioni fra piani) 407.
- Varini, Bruno (Calcolo tensoriale) 399.
- Varoli, Giuseppe (Metodo di iterazione) 117.
- Vaught, Robert L. (Löwenheim-Skolem-Tarski theorem) 248.
- Venkov, B. A. (Euklidische Polyeder) 141.
- Verde, M. (Pseudoscalar nuclear field) 446.
- Verigin, N. N. (Bewegung des Grundwassers) 431.
- Vernić, Radovan (Stoßbedingungen im Dreikörperproblem) 173.
- Verschaffelt, J. E. (Stabilité de l'équilibre chimique) 205; (Thermomécanique du courant électrique) 206; (Minima de production d'entropie) 206.
- Vidav, Ivan (Eigenschaft der Kugel) 329.
- Viervoll, H. s. W. Romberg 353.
- Viglin, A. S. (Aufgabe der Magnetostatik) 432.
- Vilenskij, I. M. (Radiowellen in der Ionosphäre) 207.
- Villi, C. C. s. F. Ferrari 206.
- Vincensini, Paul (Surfaces dont les réglées asymptotiques appartiennent à des complexes) 150; (Représentation hyperspatiale de l'espace réglé) 408.
- Vinograd, R. É. (Behauptung K. P. Persidskijs) 87.
- Viswanathan, K. S. (Elasticity and wave propagation in crystals) 234.
- Vitousek, Martin s. P. R. Garabedian 186.
- Vivier, Marcel (Matrices unitaires) 15.
- Vlioger, J. s. R. Fieschi 238.
- Vol'kenštejn, F. F. s. F. F. Wolkenstein 237.
- Volkman, Bodo (Pseudorationale Mengen) 51.
- Voronovskaja, E. V. (Polynome kleinster Abweichung) 61.
- Voss, H. M. s. J. Walsh 201.
- Vranceanu, G. (Espaces  $V_4$ ) 410.
- Vries, Hans Ludwig de (Riemannsche Räume) 152.
- Vrublevskaja, I. N. (Trajektorien und Grenzmengen) 161; (Trajektorien und Halbtjektorien) 161.
- Vuysje, D. (Application de la logistique) 249.
- Vythouklas, Dennis P. (Root of a polynomial) 18.
- Waelbroeck, L. (Algèbres commutatives) 336; (Algèbres à inverse continu) 337.
- Waerden, B. L. van der (Zur algebraischen Geometrie) 145; (Science awakening) 242.
- Wagner, K. (Metrisierbarkeit topologischer Räume) 159.
- Wahl, A. M., G. O. Sankey, M. J. Manioine and E. Shoemaker (Creep tests of rotating disks) 183.
- Walker, A. G. (Riemann extensions of non-Riemannian spaces) 154.
- L. R. (Power flow in electron beams) 211.
- M. J. (Polarized radiation) 212.
- Walmsley, Charles (Correction to „Trigonometric series in differential equations“) 80.
- Walsh, J., G. Zartarian and H. M. Voss (Aerodynamic forces on the delta wing) 201.
- — L. (Approximation par fonctions) 68; (Aires multiplement connexes. I. II.) 302, 303.
- Walter, Edward (Irrtumswahrscheinlichkeit) 130.
- Walters, Kenneth C. and C. Bassel Smith (Effect of uniform displacement) 424.
- Walton, E. T. S. (High-order focusing) 214.
- Wang, Alexander J. and William Prager (Thermal and creep effects in solids) 426.
- Hao (Formalization of mathematics) 245.
- Hsien-Chung (Complex paralisable manifolds) 154.
- Ward, Morgan (Cyclotomy) 40; (Prime divisors of linear recurrences) 41.
- Ware, A. A. (Plasma) 233.
- Warmus, M. (Numerical-graphic method) 352.
- — s. S. Drobot 132.
- Warner, W. H. s. G. H. Handelsman 183.
- Warren, W. R. s. A. Kahane 204.
- Wartmann, Rolf (Ulrich Graf †) 5.
- — s. U. Graf 132, 375.
- Wataghin, G. (Campi non locali) 444.



- Watanabe, Hisao s. Y. Hira-ga 373.
- Watson, G. L. (Representation of integers) 272.  
— — s. H. Davenport 42.  
— — N. (Reduction formula) 67.  
— — S. (Extreme values in samples from stochastic processes) 362.
- Ważewski, T. (Théorème de l'Hôpital) 114.
- Weber, J. (Electrical oscillator and noise. II.) 215; (Vacuum fluctuation noise) 215.
- Weil, André (Mémoire d'Hermite) 34; (Footnote to a recent paper) 37.
- Weiner, L. M. (Algebras based on linear functions) 30.
- Weinstein, Alexander (Tricomi equations) 93.
- Weinstock, Robert (Classical eigenvalue problem) 98.
- Weiss, H. J. and W. Prager (Bursting speed) 185.
- Weisskopf, V. F. s. H. Feshbach 228.
- Weizsäcker, C. F. v. (Darstellung starker Stoßwellen durch Homologie-Lösungen) 202.
- Welch, B. L. s. W. H. Trickett 370.
- Wells, Mark B. s. R. L. Bivins 258.
- Wendel, J. G. (Haar measure) 260.
- Wermer, John (Algebras with two generators) 104; (Invariant subspaces of bounded operators) 113; (Spectral measures on Hilbert space) 347.
- Whitehead, J. H. C. s. I. M. James 167.
- Whittaker, J. M. ( $\sum a_n f(nz)$ ) 294.
- Wielandt, Helmut (Satz von Sylow) 256.
- Wieringen, J. S. van (Perturbation theory in metallic conductivity) 236.
- Wilkes, E. W. s. A. E. Green 181.
- Wilkins jr., J. Ernest (Variational problem in reactor theory) 328.
- Wilkinson, J. H. (Latent roots and vectors of matrices) 122.
- Wille, R. J. (Espaces faiblement rétractiles) 415.
- Williams, W. E. (Diffraction by parallel planes) 434.
- Williamson, J. H. (Characteristic polynomials of  $AB$  and  $BA$ ) 14; (Topologising the field  $C(t)$ ) 104.
- Winogradski, Judith ( $\lambda$ -transformations) 218.
- Wintner, Aurel s. Ph. Hartman 84, 113.  
— — s. Sh.-Sh. Chern 402.
- Wishart, John (Distribution of joins between line segments) 126.
- Wiśniewski, Felix Joachim (Korpuskulartheorie der Beugung) 433.
- Witt, Ernst (Auswahlsatz von Blaschke) 159; (Invariante quadratischer Formen) 252; (Konstruktion von Fundamentalbereichen) 307.  
— — s. W. Klingenberg 253.
- Woinowsky-Krieger, S. (Bending of a flat) 179.
- Wolf, Paul (Zerlegung galoisscher Algebren) 30.
- Wolfenstein, L. (Triple-scattering experiments) 443.
- Wolfer, Ernst Paul (Erato-sthenes von Kyrene) 242.
- Wolff, Karl H. (Kritische Gitter) 43.  
— P. A. (Electron cascade in metals) 239.
- Wolfson, Kenneth G. ( $v$ -transitive rings) 110.
- Wolk, E. S. s. J. K. Goldhaber 336.
- Wolkenstein (Vol'kenštejn), F. F. und W. L. Bontsch-Brujewitsch (Elektronen in Ionenkristallen) 237.
- Woll jr., John W. s. L. C. Green 232.
- Wong, Y. K. (Minkowski-Leontief matrices) 15.
- Woods, L. C. (Compressible subsonic flow) 191; (Thick aerofoil in unsteady motion) 195.
- Woodward, Frank A. s. B. Etkin 201.
- Wright, Fred M. (Transformation for  $S$ -fractions) 294.  
— — B. (Algebras of finite type) 337.
- Wu, Ning-Gau and C. W. Nelson (Stresses in a flat curved bar) 178.  
— Ta-You s. E. Bauer 233.
- Wu, Ta-You s. G. E. Tauber 227.  
— Y. T. (Hydrofoils) 192.
- Wunderlich, Walter (Minimalspiralflächen) 403.
- Wynne, C. G. (Anamorphic lens systems) 435.
- Xeroudakes, George and Alfred Moessner (Elementary arithmetic) 267.
- Yamaguchi, Yoriko s. Yoshio Yamaguchi 447.  
— Yoshio (Two-nucleon problem. I.) 447.  
— — and Yoriko Yamaguchi (Two-nucleon problem. II.) 447.
- Yamamoto, Koichi (Euler squares) 14; (Distributive lattice) 263.
- Yamanoshita, Tsuneyo (Dimension of homogeneous spaces) 260.
- Yano, Kentaro (Geometrica conforme in varietà quasi hermitiane) 411; (Correspondance projective) 412.  
— — e E. T. Davies (Contact tensor calculus) 399.  
— — and Masayoshi Ohgane (Six-dimensional unified field theories) 218.  
— — and Yoshihiro Tashiko (Theorems on geometric objects) 399.
- Yntema, L. (Wahrscheinlichkeitsansteckung) 359.
- Yood, Bertram (Linear transformations on a Banach space) 338.
- Yoshida, Shiro (Reduced widths on collective model) 448.
- Yoshii, Tensho (Uniserial algebras. I.) 30.
- Yoshinaga, Kyôchi s. T. Ogasawara 337.
- Yoshizawa, Taro (Non-linear differential equation) 314; (System of differential equations) 314.
- Young, M. E. s. M. Lotkin 122.
- Yovits, M. C. s. J. L. Jackson 207.
- Zaanen, A. C. s. N. G. de Bruijn 54.
- Zacharias, Max („Konfigurationen  $(10_3)^{(4)}$ ") 142.
- Zarankiewicz, K. (Démonstration du théorème de F. J. Dyson) 419.

- Zarantonello, E. H. s. G. Birkhoff 430.
- Zariski, O. (Quatorzième problème de Hilbert) 396.
- Zartarian, G. s. J. Walsh 201.
- Zassenhaus, Hans (Henselsches Lemma) 266; (What is an angle?) 386.
- Zbornik, Josef (Fresnelsche Integrale) 120.
- Ždanov, G. B. s. V. I. Gol'danskij 211.
- Zech, Th. (Potenzsummen und Bernoullische Zahlen) 13.
- Zelen, Marvin (Bounds on a distribution function) 333; (Partially balanced designs) 381.
- Zelinsky, Daniel (Linear transformation) 110.
- Zerna, W. s. A. E. Green 182.
- Zeuli, Tino (Metodo di iterazione per la ricerca delle radici reali delle equazioni) 352.
- Zevakin, S. A. (Helligkeit und Radialgeschwindigkeit bei veränderlichen Sternen) 240.
- Zia ud-Din, M. ( $k$ -statistics  $k_9$  and  $k_{10}$ ) 376.
- Zieba, A. (Theory of pursuit) 141.
- Ziman, J. M. (Conductivities of monovalent metals) 453.
- Zitarosa, (Equazioni funzionali di Volterra-Tonelli) 349.
- Zitek, F. (Estimators of standard deviation) 381.
- Žitomirskij, Ja. I. (Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen) 317.
- Zizicas, G. A. (Nomogram for ratios of octahedral to shearing stresses) 176.
- Zlámál, Miloš (Stabilität erzwungener Schwingungen) 312.
- Zocher, H. und C. Török (Asymmetriebetrachtungen) 234.
- Zolotarev, V. M. (Verzweigte zufällige Prozesse) 125.
- Zoroa Teral, Procopio (Superposition von Zufallsvariablen) 124.
- Zuber, N. s. H. K. Forster 205.
- Zubov, V. I. (Zweite Methode von A. M. Ljapunov) 85.
- Žukov, A. I. (Gleichungen der Hydrodynamik) 186.
- Zulauf, Achim (Natürliche Zahlen als Summen von Primzahlen. II. III.) 39.
- Zwick, S. A. s. M. S. Plesset 205.
- Zygmund, A. s. R. Salem 290.